Sobre la caracterización de las aplicaciones entre conjuntos

0. Aplicaciones

0.0. Introducción:

Vamos a estudiar aquí, someramente, la idea de aplicación entre conjuntos y cómo caracterizar los diferentes tipos de aplicaciones, partiendo para ello de la idea de correspondencia entre conjuntos y de sus propiedades inmediatas (la composición de correspondencias es también una correspondencia, es asociativa, etc.).

Partamos, pues, repasando la noción de correspondencia entre conjuntos para definir, a partir de ella la idea de aplicación.

Una correspondencia f de A en B queda definida por su grafo F, que es el subconjunto del producto cartesiano de AXB, cuyos pares están formados por cada elemento x de A que tiene imagen f(x) y por la imagen f(x):

$$F = \left\{(x_i, f(x_i), (x_k, f(x_k), ...\right\}$$
$$F \subseteq AxB$$

Así, pues, la correspondencia f entre dos conjuntos puede expresarse por su grafo, F, por el conjunto inicial A y por el conjunto final B. La podemos representar por

$$f = (F; A, B)$$

y si llamamos pr_1F al conjunto de las primeras componentes de los pares que son elementos del grafo, y pr_2F a las segundas componentes, se tiene que

$$pr_1F \subseteq A,\ pr_2F \subseteq B$$

Una correspondencia se dice unívoca si ningún elemento de A tiene más de una imagen en B:

$$f = (F; A, B) \text{ unívoca} \leftrightarrow \forall x \in pr_1F, (x, y) = (x, y') \rightarrow y = y'$$

0.1. Aplicación:

La correspondencia se dirá que es una aplicación de A en B si es unívoca y si $A = pr_1F$ (a elementos del conjunto inicial A le corresponde uno y solo un elemento del conjunto final B, y todos los elementos del conjunto inicial A constituyen la primera componente del grafo F: todos tienen imagen en B).

En definitiva, si $f = (F; A, B)$ es aplicación cumple:

- Es unívoca

- $pr_1 F = A$

0.2. Prolongación de aplicaciones:
Sigue el mismo criterio que la prolongación de correspondencias:
Sean las aplicaciones $f=(F;A,B), g=(G;C,D)$ tales que $F\subseteq G$. Se tiene que $A=pr_1F\subseteq pr_1G=C$ y g coincide con f en A.
Si además $B\subseteq D$, entonces diremos que g es una prolongación de f en C, o bien, que f es una restricción de g al subconjunto A. Representaremos esto por $f=g/A$.

0.3. Composición:
La composición de aplicaciones sigue, obviamente, el mismo criterio que la composición de correspondencias. Veamos que la composición de dos aplicaciones es también una aplicación:

Sean las aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $g=(G;B,C)$. Veamos que la correspondencia $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ es una aplicación:
- $g\circ f$ es unívoca, ya que $\forall (x,y),(x,y')\in G\circ F\rightarrow y=y'$:
$(x,y)\in G\circ F\rightarrow \exists z\in B/(x,z)\in F\wedge (z,y)\in G$
$(x,y')\in G\circ F\rightarrow \exists z'\in B/(x,z')\in F\wedge (z',y)\in G$
Por ser f unívoca: $(x,z)=(x,z')\rightarrow z=z'$
Por ser g unívoca: $(z,y)=(z,y')\rightarrow y=y'$
Luego $\forall (x,y),(x,y')\in G\circ F\rightarrow y=y'$. $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ es unívoca.
- $A=pr_1(G\circ F)$, pues $pr_1(G\circ F)=f^{-1}\left[pr_1(G)\right]=f^{-1}(B)=A$.

La composición de aplicaciones, al tratarse de una composición de correspondencias, tiene la propiedad asociativa:

$$f=(F;A,B),\quad g=(G;B,C),\quad h=(H;B,C)\rightarrow h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$$

0.4. Aplicaciones suprayectivas:
La aplicación $f=(F;A,B)$ es suprayectiva si todo elemento de B es imagen de uno o más elementos de A:

$$f \text{ suprayectiva} \leftrightarrow \forall y\in B,\exists x\in A/f(x)=y$$

Teorema 04.1: Si dos aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $g=(G;B,C)$ son suprayectivas, su composición $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ también lo es.
Demostración:
$g=(G;B,C)$ suprayectiva $\rightarrow imag(g)=g(B)=C$
$f=(F;A,B)$ suprayectiva $\rightarrow imag(f)=f(A)=B$
por tanto:
$imag(g\circ f)=(g\circ f)(A)=g\left[f(A)\right]=g(B)=C\rightarrow (g\circ f)(A)=C\rightarrow g\circ f$ suprayectiva

0.5. Aplicaciones inyectivas:
La aplicación $f=(F;A,B)$ es inyectiva si ningún elemento de B es imagen de más de un elemento de A:

$$f \text{ inyectiva} \leftrightarrow (x,y)=(x',y)\in F \to x=x',\ \forall y\in B$$

Teorema 05.1: Si dos aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $g=(G;B,C)$ son inyectivas, su composición $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ también lo es.
Demostración:
$(x,y)\in G\circ F \to \exists z\in B/(x,z)\in F \wedge (z,y)\in G$
$(x',y)\in G\circ F \to \exists z'\in B/(x',z')\in F \wedge (z',y)\in G$

Por ser g inyectiva: $(z,y)=(z',y)\to z=z'$
Por ser f inyectiva: $(x,z)=(x',z)\to x=x'$
O sea:
$$(x,y)=(x',y)\in G\circ F \to x=x',\ \forall y\in C \to g\circ f \text{ inyectiva}$$

0.6. Aplicaciones biyectivas:
Una aplicación $f=(F;A,B)$ es biyectiva si es suprayectiva e inyectiva:

$$f\ biyectiva \leftrightarrow \begin{cases} \forall y\in B, \exists x\in A / f(x)=y \\ (x,y)=(x',y)\in F \to x=x',\ \forall y\in B \end{cases}$$

Teorema 06.1: Si dos aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $g=(G;B,C)$ son biyectivas, su composición $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ también lo es.
Demostración:
Por los dos teoremas anteriores, para aplicaciones suprayectivas e inyectivas, se verifica el teorema también para aplicaciones biyectivas, ya que estas aplicaciones son, por definición suprayectivas e inyectivas.

0.7. Otras propiedades:
Teorema07.1:
Sean las aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $g=(G;B,C)$. Si $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ es inyectiva, entonces también f lo es.
Demostración:
Si f no fuera inyectiva $\to \exists x,x'\in A, \exists y\in B / x\neq x' \wedge (x,y)\in F \wedge (x',y)\in F$
Y como g es aplicación $\to \exists z\in C/(y,z)\in G$
por lo que $(x',z)\in G\circ F \wedge (x',z)\in G\circ F \wedge x\neq x' \to g\circ f$ no sería inyectiva

Teorema 07.2:
Sean las aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $g=(G;B,C)$. Si $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ es suprayectiva, entonces g también lo es.
Demostración:

Si g no fuera suprayectiva $\rightarrow imag(g) = g(B) \neq C$
Luego, $imag(g \circ f) = (g \circ f)(A) = g\left[f(A)\right] \neq C \rightarrow g \circ f$ no sería suprayectiva
(y esta situación ocurriría siempre, aún cuando fuera $f(A) = B$)

Teorema 07.3:
Toda aplicación $f = \left(F; A, B\right)$ induce en A una partición o clasificación, y por tanto define en A una relación de equivalencia.
Demostración:
Basta definir en A una relación R por la condición: $\forall x, y \in A, xRy \leftrightarrow f(x) = f(y)$
R es reflexiva: $\forall x \in A, xRx \leftrightarrow f(x) = f(x)$
R es simétrica: $\forall x, y \in A, xRy \rightarrow f(x) = f(y) \rightarrow f(y) = f(x) \rightarrow yRx$
R es transitiva: $\forall x, y, z \in A, xRy \rightarrow \begin{cases} xRy \rightarrow f(x) = f(y) \\ yRz \rightarrow f(y) = f(z) \end{cases} \rightarrow f(x) = f(z) \rightarrow xRz$
Llamaremos A/R al conjunto cociente de A por esta relación de equivalencia.

Teorema 07.4:
Dada una aplicación cualquiera $f = \left(F; A, B\right)$, existen dos aplicaciones $i_A = \left(I_A; A, A\right)$ y $i_B = \left(I_B; B, B\right)$ tales que $f \circ i_A = f$ y $i_B \circ f = f$.
Demostración:
Es obvio, pues los grafos son $I_A = \left\{(x, x) / x \in A\right\}$, $I_B = \left\{(y, y) / y \in B\right\}$, es decir:
$\forall x \in A, i_A(x) = x, \quad \forall y \in B, i_B(y) = y$

En la parte que sigue vamos a obtener alguna condición necesaria y suficiente para que una aplicación sea inyectiva, suprayectiva o biyectiva. Es lo que podemos llamar *teoremas de caracterización de las aplicaciones*.

1. Teoremas de caracterización

1.0. Un teorema de existencia:

Dadas las aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $h=(H;A,C)$, se cumple que son equivalentes las afirmaciones siguientes:

a) Existe una aplicación $g=(G;B,C)$ tal que $h=g\circ f$.

b) $\forall x,x'\in A,\ f(x)=f(x')\rightarrow h(x)=h(x')$

Demostración:

Veamos que a) $\rightarrow$ b):

Si $f(x)=f(x')\wedge\exists g=(G;B,C)/h=g\circ f\rightarrow$

$\rightarrow h(x)=(g\circ f)(x)=g[f(x)]=g[f(x')]=(g\circ f)(x')=h(x')$

Veamos que b) $\rightarrow$ a):

Estudiemos primero el caso de que $f(A)=B$ y después veremos el caso general de que $f(A)\subseteq B$.

- Si $f(A)=B$, podemos definir $G=\{(y,z)/(\exists x)((x,y)\in F\wedge(y,z)\in H)\}$, y probemos que $g=(G;B,C)$ es aplicación, esto es que
  $\forall y\in B,\exists z\in C/g(y)=z\wedge z$ único.
  Basta que $\forall y\in B$ elijamos $x\in A/(x,y)\in F$, y sea $z=h(x)$, o sea tal que $(x,z)\in H$, lo que implica que $\forall y\in B,\exists z\in C/(y,z)\in G$.
  Además, z es único, pues si existiera otro $z'\in C$ tal que $(y,z')\in G$ se tendría que habría un $x'\in A/f(x)=y=f(x')\wedge z=h(x),z'=h(x')$, pero por la hipótesis de que $\forall x,x'\in A,\ f(x)=f(x')\rightarrow h(x)=h(x')$ se tiene que $z=z'$.
  Finalmente, como por construcción es $G\circ F=H$ se tiene que $g\circ f=h$.
- Veamos ahora el caso general: $f(A)\subseteq B$.
  Se tendrá que $f(A)=B'\subseteq B$. Si consideramos la aplicación $f'=(F';A,B')$ tal que $\forall a\in A,f'(a)=f(a)$ y sustituimos A, B, C, f, h por A, B', C, f', h estamos en la hipótesis del apartado anterior, con $f'(A)=B'$:
  $\exists g'=(G';B',C)/g'\circ f'=h$, por lo que, si prolongamos g' en la aplicación $g=(G;B,C)$, se tiene que $\forall a\in A,h(a)=g'[f'(a)]=g'[f(a)]$ y $h=g\circ f$.

1.1. Teorema de caracterización de aplicaciones inyectivas:

Dada la aplicación $f=(F;A,B)$, son equivalentes las condiciones siguientes:

a) f es inyectiva.

b) Existe una aplicación $g=(G;B,A)$ tal que $g\circ f=i_A$.

Demostración:

Si f es inyectiva, entonces $f(x)=f(x')\rightarrow x=x'=i_A(x)=i_A(x')$, por lo que considerando que si hacemos A=C y $h=i_A$ en el teorema de existencia anterior, las aplicaciones $f=(F;A,B),i_A=(I_A;A,A)$, se tiene que en virtud de dicho teorema, es condición necesaria y suficiente para que exista una aplicación $g=(G;B,A)/g\circ f=i_A$.

1.2. Teorema de caracterización de aplicaciones suprayectivas:

Dada la aplicación $f = (F; A, B)$, son equivalentes las condiciones siguientes:

a) f es suprayectiva.

b) Existe una aplicación $h = (H; B, A)$ tal que $f \circ h = i_B$.

Demostración:

-Veamos que b) $\rightarrow$ a):

$\forall b \in B, (f \circ h)(b) = f(h(b)) = i_B(b) = b \rightarrow \ \exists a \in A / a = h(b) \rightarrow f(h(b)) = f(a) = b$

o sea:

$\forall b \in B, \exists a \in A / (a,b) \in F \rightarrow f$ suprayectiva

-Veamos que a) $\rightarrow$ b):

$\forall b \in B$, sea $F_b = \{a \in A / (a,b) \in F\}$ el conjunto de elementos de A que tienen por imagen a b. Como f es suprayectiva, tal conjunto es no vacío.

Por el axioma de elección, podemos elegir un elemento de F_b, que representamos por $h(b)$ de forma que queda definida una aplicación $h = (H; B, A)$ con $H = (b, h(b))$ y es tal que $f(h(b)) = b = i_B(b), \forall b \in B$.

1.3. Teorema de caracterización de aplicaciones biyectivas:

Dada la aplicación $f = (F; A, B)$, son equivalentes las condiciones siguientes:

a) f es biyectiva.

b) Existe dos aplicaciones $g = (G; B, A)$ y $h = (H; B, A)$ tales que $g \circ f = i_A$ y $f \circ h = i_B$.

Demostración:

Que a) es equivalente a b) es inmediato, desde los anteriores teorema 1.1 y 1.2. Sin embargo, interesa comprobar que es única la función g y que también es única la función h, y además, que $g = h$.

Por la asociatividad de la composición de aplicaciones, es $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h)$, y siendo $g \circ f = i_A$, $f \circ h = i_B$, se tiene: $(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \rightarrow i_A \circ h = g \circ i_B \rightarrow h = g$.

Esta igualdad permite definir, para las aplicaciones biyectivas, la idea de aplicación inversa o recíproca.

1.4. Aplicación recíproca:

La aplicación $g = h$ se del teorema anterior se denomina aplicación recíproca o inversa de f y se designa por f^{-1}.

Teorema 14.1: Sean las aplicaciones biyectivas $f = (F; A, B)$ y $g = (G; B, C)$. Se verifica que

a) $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

b) $(f^{-1})^{-1} = f$

Demostración:

a) Por la propiedad asociativa de la composición de aplicaciones y la definición de aplicación recíproca:

$$\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)\left(g \circ f\right) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ i_B \circ f = f^{-1} \circ f = i_A$$

luego:

$$f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$$

b) Se tiene que

$$f^{-1} \circ f = i_A \wedge f \circ f^{-1} = i_B \rightarrow f = \left(f^{-1}\right)^{-1}$$

2. Factorización canónica de una aplicación

Sea A un conjunto dotado de una relación de equivalencia R. Si es A/R el conjunto cociente de A por dicha relación de equivalencia, se llama aplicación canónica a la aplicación definida por $n = (N; A, A/R)$, esto es, a la aplicación que le hace corresponder a cada elemento a del conjunto A la clase de equivalencia $[a]$ a la que pertenece

$$\forall a \in A, n(a) = [a] \in A/R$$

Como es obvio que para todo elemento de A existe una clase de equivalencia a la que pertenece, la aplicación canónica así definida es suprayectiva.

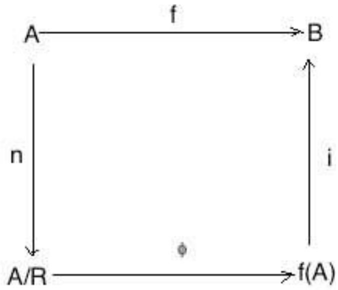
Por el teorema 07.3 siempre es posible definir una relación de equivalencia R en el conjunto A, asociada a cualquier aplicación $f = (F; A, B)$.

Teorema 21.1: Sea la aplicación $f = (F; A, B)$ y sea R la relación de equivalencia asociada a f, es decir, definida por $xRy \leftrightarrow f(x) = f(y)$.
Sea también la aplicación canónica $n = (N; A, A/R)$ correspondiente a dicha relación de equivalencia.
Se verifica que:

a) $\phi = (G; A/R, f(A))$ con $G = \{([x], f(x)) / x \in A\}$ es una aplicación biyectiva.

b) $i = (I; f(A), B)$ con $I = \{(f(x), f(x)) / x \in A\}$ es una aplicación inyectiva.

c) $f = i \circ \phi \circ n$



Demostración:

a) $\phi = (G; A/R, f(A))$ es aplicación biyectiva, pues

Es unívoca: $\forall [x],[y] \in A/R / [x]=[y] \to xRy \to f(x)=f(y)$,

o sea, si $[x]=[y] \to \phi([x]) = \phi([y])$

Es inyectiva: $\forall f(x), f(y) \in f(A) / f(x) = f(y) \to xRy \to [x]=[y]$,

O sea, si $\phi([x]) = \phi([y]) \to [x]=[y]$

Es suprayectiva: $\forall f(x) \in f(A), \exists x \in A / [x] \in A/R \wedge \phi([x]) = f(x)$

b) $i = (I; f(A), B)$ es aplicación inyectiva, pues

trivialmente, $\forall f(x) \in f(A), i[f(x)] = f(x) \subseteq B$.

c) $\forall x \in A, (i \circ \phi \circ n)(x) = (i \circ \phi)[n(x)] = (i \circ \phi)[x] = i[\phi[x]] = i[f(x)] = f(x)$

Notas:

- Si f fuera homomorfismo, $A/R \equiv \ker f$.
- Si f fuera suprayectiva, entonces $f(A) = B$, y la factorización canónica se simplifica:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "n"'] & & B \\ & A/R \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

3. Bibliografía

ABELLANAS C., P.; Elementos de Matemáticas, Editorial Romo, Madrid, 1968
BIRKOFF, G.-MCLANE, S.; Álgebra moderna, Edit. Vicens-Vives, Madrid, 1970
ETAYO, J. J.; Conceptos y métodos de la Matemática Moderna, Edit Vicens-Vives, Madrid, 1973
GODEMENT, R.; Algebra, Edit Tecnos, Madrid, 1983
HALMOS, P.R.; Teoría intuitiva de conjuntos, Edit CECSA, México, 1973
LENTIN, A.-RIVAUD, J.; Algebra Moderna, Edit Aguilar, Madrid, 1973
LORENZO, J. de; Iniciación a la teoría de conjuntos, Tecnos, Madrid, 1973
QUEYSANNE, M.; Algebra Básica, Vicens-Vives, Madrid, 1990
SZE-TSEN-HU; Elements of Modern Algebra, Holden Day, N. York, 1965
VAN DER WARDEN, B.L.; Modern algebra, Springer, Berlín, 2003
ZARIZKY, O.-SAMUEL, P.; Conmutative Algebra, Van Nostrand, N. York, 1975