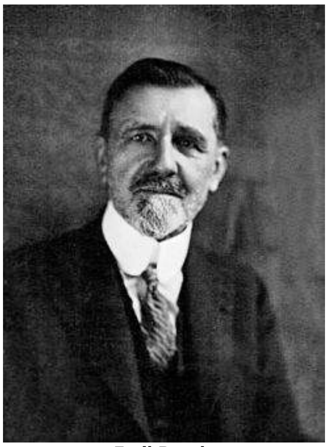
Acerca de los conjuntos de Borel y la medida de Lebesgue

00. Introducción

El trabajo matemático de Emil Borel (1871-1956) se puede dividir en los siguientes temas: Aritmética, Series numéricas, Teoría de conjuntos, Medida de Conjuntos, Estudio de conjuntos de medida nula, Funciones reales de variable real, Funciones complejas de variable compleja, Ecuaciones diferenciales, Geometría, Cálculo de probabilidades, y Física Matemática. Borel creó la primera teoría efectiva de la medida de los conjuntos de puntos. Este trabajo, junto al de los matemáticos franceses René Baire (1874-1932) y Henri Lebesgue (1875-1941), marcaría el comienzo de la moderna teoría de funciones de una variable real. Borel, aunque no fué el primero en definir la suma de una serie divergente, si fue el primero en desarrollar una teoría sistemática de las series divergentes en sus trabajos de 1899, interesándose a partir de 1905 en la teoría de la probabilidad.


Emil Borel


René Baire


Henri Lebesgue

01. Clase aditiva de conjuntos. La clase de los conjuntos de Borel

Definición de clase aditiva:

Consideremos una clase θ de conjuntos de un espacio ε. Se dice que θ es *clase aditiva* si y solo si verifica que:

a) $\varepsilon \in \theta$.

b) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \in \theta \rightarrow \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2 \cup \ldots \in \theta$.

c) $\alpha \in \theta \rightarrow \alpha' = \theta - \alpha \in \theta$.

Trivialmente, si θ_k, θ_j son clases aditivas del espacio ε, entonces también su intersección, $\theta_k \cap \theta_j$, es clase aditiva de ε.

Teorema 1: (Existencia de la mínima clase aditiva)

Podemos afirmar que para toda familia ω de subconjuntos del espacio ε, existe siempre una clase aditiva mínima que la contiene.

Es decir, existe una clase aditiva θ_ω de subconjuntos de ε que verifica:

a) $\omega \subset \theta_\omega$

b) θ_ω es clase aditiva.

c) θ_ω es la mínima clase aditiva que contiene a ω.

En efecto:
Consideremos la familia de las clases aditivas del espacio ε que contienen a ω:

$$\Theta = \{\theta_i / \omega \subset \theta_i \wedge \theta_i \text{ clase aditiva de } \varepsilon\}$$

Es obvio que $\Theta \neq \phi$ (pues al menos el conjunto $p(\varepsilon)$ de las partes de ε pertenece a la familia Θ), y

$$\theta_\omega = \bigcap_{\theta_i \in \Theta} \theta_i$$

es clase aditiva tal que $\omega \subset \theta_\omega$. Además, es inmediato que se trata de la mínima clase aditiva que contiene a ω.

Así, pues, toda familia ω de subconjuntos de un espacio dado engendra una clase aditiva mínima que contiene a ω.

La clase de los conjuntos de Borel:
Consideremos que ω es el conjunto de los intervalos (abiertos, cerrados y semiabiertos) de R. La clase θ_ω engendrada por ω se denomina *clase de los conjuntos de Borel de* R, y se acostumbra a representar por B.

02. La medida de Lebesgue

Consideremos un conjunto ε y una familia φ de subconjuntos de ε. *Una medida definida en la familia* φ es una aplicación

$$L : \varphi \to R$$

tal que se verifica:

a) $\forall x \in \varphi, L(x) \geq 0$.

b) Dado $z = x_1 \cup x_2 \cup ... / x_i \in \varphi, i = 1,2,...$ Si $x_1 \cap x_j \neq \phi$ para $i \neq j$, entonces es

$$L(z) = L(x_1) + L(x_2) + ...$$

Veamos a continuación la manera de definir en la clase aditiva de los conjuntos de Borel una medida.

Teorema 2:
Si $i = (a,b)$ es un intervalo en R, entonces $L(i) = b - a$ es una medida en la clase I de los intervalos de R.
Demostración:

a) Trivialmente, $L(a_k) = b_k - a_k \geq 0, \forall k \in Z$.

b) Para una sucesión de intervalos disjuntos $\{i_k\} = \{(a_k, b_k)\}$, se cumple que es $L(Ui_k) = \sum i_k$

En definitiva, L (longitud del intervalo) es una medida en la familia I de todos los intervalos de R.

Teorema 3:
Sea F_r la familia de los conjuntos de R que pueden expresarse como reunión de una sucesión numerable de intervalos de R.
Es claro que $I \subset F_r$. Se definimos sobre F_r una aplicación $L_r : F_r \to R$ de forma que L_r aplicada a un elemento F de F_r que también pertenezca a I coincida con la medida L definida anteriormente en I, entonces se cumple que L_r es también una medida en F_r.
Demostración:

$\forall i \in F_r, i = i_1 \cup i_2 \cup ... \cup i_n$, con $i_j \cap i_k = \phi$ si $i \neq j$, por lo que

$L(i) = L(i_1) + L(i_2) + ... + L(i_n)$ y $L(i) \geq 0$

Definición
Sea un espacio formado por un intervalo (a,b) de R y consideremos un conjunto $S \subset (a,b)$. Sea asimismo un elemento i de la clase F_r tal que se verifique que $S \subset i \subset (a,b)$, lo cual puede hacerse siempre pues, al menos, se podría tomar $i = (a,b)$. En estas condiciones, definimos:
-Medida exterior, $L_e(S)$, del conjunto S, es el extremo inferior o ínfimo del conjunto de números reales dado por $\{L(i) / S \subset i \subset (a,b)\}$. O sea:

$$L_e(S) = \inf \{L(i) / S \subset i \subset (a,b)\}$$

-Medida interior, $L_i(S)$, del conjunto S, es la diferencia entre la medida del intervalo (a,b) y la medida exterior del complementario S' de S en (a,b):

$$L_i(S) = b - a - L_e(S')$$

Un conjunto S acotado se dice que es medible Lebesgue, o, simplemente, que es medible, si y solo si, sus medidas exterior e interior coinciden. Tal valor se denomina *medida de Lebesgue*, o, simplemente, *medida*, del conjunto S.

$$S \text{ medible Lebesgue} \leftrightarrow L_e(S) = L_i(S) = L(S)$$

(El valor $L(S)$ es la *medida*, o *medida Lebesgue,* de S)

Un conjunto no acotado S se dice que es medible si y solo si la intersección $i_x \cap S$ es medible para todo valor de $x > 0$, siendo $i_x = [-x, x]$. Esto quiere decir que la *medida* o *medida de Lebesgue* del conjunto S se define mediante el límite

$$L(S) = \lim_{x \to \infty} (i_x \cap S)$$

Se llama *clase de los conjuntos medibles Lebesgue*, o, simplemente, *clase de los conjuntos medibles*, a la clase *L* formada por todos los conjuntos, acotados o no, que admiten la medida de Lebesgue. Una medida de estas características es, además, única.

La clase *L* de los conjuntos medibles resulta ser más amplia que la clase *B* de los conjuntos de Borel.

03. Las funciones de conjunto no negativas y aditivas

La noción de medida de Lebesgue puede generalizarse definiéndola como una función de conjunto sobre la clase *B* de los conjuntos de Borel.

Una *función de conjunto no negativa y aditiva* es una función de conjunto *P(S)*, definida sobre *B*, que satisface las siguientes condiciones:

1) $P(S) \geq 0, \forall S \in B$
2) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(S_i),\ si\ \ S_j \cap S_k = \phi\ para\ j \neq k$
3) Si S es acotado $\rightarrow P(S)$ es finita.

A toda función de conjunto *P(S)* se le puede hacer corresponder una función de puntos, $F(x;k)$, con *k* constante, definiéndola de la forma siguiente:

$$f(x;k) = \begin{cases} P(k < \xi \leq x) & para\ x > k \\ 0 & para\ x = k \\ -P(x < \xi \leq k) & para\ x < k \end{cases}$$

Teorema 4:

1) Si $k_1 < k_2$, entonces es

$$f(x;k_1) - f(x;k_2) = P(k_1 < \xi \leq k_2)$$

2) Para un valor fijo k_0 y llamando $f(x)$ a $f(x;k_0)$, se verifica que

$$f(x;k) = f(x) + const, \forall k \in R$$

3) Para cualquier medida P queda definida una función de puntos, $f(x)$, determinada salvo una constante, no creciente y finita para todo valor finito de *x*, de modo que la relación

$$f(b) - f(a) = P(a < \xi \leq b)$$

Se verifica para cualquier intervalo *(a,b)* finito.

Demostración:

1) Si es $x > k_2 > k_1$:

$f(x;k_1) = P(k_1 < \xi \leq x)$ y $f(x;k_2) = P(k_2 < \xi \leq x)$, por lo que:

$f(x;k_1) - f(x;k_2) = P(k_1 < \xi \leq x) - P(k_2 < \xi \leq x) = P\left[(k_1 < \xi \leq x) - (k_2 < \xi \leq x)\right] = P(k_1 < \xi \leq k_2)$

Si es $k_2 > x > k_1$:

$f(x;k_1) = P(k_1 < \xi \leq x)$ y $f(x;k_2) = -P(x < \xi \leq k_2)$, por lo que:

$f(x;k_1) - f(x;k_2) = P(k_1 < \xi \leq x) + P(x < \xi \leq k_2) = P\left[(k_1 < \xi \leq x) + (x < \xi \leq k_2)\right] = P(k_1 < \xi \leq k_2)$

Si es $k_2 > k_1 > x$:

$f(x;k_1) = -P(x < \xi \leq k_1)$ y $f(x;k_2) = -P(x < \xi \leq k_2)$, por lo que:

$$f(x;k_1)-f(x;k_2)=-P(x<\xi\le k_1)+P(x<\xi\le k_2)=P\left[\left(x<\xi\le k_2\right)-\left(x<\xi\le k_1\right)\right]=P(k_1<\xi\le k_2)$$

2) Si es $k<k_0$:

$$f(x;k)-f(x;k_0)=P(k<\xi\le k_0)=const\to f(x,k)=f(x)+const$$

Si es $k_0<k$:

$$f(x;k_0)-f(x;k)=P(k_0<\xi\le k)=const\to f(x,k)=f(x)+const$$

3) Sea k_0 fijo:

Si $x>k_0$ será $f(x;k_0)=P(k_0<\xi\le x)$ o bien $f(x)=P(k_0<\xi\le x)$

$x=a\to f(a)=P(k_0<\xi\le a),\ x=b\to f(b)=P(k_0<\xi\le b)$

por tanto: $f(b)-f(a)=P(k_0<\xi\le b)-P(k_0<\xi\le a)=P(a<\xi\le b)$

Si $k_0>x$ será $f(x;k_0)=-P(x<\xi\le k_0)$ o bien $f(x)=-P(x<\xi\le k_0)$

$x=a\to f(a)=-P(a<\xi\le k_0),\ x=b\to f(b)=-P(b<\xi\le k_0)$

por tanto: $f(b)-f(a)=-P(b<\xi\le k_0)+P(a<\xi\le k_0)=P(a<\xi\le b)$

04.Bibliografía

CRAMER, H.: Métodos matemáticos de Estadística. Aguilar, 1963
DIEUDONNE, J.: Elementos de Análisis. Reverté, 1980
RUDIN, W.: Principles of Mathematical Analysis. Mc Graw Hill, 1976
PUIG ADAM, P.: Cálculo Integral. Biblioteca Matemática, 1970
VALLEE POUSSIN, CH. J. DE LA: Cours d'Analyse Infinitesimale. Tomo II, 2006
WILLIANSON, J. H.: Lebesgue Integration. Dover Publications, 2014