LA DE CAUCHY, UNA FÓRMULA PARA UNA INTEGRAL

Agustín Luis de Cauchy (París 1789 - Sceaux, 1857) ha sido uno de los matemáticos más grandes y prolíficos de la historia contemporánea de la Ciencia, por la cantidad de temas que tocó y en los cuales destacó. En partícular podemos considerar a Cauchy como el creador del análisis complejo.

Fue en el año 1825, cuando publicó un resultado extraordinario en su *"Resume des leÇons donées à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul Infinitésimal",* y que desde entonces conocemos como la **Fórmula de la Integral de Cauchy**. En esencia, el resultado estableció la posibilidad de calcular mediante integración el valor de una función compleja holomorfa en un punto *a* de un dominio plano D, de contorno simple cerrado dado por Γ, si se conocen los valores que toma tal función en el contorno Γ de D.

Vamos a tratar de explicitar la fórmula de la manera más simple que se nos ocurre, exponiendo antes algunos resultados previos necesarios.

1. Introducción:

El conjunto de los números complejos es el de los pares ordenados de números reales:

$$C = \{(a,b) / a \in R \wedge b \in R\}$$

Es fácil comprobar su estructura de grupo conmutativo respecto a la ley interna

$$(a,b) + (a',b') = (a + a', b + b'),\ \forall (a,b),(a',b') \in C^2$$

y su estructura de cuerpo conmutativo se añadimos como ley multiplicativa

$$(a,b) + (a',b') = (aa' - bb', ab' + a'b),\ \forall (a,b),(a',b') \in C^2$$

la representación gráfica bidimensional es lo que llamamos *el plano complejo,* donde el punto representativo del par de números reales que representa cada complejo decimos que es su *afijo* o punto representativo. Los conjuntos contenidos en el plano complejo los denominamos *recintos*, y, si son circulares, *discos*.

Un recinto D puede ser conexo o no conexo (por arcos) según se pueda o no unir dos puntos cualesquiera de D mediante un arco de curva plana continua contenida en D. En general se verifica que un espacio conexo por arcos es topológicamente conexo, aunque la afirmación contraria no sea cierta.

Tomando como grupo de vectores el grupo aditivo (C, +) y como cuerpo de definición el cuerpo conmutativo infinito de los números reales, es fácil determinar que la estructura (C, +, +R) es un espacio vectorial conmutativo real.

El espacio vectorial real de los números complejos es, además un espacio *normado*, esto es, se puede definir en él un módulo para cada complejo, una norma y una distancia.

Módulo o norma de un número complejo (a,b): $|(a,b)| = +\sqrt{a^2 + b^2}$

Distancia entre dos números complejos (a,b) y (c,d):

$$d\big((a,b),(a',b')\big) = |(a - a', b - b')| = +\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2}$$

1.2. Funciones en el campo complejo:

Una función compleja de variable compleja es una función de dominio en C y valores también en C:

$$f : C \to C$$

En general, si E es un espacio normalizado (dotado de una norma) sobre un campo numérico (en general R o el mismo C), una función de variable compleja con valores en E es :

$$f : C \to E$$

o bien, si es

$$f : C^n \to E$$

donde es C^n el espacio de las n-plas de números complejos.

Si el dominio de F es U $\subseteq$ C diremos que f está definida en el dominio U de C, que puede ser abierto o cerrado en la topología usual de C.

Funciones holomorfas:

Si es E un espacio vectorial normalizado, se dice que una función definida en un abierto U de C, de valores en E, es holomorfa en U si es derivable en todo punto de U.

En general, una función derivable en un abierto U de C^n, con valores en E, es holomorfa en U si es diferenciable en todo punto del abierto U.

Funciones analíticas:

Sea n un entero natural no nulo. Una función f de valores en un espacio vectorial normalizado completo E definida en un abierto U del espacio numérico K* (en el que K = R o K = C) es analítica si, para todo punto z_0 de U, f es desarrollable en serie de potencias de $z - z_0$, convergente en un entorno de z_0. Cuando K = C, las funciones analíticas no son más que las funciones holomorfas en U. Cuando K = R son las restricciones en U de las funciones holomorfas en un abierto de C^n que contiene a U.

Sean n y p dos enteros naturales no nulos. Una aplicación de un abierto U de C^p en C^n es analítica si y solamente si todas sus componentes son funciones analíticas en U.

2. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Entre las derivadas parciales de las dos componentes de una función holomorfa existen dos relaciones muy sencillas que se conocen como *Ecuaciones de Cauchy-Riemann* (también se las acostumbra a denominar *Ecuaciones de D'Alembert-Euler*) y que permiten, al combinarlas con el teorema de Grenn en el plano, conseguir una prueba muy simple del Teorema de Cauchy, como luego veremos.

Sea $f(z) = u + iv$ una función holomorfa en un recinto conexo D, contorneado por la curva cerrada Γ rectificable de Jordan.

Se tiene, en definitiva:

$$f : D \to C, \quad f(z) = u + iv, \quad \forall z \in D, \quad z = x + iy$$

siendo la diferencial y la derivada:

$$df(z) = du + i.dv, \quad df(z) = f'(z).dz, \quad f'(z) = u' + i.v', \quad dz = dx + i.dy$$

O sea:

$$df(z) = du + i.dv = (u' + i.v')(dx + i.dy) = (u'.dx - v'.dy) + i.(v'.dx + u'.dy)$$

Y también:

$$df(z) = du + i.dv = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + i.\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)$$

Por lo que identificando estas dos expresiones:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad v' = -\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Se obtienen, por tanto, las relaciones buscadas:

$$\boxed{[1] \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases}}$$

(Ecuaciones de Cauchy-Riemann)

2. **El Teorema de la Integral de Cauchy:**

Veamos en primer lugar el enunciado más sencillo de este Teorema, al que se considera el resultado central de la teoría de las funciones analíticas, junto con la prueba que se obtiene del Teorema de Green y de las Ecuaciones de Cauchy-Riemann:

Si es D un recinto conexo de contorno dado por la curva Γ *rectificable Jordan se cumple que*

$$\oint_{\Gamma} f(z).dz = 0$$

En efecto:

$$f(z) = u + i.v, \quad dz = dx + i.dy, \quad f(z).dz = (u + i.v).(dx + i.dy) = (u.dx - v.dy) + i.(v.dx + u.dy)$$

y si tenemos en cuenta el Teorema de Green en el plano:

$$\int_{\Gamma} P.dx + Q.dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx.dy$$

podemos escribir entonces que

$$\oint_{\Gamma} f(z).dz = \int_{\Gamma} u.dx - v.dy + i.\int_{\Gamma} v.dx + u.dy = \iint_{D} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx.dy + i.\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

y las dos últimas integrales son nulas, por las ecuaciones de Cauchy-Riemann [1]:

$$\iint_{D} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx.dy + i.\iint \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0 + 0 = 0$$

y, en definitiva:

$$\boxed{\oint_{\Gamma} f(z).dz = 0}$$

Extensión:

El teorema de Cauchy puede extenderse al caso de que el recinto plano D sea conexo salvo en un número finito de puntos $\{p_1, p_2, ..., p_k\}$ siempre que se verifique que

$$\lim_{z \to p_j} (z - p_j).f(z) = 0, \quad \forall j \in [1, k] \qquad [2]$$

esto nos permite enunciar el siguiente corolario:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}\,dz = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(a)}{z-a}\,dz = 0$$

en efecto, pues se tiene que

$$\lim_{z \to a} (z-a).\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = 0,$$

y, por consiguiente, se puede aplicar el teorema a la función $\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$, quedando:

$$\boxed{[3] \qquad \oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.dz = 0}$$

Este corolario nos permitirá probar ya la Fórmula de la Integral de Cauchy utilizando para ello la expresión integral que nos da el número de vueltas o índice de un circuito con respecto a un punto *a*, y que explicitamos a continuación.

3. El número de vueltas alrededor de un punto:

Para todo circuito Γ del disco conexo D, y para todo punto a del disco no perteneciente al circuito se verifica que existe un número entero n que llamaremos "índice del punto a con respecto al circuito Γ", o bien, "número de vueltas del circuito Γ con respecto al punto a", cumpliendo que

$$n = \frac{1}{2pi}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}$$

(la proposición es también válida para un recinto conexo salvo en un número finito de puntos en donde se verifica la anterior condición [2] de límite nulo del Teorema de Cauchy).

para un circuito que dé solamente una vuelta al punto a (en sentido positivo, es decir, contrario al de las agujas del reloj), se tendrá:

$$1 = \frac{1}{2pi}\oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}$$

en efecto:

Consideremos el arco rectificable cerrado Γ definido en e intervalo $[t_1, t_2]$, en donde es $\forall t \in [t_1, t_2],\ z(t) \in C$; si llamamos *h(t)* a la expresión de la integral, será:

$$h(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = \oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-a} = \int_{t_1}^{t_2}\frac{z'(t)}{z(t)-a}dt\ ,$$

de donde $h'(t) = \dfrac{z'(t)}{z(t)-a} \rightarrow h(t) = Ln\big(z(t)-a\big)$,

o sea:

$$e^{h(t)} = \big(z(t)-a\big)$$

y siendo en los extremos del intervalo $[t_1, t_2]$, $z(t_1) = z(t_2)$, podemos escribir que

$e^{-h(t_1)}\big(z(t_1)-a\big) = e^{-h(t_2)}\big(z(t_2)-a\big)$, o sea: $e^{h(t_2)-h(t_1)} = 1$. Esto nos indica que si identificamos con la conocida expresión $e^{2pin} = 1,\ n \in Z$, será

$$h(t_2) - h(t_1) = 2pin$$

por lo cual, en definitiva quedaría que:

$$h(t)\Big|_{t_1}^{t_2} = h(t_2) - h(t_1) = \oint_{\Gamma}\frac{dz}{z-a} = 2pin$$

$$\boxed{[4] \qquad n = \frac{1}{2pi}\int_{\Gamma}\frac{dz}{z-a}}$$

4. **La Fórmula:**

Desde la expresión [3] del corolario al teorema de Cauchy se tiene:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)-f(a)}{z-a}.dz = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}.dz - \oint_{\Gamma} \frac{f(a)}{z-a}.dz = 0 \rightarrow \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}.dz - f(a)\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-a} = 0$$

y teniendo en cuenta el resultado [4] del número de vueltas:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a}.dz - f(a).2\pi i n$$

de lo cual:

$$\boxed{f(a) = \frac{1}{2\pi i n} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-a} dz}$$

Que es la fórmula de la Integral de Cauchy para la expresión del valor de una función holomorfa f(z) en un punto a.

5. Bibliografía varia sobre análisis complejo:

Damos a continuación bibliografía diversa recopilada de diferentes fuentes, sobre análisis complejo, con la cual puede ampliarse el estudio de estos interesantes temas.

AHLFORS, L.V. Complex Analysis. Ed. McGraw-Hill, London, 1966.
APOSTOL, J.M. Calculus, tomos I y II (Reverté, 1989).
APOSTOL, T.M. Introducción a la Teoría Analítica de Números. Reverté, Barcelona (1980).
ASH, R.B. Complex variables. Academic Press, New York (1971).
BAK, J. and **NEWMAN, D.J.** Complex Analysis. Springer--Verlag, New York (1982).
BARTLE, R.G. Introducción al Análisis Matemático (Limusa, 1990).
BEARDON, A.F. A Primer on Riemann Surfaces. Cambridge University Press (1984).
BERENSTEIN, C.A. and **GAY, R.** Complex Variables. An introduction. Springer--Verlag, New York (1991).
BOAS, R.P. Entire Functions. Academic Press, New York (1954).
BURCKEL, R.B. An introduction to Classical Complex Analysis. Birkhauser Verlag, Basel (1979).
BURGOS, J. Cálculo Infinitesimal de una variable (MaGraw-Hill, 1995).
BUTUZOV, V.F. y otros. Análisis matemático en preguntas y problemas (Mir, 1984)
CARATHÉODORY, C. Theory of functions of a complex variable. Vol. I-II. Chelsea, New York (1964).
CARTAN, H. Elementary Theory of Analystic Funcions of one or several complex variables. Dover Publications, Inc., New York, 1995.
CARTAN, H. Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas. Selecciones Científicas (1968).
CONWAY, J.B. Functions of one complex variable. Springer-Verlag, New York (1973).
COURANT, R y **JOHN, F.** Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático, tomos I y II (Limusa, 1976 y 1978)
CHURCHILL, Ruel V., **BROWN, James W.** Complex Variables and Applications. 5a. Ed. McGraw-Hill, Inc., 1990.
DEMIDOVICH, B. 5000 problemas de Análisis Matemático (Paraninfo, 1980).
DOLBEAULT, P. Analyse Complexe. Masson, Paris (1990).
DUNCAN, J. Complex Analysis. John Wiley and Sons, New York (1968).
DURÁN, A. Historia, con personajes, de los conceptos del Cálculo. (Alianza, 1996)
ESCANÉ, J. M. Fonctions d'une Variable Complexe. Masson et Cie, Paris (1972).
FEYEL, D. y **PRADELLE, A. DE LA.** Ejercicios sobre las funciones analíticas. Paraninfo, Madrid (1980).
FORSTER, O. Lectures on Riemann Surfaces. Springer-Verlag, New York (1981).
GONZALEZ, Mario O. Classical Complex Analysis. Ed. Marcel Dekker, Inc. 1992.
GRAUERT, H. and K. FRITZSCHE, K. Several Complex Variables. Springer-Verlag, New York (1976)
HAIRER, E. y **WANNER, G.** Analysis by its History (Springer Verlag, 1996)
HENRICI, P. Applied and Computational Complex Analysis. John Wiley and Sons, New York (1986).
HILLE, E. Analytic function theory, Vol. I--II. Chelsea, New York (1966).
HOLLAND, A.S.B. Complex Function Theory. Elsevier North Holland, New York (1980).
HORMANDER, L. An Introduction to Complex Analysis in Several Variables. North Holland, Amsterdam (1973).
ILIN, V y **POZNIAK,E.** Fundamentos del Análisis Matemático, 3 tomos (Mir, 1991).

KAPLAN, W. Introduction to analytic functions. Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1966).
KNOOP, K. Theory and Applications of Infinite Series Dover, 1990
KUDRIÁTSEV, L.D. Curso de Análisis Matemático, tomos I y II (Mir, 1984).
KUDRIÁTSEV, L.D.; **KUTÁSOV, A.D.**; **CHEJLOV, V.I.** y **SHABUNIN, M.I.** Problemas de Análisis Matemático Vol I y II. (Mir-Rubiños, 1992).
KRZYZ, J.G. Problems in Complex Variable Theory. Elsevier, New York (1971).
LANG, S. Introducción al Análisis Matemático (Addison-Wesley, 1990)
LANG, S. Complex Analysis. Addison Wesley, Reading, Massachusetts (1977).
LIASHKÓ, I.I.; BOIARCHUK, A.K. ; GAI, I.G. y **GOLOVACH, G.P.** Matemática Superiores. Problemas Resuetos (Anti-Demidovich) Vol II (Cálculo Integral para funciones de una variable) III. (Series y Cálculo diferencial para funciones de varias variables) (Editorial URSS, 1999).
LINES, E. Análisis Matemático IV. U.N.E.D., Madrid (1976).
MARKUSHEVICH, A.I. Theory of Functions of a Complex Variable, Vol. I--II--III. Prentice--Hall, New York (1965--67).
MARSDEN, J.E. Basic complex Analysis. Freeman, San Francisco (1973).
NACHBIN, L. Holomorphic Functions, Domains of Holomorphy and Local Properties. North Holland, Amsterdam (1970).
POLYA, G. y **SZEGÖ, G.** Problems and theorems in Analysis, tomos I y II (Springer-Verlag, 1976)
RUDIN, W. Análisis real y complejo. Alhambra, Madrid (1979).
RUDIN, W. Principios de Análisis Matemático (McGraw-Hill, 1987).
SAKS, S. and **ZYGMUND, A.** Analytic Functions. Elsevier, Amsterdam (1971).
SANSONE, G. and **GERRETSEN, J.** Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable. Vol. I--II. Wolters Noordhoff, Groningen (1960--69).
SEGAL, S.L. Nine Introductions in Complex Analysis. North Holland, Amsterdam (1981).
SPIVAK, M. Calculus (Reverté, 1987).
VEECH, W.A. A second course in complex analysis. Benjamin, New York (1967).
VOLKOVYSKI, L.; G. LUNTS, G. y **I. ARAMANOVICH**, Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja. Mir, Moscú (1972).

Carlos S. Chinea
Mayo, 2003
casanchi@teleline.es