

Sobre axiomas y geometría

El origen de los axiomas:

En la antigüedad, y en las zonas de China, del sur de Asia y Oriente medio, las necesidades de la agrimensura, de la arquitectura, de la Astronomía, etc., obligaban a medir y controlar distancias entre puntos, abertura de ángulos, superficies y volúmenes mediante la elaboración de principios o formas básicas de cálculo.

La elaboración de estos principios básicos se hacía, en definitiva, de forma empírica, esto es, de acuerdo con las necesidades experimentales que se iban presentando a lo largo de los procesos de actividad en la agricultura, la industria y el estudio de la naturaleza.

Los textos más antiguos de los que hoy se disponen hablan de la medida de un ángulo en un terreno, de la superficie de una zona concreta, etcétera, estableciendo normas o pautas para realizar el cálculo, pero, realmente, no aparece un intento de formulación abstracta que permita establecer reglas para todo tipo de superficies, distancias o ángulos.

Fue con el transcurrir del tiempo cuando se llegó a comprender la necesidad de establecer pautas, reglas o fórmulas abstractas generales que permitieran luego hacer el cálculo de los elementos arquitectónicos, de agrimensura, astronómicos, etc., de manera concreta, aplicando tales fórmulas generales. Empezó esto cuando se comenzó atisbar que las reglas para medir el ángulo que formaban dos caminos habrían de ser las mismas que permitieran medir un ángulo entre dos paredes verticales, por ejemplo, o que la superficie de un terreno y la superficie de una alfombra se habría de calcular siguiendo igual fórmula o regla.

Este sistema de conocimientos para el cálculo de distancias, ángulos, superficies y volúmenes constituyó el primer cuerpo de lo que se empezó a denominar geometría. Eran proposiciones basadas en la realidad material concreta, en el proceso empírico del quehacer diario. Sin ninguna otra base lógica o de raciocinio.

En una etapa posterior, sin embargo, se descubre que manipulando lógicamente, racionalmente, las normas o fórmulas empíricas básicas se obtienen otras como consecuencias de ellas, esto es, derivables de ellas por raciocinio. Con esto se empezó a diferenciar las proposiciones o normas en dos tipos: aquellas que se fundamentaban en la experiencia práctica, que se llamarían Axiomas, y aquellas otras que se deducían desde las anteriores por simple actuación lógica, y que se habrían de denominar Teoremas.

En esta situación ya se consideraba que los Axiomas serían más difíciles de establecer que los Teoremas, puesto que necesitarían de la autoevidencia práctica, del asentamiento empírico. Mientras que la obtención de los teoremas solo requeriría el aplicar la razón sobre los axiomas y sobre aquellos teoremas ya anteriormente obtenidos de esta forma. Es por esto que siempre se procuró minimizar el número de los axiomas de la geometría, trasladándose el trabajo fundamental a los procesos de obtención de las fórmulas derivadas de ellos, a la obtención de los teoremas.

La Geometría, en definitiva, se desarrolló desde un estado empírico hacia un estado de ciencia deductiva sobre un conjunto básico de proposiciones axiomáticas. Es, actualmente, una ciencia deductiva axiomática. Se podría, en definitiva, realizar

una exposición de los principios básicos o axiomas y de los teoremas que en un determinado momento se hubieran deducido desde tales axiomas.

Bastaba la autoevidencia del sistema de los axiomas para afirmar su indecibilidad, su consistencia y no contradictoriedad, o sea, se daba por sentado que:

1. *No sería ningún axioma deducible de los demás* (carácter indecible)
2. *No se obtendrían teoremas contradictorios desde el bloque de los axiomas* (consistencia interna)
3. *La afirmación de un axioma no contradice lo afirmado por ninguno de los restantes axiomas* (no contradictoriedad).

La exposición de Euclides

La primera exposición que conocemos es la de Euclides, 300 años antes de Jesucristo.

Euclides desarrolla la geometría de su tiempo en los trece libros que constituyen sus *Elementos*, en donde establece un conjunto de cinco proposiciones básicas o axiomas y un cuerpo de teoremas, proposiciones derivadas de los cinco axiomas.

Los cinco axiomas que postuló Euclides fueron éstos:

- "I. Trazar una línea desde un punto cualquiera a otro punto cualquiera.
(Por dos puntos pasa una única línea recta)
- "II. Prolongar de manera ilimitada en línea recta una recta ilimitada."
(Una recta cualquiera se puede prolongar indefinidamente)
- "III. Describir un círculo para cada centro y cada radio."
(Por cada punto, y para cada longitud existe un círculo de centro el punto y de radio la longitud)
- "IV. Todos los ángulos rectos son iguales."
(Todo ángulo recto mide lo mismo, 90 grados)
- "V. Si una recta, al incidir sobre otras dos, forma del mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas al infinito se encontrarán en el lado en que estén los ángulos menores que dos rectos."
(Si una recta corta a otras dos y forma ángulos distintos del mismo lado con ambas, las dos rectas se cortarán).

Pero, como se observa, aunque las cuatro primeras proposiciones axiomáticas de Euclides parecen evidentes, no parece tan sencillo el quinto enunciado (históricamente llamado *Axioma de las paralelas*). Ya desde los mismos tiempos de Euclides se dudó de la autoevidencia del *Axioma de las paralelas*. Se dudaba, realmente, de su carácter indecible.

No había duda, sin embargo, de que lo afirmado en el quinto axioma es correcto. La duda está en su exposición sin demostración, es decir, en enunciarlo como axioma, pues desde un principio se pensó en derivar ese resultado desde los restantes axiomas, considerando que podría ser un teorema, esto es, que podría ser deducible desde los otros cuatro.

Los repetidos intentos de lograr una prueba del quinto axioma desde los cuatro restantes del sistema de Euclides fueron infructuosos, durante mas de dos mil años, aun cuando estos repetidos intentos permitieron hacer avanzar a la matemática en múltiples campos.

Los intentos más difundidos consistieron en intentar probar alguna proposición equivalente, como fueron, por ejemplo:

- La perpendicular y la oblicua a una misma recta, se cortan.
- Para todo triángulo, existe otro semejante pero no igual al primero.
- El lugar geométrico de los puntos que, a un lado de una recta dada, equidistan de ésta, constituyen una línea recta.
- A través de tres puntos cualesquiera del plano puede trazarse una línea recta o bien una circunferencia.
- Por un punto solo puede trazarse una y solo una recta paralela a una recta dada.

Todos los intentos de demostración a lo largo de más de dos mil años de esfuerzos fueron fracasando. Nunca se pudo probar que el axioma del paralelismo de Euclides fuera decidible.

Esta situación daría un giro espectacular cuando se produjo la intervención del matemático ruso Nicolai Ivanovich Lobachevski.

La geometría de Lobachevski

Lobachevski (1792-1856) realizó diversos intentos de prueba del enunciado de las paralelas, hasta que quiso probarlo mediante el método de oposición, esto es, demostrando la falsedad del contrario. Se basaba en suponer lo siguiente:

El quinto axioma de Euclides es equivalente a afirmar que "por un punto exterior a una recta r dada sólo puede trazarse una única recta paralela a r ".

Si entendemos que tal afirmación es decidible desde los restantes axiomas, entonces su negación será, obviamente, falsa. Es decir, se podrá probar la falsedad del enunciado: "Por un punto exterior a una recta r dada pueden trazarse dos rectas paralelas a r ".

Lobachevski no pudo probar la decidibilidad de esta última proposición. Nadie pudo, realmente, probar que fuera falsa por derivación desde los cuatro primeros axiomas de Euclides. Habría, pues, de tener el mismo carácter de verdad que pudiera tener el axioma del paralelismo euclidiano.

Si esto es así, habrá de existir una geometría, distinta de la de Euclides, de la cual se diferencia solamente en el quinto de los axiomas:

Axioma 1: "Por dos puntos pasa una única línea recta".

Axioma 2: "Una recta cualquiera puede prolongarse indefinidamente".

Axioma 3: "Para un punto y un segmento hay una única circunferencia".

Axioma 4: "Todos los ángulos rectos son iguales".

Axioma 5: "Por un punto exterior a una línea recta dada r pueden trazarse dos rectas paralelas a r ".

El planteamiento de Lobachevski recibió el total rechazo de la comunidad científica de la época, pues afirmaba como cierto algo que era inconcebible, mientras rechazaba lo que para todos era obvio. Sin embargo, hoy sabemos que grandes matemáticos de la época, como el alemán Carlos Federico Gauss (1777-1855), o el húngaro Janos Bolyai (1802-1860) habían llegado a una conclusión parecida, estableciendo la posibilidad real de la existencia de geometrías no euclidianas.

Juan Bolyai había publicado en 1832 su trabajo sobre la geometría no euclidiana sin que obtuviera un aceptable reconocimiento, mientras que Carlos Federico Gauss nunca se atrevió a publicar sus investigaciones por temor a la incompreensión y el ridículo.

Sin embargo, fue a partir de 1868 cuando comenzó a generalizarse la idea de la posibilidad de las geometrías no euclidianas con los trabajos de matemático italiano Eugenio Beltrami, quien encontró que dentro del espacio euclidiano existen superficies en donde se verifica el axioma del paralelismo de Lobachevski (al considerar que sobre estas superficies las "rectas" son las líneas más cortas entre dos puntos). La construcción de cartas sobre estas superficies *de Lobachevski* impulsó en gran medida el estudio de las nuevas geometrías.

En el ámbito de la Física se planteó un problema fundamental de extraordinarias consecuencias en la investigación posterior: ¿es euclidiano el espacio real?, y si no lo es, ¿a qué tipo de espacios no euclidianos pertenece?. Como sabemos, la teoría de la relatividad se desarrolla sobre el concepto de espacio no euclidiano, y tampoco es euclidiano el microespacio de las partículas elementales.

Conclusión

El descubrimiento de sistemas axiomáticos nuevos nos conduce a comprender la idea de que los axiomas de la geometría, y por extensión podemos decir de cualquier otra rama de la matemática, no son válidos porque sean autoevidentes o por el solo hecho de que nos parezca que afirmen algo obvio. A la geometría en sí no le concierne el que los axiomas sean verdaderos o falsos, sino que lo que le concierne a la geometría es que tales axiomas cumplan reglas comprobables de validez. Las reglas que se han ido comprendiendo como necesarias hoy día ya las hemos indicado antes:

- Cada uno de los axiomas ha de ser indecidible:
Ningún axioma del sistema S puede ser deducido de los restantes axiomas de S.
- Cada uno de los axiomas ha de ser no contradictorio:
Ningún axioma del sistema S puede ser contradictorio con lo afirmado por los restantes axiomas de S.
- El conjunto de los axiomas ha de tener consistencia interna.
No se deducirán consecuencias del sistema de axiomas S que sean entre sí contradictorias.

Bibliografía:

SMOGORZHEVSKI, A.S., Acerca de la geometría de Lobachevski, Ed. Mir, Moscu, 1984.
CHINEA, C.S., Sobre fundamentación, http://casanchi.com/casanchi_1997/funda01.htm