Autovectores y Teorema de Cayley Hamilton

Carmen SÁNCHEZ DÍEZ

01. Operadores lineales

Consideremos un espacio vectorial sobre un cuerpo *K*, *V(+,.K),* y un endomorfismo Φ en dicho espacio, $\Phi : V \to V$, que llamaremos *operador sobre el espacio V*, y que puede ser tanto una derivación, como una integración, un logaritmo, una exponencial, etc., es decir, el operador Φ hace corresponder a cada elemento $\vec{x}$ del espacio V un único $\vec{y}$ del mismo espacio V

$$\Phi : V \to V$$
$$\forall \vec{x} \in V, \exists \vec{y} \in V / \Phi(\vec{x}) = \vec{y} \in V \qquad [01]$$

Cumpliéndose la condición de linealidad

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V,\ \forall \alpha, \beta \in K, \quad \Phi(\alpha\vec{x} + \beta\vec{y}) = \alpha\Phi(\vec{x}) + \beta\Phi(\vec{y})$$

El núcleo del operador Φ es el conjunto de los vectores del espacio que tienen por imagen correspondiente al vector nulo:

$$\ker(\Phi) = \left\{\vec{x} \in V / \Phi(\vec{x}) = \vec{0}\right\}$$

Expresión matricial:

Consideremos los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ expresados en respectivas bases $\{\vec{e}_i\}_n$ y $\{\vec{u}_i\}_n$ del espacio V. Se tiene: $\vec{x} = x^i\vec{e}_i$, $\vec{y} = y^k\vec{e}_k$, por lo que al aplicar el operador, será:

$$\Phi(\vec{x}) = \vec{y} \to \Phi(x^i\vec{e}_i) = y^k\vec{u}_k \to x^i\Phi(\vec{e}_i) = y^k\vec{u}_k$$

expresando también los vectores $\Phi(\vec{e}_i)$ en la base $\{\vec{u}_i\}_n$: $\Phi(\vec{e}_i) = a_{ki}\vec{u}_k$, con lo cual resulta:

$$x^i\Phi(\vec{e}_i) = y^k\vec{u}_k \to x^i a_{ki}\vec{u}_k = y^k\vec{u}_k \to x^i a_{ki} = y^k$$

Desarrollando estas ecuaciones:

$$\begin{array}{l}
x^1 a_{11} + x^2 a_{12} + \ldots + x^n a_{1n} = y^1 \\
x^1 a_{21} + x^2 a_{22} + \ldots + x^n a_{2n} = y^2 \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
x^1 a_{n1} + x^2 a_{n2} + \ldots + x^n a_{nn} = y^n
\end{array}$$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \ldots \\ \ldots \\ y^n \end{pmatrix}$$

o sea, en forma compacta: $A.X = Y$, siendo A la matriz del operador

Y los vectores del núcleo del operador asociado verificarán:

$$\forall \vec{x} \in \ker(\Phi),\ A.\vec{x} = \vec{0}$$

por lo que se acostumbra a decir que tales vectores son el núcleo de la matriz asociada al operador.

Asimismo, los vectores que mantienen su dirección al aplicarse el operador verifican que

$$A.\vec{x} = \lambda\vec{x}, \quad \lambda \in K$$

02. Autovectores

En el caso especial de que el vector resultante, $\vec{y}$, tenga la misma dirección que el vector $\vec{x}$, existirá algún escalar λ del cuerpo K de definición del espacio tal que $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, es decir, que verifique:

$$\Phi\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

En este caso diremos que $\vec{x}$ es un autovector del operador Φ, y que λ es el autovalor asociado a $\vec{x}$ para dicho operador Φ.

Teorema: Cada autovector del operador Φ tiene un único autovalor asociado.

Demostración: De la definición [01], el vector imagen $\Phi(\vec{x})$ es único. Lo cual nos indica que $\forall \vec{x} \in V, \Phi(\vec{x})$ es único. Si $\vec{x}$ es un autovector, entonces la imagen $\lambda\vec{x}$ es, por tanto, única. Lo que implica que el autovalor λ ha de ser, en definitiva, único.

En cambio, pueden existir varios autovectores diferentes del mismo operador Φ con un mismo autovalor asociado. Lo que obliga a definir el concepto de espacio propio de un autovalor.

Se define *espacio propio del autovalor λ para el operador Φ* como el conjunto de los autovectores de Φ que tengan asociado al autovalor λ, además del vector nulo del espacio V:

$$Ep(\lambda, \Phi) = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V / \Phi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$$

Teorema: El espacio propio es un espacio vectorial, subespacio del espacio V. Su dimensión se llama *multiplicidad geométrica* del autovalor λ.

Demostración:

Veamos que se cumplen las dos condiciones de la definición de subespacio vectorial para $Ep(\lambda,\Phi)$:

$$1)\ \forall\vec{x},\vec{y}\in E_p(\lambda,\Phi),\quad \vec{x}+\vec{y}\in E_p(\lambda,\Phi)$$

$$2)\ \forall\vec{x}\in E_p(\lambda,\Phi),\forall\alpha\in K,\ \alpha\vec{x}\in E_p(\lambda,\Phi)$$

Se tiene:

$$\forall\vec{x},\vec{y}\in E_p(\lambda,\Phi),\quad \Phi(\vec{x})=\lambda\vec{x},\Phi(\vec{y})=\lambda\vec{y}\rightarrow\Phi(\vec{x}+\vec{y})=\Phi(\vec{x})+\Phi(\vec{y})=\lambda\vec{x}+\lambda\vec{y}=$$

$$=\lambda(\vec{x}+\vec{y})\rightarrow\vec{x}+\vec{y}\in E_p(\lambda,\Phi)$$

$$\forall\vec{x}\in E_p(\lambda,\Phi),\forall\alpha\in K,\ \Phi(\alpha\vec{x})=\alpha\Phi(\vec{x})=\lambda\alpha x\rightarrow\alpha\vec{x}\in E_p(\lambda,\Phi)$$

Se define el *espectro* del operador Φ como el conjunto de todos los escalares del espacio que tengan asociados autovectores:

$$\varepsilon(\Phi)=\{\lambda\in K/\exists\vec{x}\in V,\Phi(\vec{x})=\lambda\vec{x}\}$$

02.1. Expresión matricial de la ecuación de autovalores

Las ecuaciones del operador serán

$$\begin{array}{c}
x^1a_{11}+x^2a_{12}+\ldots+x^na_{1n}=\lambda x^1\\
x^1a_{21}+x^2a_{22}+\ldots+x^na_{2n}=\lambda x^2\\
\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\\
x^1a_{n1}+x^2a_{n2}+\ldots+x^na_{nn}=\lambda x^{n1}
\end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{c}
x^1(a_{11}-\lambda)+x^2a_{12}+\ldots+x^na_{1n}=0\\
x^1a_{21}+x^2(a_{22}-\lambda)+\ldots+x^na_{2n}=0\\
\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\\
x^1a_{n1}+x^2a_{n2}+\ldots+x^n(a_{nn}-\lambda)=0
\end{array}$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix}
a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n}\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn}-\lambda
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}x^1\\x^2\\\ldots\\\ldots\\x^n\end{pmatrix}=
\begin{pmatrix}0\\0\\\ldots\\\ldots\\0\end{pmatrix}$$

en forma compacta podemos expresarla así: $(A-\lambda I).X=0$

02.2. Ejemplo 1

Sea el ejemplo del operador rotación, R, en el espacio ordinario V_3:

Si consideramos el operador que hace rotar a cualquier vector alrededor de un eje de rotación fijo, e_R, se tiene que los únicos vectores que conservan la dirección al aplicar dicho operador son, precisamente, los vectores que están contenidos en el eje de la rotación, e_R, y además, quedan invariantes, es decir:

$$\forall \vec{x} \in e_R,\ R(\vec{x}) = \vec{x}$$

Todos estos vectores, pues, tienen autovalor $\lambda = 1$.

Esto nos indica que el espectro del operador rotación R tiene un solo elemento:

$$\varepsilon(R) = \{1\}$$

y también que el espacio propio de R es el conjunto de los vectores contenidos en el eje de la rotación:

$$Ep(1,R) = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V_3 / R(\vec{x}) = \vec{x}\} = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V_3 / \vec{x} \in e_R\}$$

El espacio propio, es, pues, unidimensional. La multiplicidad geométrica del autovalor es 1.

02.3. El cálculo de los autovalores y los autovectores

El cálculo de los autovalores:

De la ecuación matricial de autovalores

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots\ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que en forma compacta es $(A - \lambda I).X = 0$. Para que exista solución distinta de la trivial (autovector nulo) debe ser nulo el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$p_c(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

A esta ecuación se la denomina *Ecuación característica de la matriz A*, y el polinomio que se obtiene en el desarrollo del determinante es el *Polinomio característico.* Resolviendo la ecuación característica encontraremos, si existen, los autovalores correspondientes.

Si trabajamos en un espacio vectorial real (sobre el cuerpo de los números reales) la matriz cuadrada que define al operador puede tener tantos autovalores reales como indique su orden o bien no tener autovalores reales.

Así, por ejemplo, en las siguientes matrices cuadradas de orden 2, se tiene:

La matriz $A=\begin{pmatrix}-3 & 10\\ -3 & 8\end{pmatrix}$ tiene dos autovalores reales distintos ($\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$). Se dice que ambos autovalores, 2 y 3, tiene multiplicidad algebraica igual a 1.

La matriz $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$ no tiene autovalores reales, ya que al intentar resolver la ecuación característica solo se obtendrían soluciones complejas.

La matriz $C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ tiene un solo autovalor real doble ($\lambda_1=2,\ \lambda_2=2$). Se dice que el autovalor 2 tiene multiplicidad algebráica igual a 2.

Si consideramos ejemplos de matrices de orden tres:

La matriz

$$A=\begin{pmatrix}3 & -8 & 4\\ 0 & -4 & 3\\ 0 & -6 & 5\end{pmatrix}$$

tiene tres autovalores reales distintos ($\lambda_1=3,\lambda_2=2,\lambda_3=1$). Tales autovalores tienen, en definitiva, multiplicidad algebraica igual a la unidad.

La matriz

$$B=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

tiene tres autovalores reales, uno de ello doble ($\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=1$). Así, pues, la multiplicidad algebráica del autovalor 3 es 1 y la multiplicidad algebráica del autovalor 1 es 2.

La matriz

$$C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

tiene un único autovalor real, simple ($\lambda_1=2$). Su multiplicidad algebraica es 1.

La matriz

$$D=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

tiene un solo autovalor real, triple ($\lambda_1=3,\lambda_2=3,\lambda_3=3$). La multiplicidad algebráica del autovalor 3 es, pues, 3.

El cálculo de los autovectores:

Resolviendo el sistema homogéneo de la ecuación de autovalores, encontraremos los autovectores correspondientes. Así, para cada autovalor λ_k se tiene que los autovectores de su espacio propio asociado verificarán:

$$\left(A-\lambda_k I\right)\vec{x}_k = (0)$$

02.4. Ejemplo 2

En el espacio bidimensional real V_2 se considera un operador $\varphi : V_2 \to V_2$ que tiene por matriz asociada:

$$A_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

polinomio característico: $p_c(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

Ecuación característica: $p_c(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

Autovalores: $\lambda = \dfrac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4.4}}{2} = \dfrac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \lambda_1 = 4 \\ \lambda_2 = 1 \end{cases}$

Ambos autovalores, 4 y 3, tienen, como vemos, multiplicidad algebráica igual a 1.

Autovectores:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -1 \\ -2 & 3-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -2x_1^1 - x_1^2 = 0 \to x_1^2 = -2x_1^1 \to$$

$$\to \vec{x}_1 = (x_1^1, x_1^2) = (x_1^1, -2x_1^1) = x_1^1(1,-2) \to \textit{autovectores de } \lambda_1 \to \vec{x}_1 = m(1,-2),\ \forall m \in R$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -1 \\ -2 & 3-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to x_2^1 - x_2^2 = 0 \to x_2^2 = x_2^1 \to$$

$$\to \vec{x}_2 = (x_2^1, x_2^2) = (x_2^1, x_2^1) = x_2^1(1,1) \to \textit{autovectores de } \lambda_2 \to \vec{x}_2 = m(1,1),\ \forall m \in R$$

En definitiva, el espacio propio del autovalor $\lambda_1 = 4$ son todos los vectores que tienen la dirección (1,-2), junto con el vector nulo. Y el espacio propio del autovalor $\lambda_2 = 1$ son todos los vectores que tienen la dirección del vector (1,1) junto con el vector nulo. Ambos espacios propios son de dimensión uno, por lo que la multiplicidad geométrica de estos autovalores es la unidad.

$$Ep(4,\varphi) = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V / \varphi(\vec{x}) = 4\vec{x}\} = \left\{\vec{x} \in V / \vec{x} = m\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \forall m \in R\right\}$$

$$Ep(1,\varphi) = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V / \varphi(\vec{x}) = \vec{x}\} = \left\{\vec{x} \in V / \vec{x} = m\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall m \in R\right\}$$

El espectro de este operador está formado, en definitiva, por dos elementos: $\varepsilon(\varphi)=\{4,1\}$

Podemos observar, pues, como la multiplicidad algebráica y la multiplicidad geométrica de ambos autovalores coinciden en este caso.

02.5. Ejemplo 3

En el espacio bidimensional real V_3 se considera un operador $\tau : V_3 \to V_3$ que tiene por matriz asociada:

$$A_\tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

polinomio característico: $p_c(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(1+\lambda)^2$

Ecuación característica: $p_c(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0$

Autovalores: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$

La multiplicidad geométrica del valor 1 es la unidad, mientras que la multiplicidad geométrica del valor -1 es 2.

Autovectores:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda_1 & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ x_1^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} x_1^2 + x_1^3 = 0 \\ x_1^1 + 2x_1^2 = 0 \\ x_1^1 - 2x_1^3 = 0 \end{cases}$$

$$\to \vec{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, x_1^3) = (2x_1^3, -x_1^3, x_1^3) = x_1^3(2,-1,1) \to \textit{autovectores de } \lambda_1 \to \vec{x}_1 = m(2,-1,1)$$

$\forall m \in R$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & -1 & -1 \\ -1 & -1-\lambda_2 & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \\ x_2^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{cases} 2x_2^1 - x_2^2 - x_2^3 = 0 \\ -x_2^1 = 0 \\ x_2^1 = 0 \end{cases}$$

$$\to \vec{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, x_2^3) = (2x_1^3, -x_1^3, x_2^3) = x_2^3(0,-1,1) \to \textit{autovectores de } \lambda_2 \to \vec{x}_2 = m(0,-1,1)$$

$\forall m \in R$

Análogamente resulta que para los $\textit{autovectores de } \lambda_3 \to \vec{x}_3 = m(0,-1,1) \;\; \forall m \in R$

Se observa que cada uno de los autovalores tiene un espacio propio que es un conjunto infinito de vectores en la misma dirección, unida al vector nulo. Los tres autovalores tienen, en definitiva, multiplicidad geométrica igual a la unidad.

$$Ep(1,\tau) = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V / \tau(\vec{x}) = \vec{x}\} = \left\{ \vec{x} \in V / \vec{x} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \forall m \in R \right\}$$

$$Ep(-1,\tau) = \{0\} \cup \{\vec{x} \in V / \tau(\vec{x}) = -\vec{x}\} = \left\{ \vec{x} \in V / \vec{x} = m\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \forall m \in R \right\}$$

El espectro de este operador está constituido por sólo dos elementos: $\varepsilon(\tau) = \{1,-1\}$.

En lo que respecta a las multiplicidades de ambos autovalores, hemos visto cómo el autovalor 1 tiene iguales la multiplicidad algebráica y la multiplicidad geométrica, mientras el autovalor -1 tiene multiplicidad algebráica igual a 2 y multiplicidad geométrica igual a 1.

Teorema: Si dos autovectores de la matriz A, $\vec{x}_i, \vec{x}_k$, están asociados a valores propios distintos, entonces son linealmente independientes.

Demostración:

Probemos el enunciado contrarrecíproco: si no son linealmente independientes entonces las autovalores asociados no son distintos:

Sea $\vec{x}_i$ asociado al autovalor λ_i, y sea Sea $\vec{x}_k$ asociado al autovalor λ_k. Sin no son linealmente independientes existe algún $\alpha \in K - \{0\}$ tal que $\vec{x}_i = \alpha\vec{x}_k$, si $i \neq k$, o bien $\vec{x}_i - \alpha\vec{x}_k = 0$.

Multiplicando a la izquierda por la matriz A: $A.(\vec{x}_i - \alpha\vec{x}_k) = (0) \to A\vec{x}_i - \alpha A\vec{x}_k = (0)$
Si sustituimos por los autovalores asociados: $\lambda_i\vec{x}_i - \alpha\lambda_k\vec{x}_k = 0 \to \lambda_i\alpha\vec{x}_k - \alpha\lambda_k\vec{x}_k = 0$
De donde queda: $\lambda_i - \lambda_k = 0 \to \lambda_i = \lambda_k$ (los autovalores coinciden)

En definitiva, para obtener los autovalores de una determinada matriz cuadrada siguiendo lo indicado en la construcción teórica del concepto hemos de resolver la ecuación característica, y para obtener los autovalores resolveríamos el sistema homogéneo de ecuaciones lineales correspondientes.

Sin embargo, es posible encontrar los autovectores asociados a los autovalores de la matriz sin necesidad de resolver el sistema homogéneo, utilizando un resultado descubierto a mediado del siglo XIX por Arthur Cayley y William Rowan Hamilton, y que conocemos como Teorema de Cayley Hamilton

03. El Teorema de Cayley Hamilton:

03.1. Enunciado:

Todo endomorfismo $\Phi : V \to V$, donde V es espacio vectorial finitodimensional, anula a su polinomio característico.

Matricialmente, el teorema afirma que toda matriz cuadrada verifica su ecuación característica, es decir, que si son $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de la matriz A, se verifica que

$$\left(A-\lambda_1 I\right)\left(A-\lambda_2 I\right)\ldots\left(A-\lambda_n I\right)=\left(0\right)$$

Siendo I la matriz identidad del mismo orden que A.

Veamos la verificación de este teorema en los dos ejemplos anteriores

a) Para la matriz $A_\varphi=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ de ec. Característica $p_c(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+4=0$ sustituimos la matriz en la ecuación característica para ver que el resultado es la matriz nula:

$$p_c(A_\varphi)=A_\varphi^{\ 2}-5A_\varphi+4I=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}^2-5\begin{bmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}6 & -5\\ -10 & 11\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10 & -5\\ -10 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

b) Para la matriz

$$A_\tau=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

cuya ecuación característica es $p_c(\lambda)=-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1=0$

se tiene, al sustituir la matriz: $p_c(A_\tau)=-A_\tau^{\ 3}-A_\tau^{\ 2}+A_\tau+1$, y comprobamos que se trata de la matriz nula:

$$-\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^3-\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}^2+\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Veamos su aplicación más sencilla antes de realizar la demostración.

03.2. Cómo aplicar el teorema al cálculo de autovectores:

Se puede aplicar el Teorema de Cayley Hamilton a la obtención de los autovectores cuando ya se conocen los h autovalores de la matriz, teniendo en cuenta que

El autovector $\vec{x}_1$ asociado a λ_1: verifica que $\left(A-\lambda_1 I\right)\vec{x}_1=\vec{0}$

El autovector $\vec{x}_2$ asociado a λ_2: verifica que $\left(A-\lambda_2 I\right)\vec{x}_2=\vec{0}$

… …

… …

El autovector $\vec{x}_h$ asociado a λ_h: verifica que $\left(A-\lambda_h I\right)\vec{x}_h=\vec{0}$

Puesto que, por el Teorema de Cayley Hamilton es

$$p_c(A) = |A - \lambda I| = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)...(A - \lambda_h I) = [0]$$

se entiende que

$$(A - \lambda_1 I).\vec{x}_1 = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)...(A - \lambda_n I) = [0]$$

de donde resulta que $\vec{x}_1 = (A - \lambda_2 I)...(A - \lambda_h I)$, es decir, las componentes del autovector $\vec{x}_1$ son las columnas de la matriz producto $(A - \lambda_2 I)...(A - \lambda_h I)$

Análogamente con los restantes autovectores. Se tiene, pues, en general, que si la matriz A tiene h autovalores reales

$$\vec{x}_i = \prod_{k \neq i}^{h} (A - \lambda_k I), \ i = 1,2,...,h$$

cualquiera de las columnas de la matriz que resulta del producto matricial anterior son las componentes del autovector $\vec{x}_i$ (son proporcionales).

Veamos la aplicación a los dos últimos ejemplos mostrados:

a) Autovectores de la matriz $A_\varphi = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$:

Ecuación característica:

$$p_c(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 1$$

Por el teorema de Cayley Hamilton es: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0$

Autovectores $\vec{x}_1$:

$(A - \lambda_1 I).\vec{x}_1 = [0]$, de donde $\vec{x}_1 = A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, de donde $\vec{x}_1 = m(1,-2)$

Autovectores $\vec{x}_2$:

$(A - \lambda_2 I).\vec{x}_2 = [0]$, de donde $\vec{x}_2 = A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, de donde $\vec{x}_1 = -2m(1,1)$

a) Autovectores de la matriz $A_\tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$:

Ecuación característica:

$$p_c(\lambda) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \rightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3) = 0 \rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

Por el teorema de Cayley Hamilton es: $(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)(A - \lambda_3 I) = [0]$

Autovectores $\vec{x}_1$ asociados al autovalor $\lambda_1 = 1$:

$\left(A-\lambda_1 I\right).\vec{x}_1=[0]$, de donde $\vec{x}_1=\left(A-\lambda_2 I\right)\left(A-\lambda_3 I\right)=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, de donde

$\vec{x}_1=m(2,-1,1)$

Autovectores $\vec{x}_2$ asociados al autovalor $\lambda_2=-1$ (los mismos que a $\lambda_3=-1$):

$\left(A-\lambda_2 I\right).\vec{x}_2=[0]$, de donde $\vec{x}_2=(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_3 I)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$, de donde

$\vec{x}_2=m(0,1,-1)$

03.3. Demostración del Teorema de Cayley Hamilton:

Toda matriz cuadrada, A, verifica su ecuación característica.

Es decir, si el polinomio característico de la matriz A es

$$p(\lambda)=\det\left[A-\lambda I\right]$$

entonces $p(A)=[0]$

Demostración:

Podemos expresar el determinante de una matriz cuadrada cualquiera en función del producto de la misma matriz por la adjunta de su traspuesta. Basta para ello usar la fórmula que nos permite hacer el cálculo de la matriz inversa de una matriz cuadrada:

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}.\overline{M}^{+}\rightarrow |M|.M^{-1}=\overline{M}^{+}\rightarrow |M|.I=\overline{M}^{+}.M$$

Si se trata de la matriz $M=\left(A-\lambda I\right)$, será:

$$|A-\lambda I|.I=\left(\overline{(A-\lambda I)}\right)^{+}.(A-\lambda I)$$

en definitiva, el polinomio característico $p(\lambda)=|A-\lambda I|$ resulta ser igual al polinomio producto de dos polinomios en λ con coeficientes matriciales:

$$|A-\lambda I|=\overline{M}^{+}.M(\lambda)$$

Si pudiéramos demostrar que tal producto de polinomios con coeficientes matriciales es el producto de las dos matrices en función de A, es decir que $\overline{M}^{+}.M(A)=\overline{M}^{+}(A)\times M(A)$, entonces la prueba del teorema sería inmediata, pues:

$$|A-AI|=\overline{M}^{+}.M(A)=\overline{M}^{+}(A)\times M(A)=\left(\overline{(A-AI)}\right)^{+}\times(A-AI)=$$

$$=\left(\overline{(A-AI)}\right)^{+}\times(A-A)=\left(\overline{(A-AI)}\right)^{+}\times(0)=(0)$$

Se hace preciso probar, por tanto, que en ciertas condiciones, se verifica que para dos matrices cuadradas S, y T tales que $T.S(\lambda)=T(\lambda).S(\lambda)$, se cumple, al sustituir el parámetro λ por la matriz A, que $T.S(A)=T(A)\times S(A)$.

Antes de hacer la prueba, veamos mediante un ejemplo sencillo que tal condición no se cumple siempre. Sean las matrices cuadradas de segundo orden, T y S, y sea la matriz A dadas por:

$$T(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.\lambda,\quad S(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$T.S(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\lambda\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\lambda\rightarrow T.S(A)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

en cambio, si hacemos el producto de las matrices en función de A:

$$T(A)\times S(A)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

En este caso, pues, $T.S(A)\neq T(A)\times S(A)$

Para completar la demostración del teorema de Cayley Hamilton probaremos que si la matriz A conmuta con todos los coeficientes matriciales, S_j, del polinomio $S(\lambda)$ entonces si se verifica que $T.S(A)=T(A)\times S(A)$

En efecto:

Sean $T(\lambda)=\sum_{i=0}^{h}T_i\lambda^i,\quad S(\lambda)=\sum_{j=0}^{l}S_j\lambda^j$ de modo que conmuten las matrices S_j con la matriz A: $S_j.A=A.S_j\quad j\in\{0,1,...,l\}$, y siendo todas las matrices cuadradas del mismo orden.

- Realicemos primero el producto de ambos polinomios, obteniendo el polinomio producto $TS(\lambda)$:

$$TS(\lambda)=\sum_{k=0}^{h+l}\left(\sum_{i+j=k}T_iS_j\right)\lambda^k$$

Al sustituir la matriz A:

$$TS(A)=\sum_{k=0}^{h+l}\left(\sum_{i+j=k}T_iS_j\right).A^k$$

- Hagamos ahora el producto de las matrices $T(A)xS(A)$

$$T(A)xS(A)=\left(\sum_{i=0}^{h}T_iA^i\right)x\left(\sum_{j=0}^{l}S_jA^j\right)=\sum_{\substack{0\le i\le h\\ 0\le j\le l}}T_iA^iS_jA^j=\sum_{k=0}^{h+l}\left(\sum_{i+j=k}T_iA^iS_jA^j\right)$$

Si aplicamos ahora la condición de conmutatividad indicada, $S_j.A=A.S_j$ será:

$$T(A)xS(A)=\sum_{k=0}^{h+l}\left(\sum_{i+j=k}T_iA^iS_jA^j\right)=\sum_{k=0}^{h+l}\left(\sum_{i+j=k}T_iS_jA^{i+j}\right)=\sum_{k=0}^{h+l}\left(\sum_{i+j=k}T_iS_j\right)A^k$$

con lo que queda completada la prueba.

04. Una aplicación elemental del Teorema de Cayley Hamilton: determinación de la matriz inversa:

Se puede calcular la matriz inversa, usando el polinomio característico de la matriz, de la siguiente manera:

Sea la matriz A de polinomio característico $p_c(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+...+a_1\lambda+a_0$

Por el teorema de Cayley Hamilton: $a_nA^n+a_{n-1}A^n+...+a_1A+a_0I=(0)$

Multiplicando a la derecha por la matriz inversa A^{-1} se tiene:

$$a_nA^{n-1}+a_{n-1}A^{n-2}+...+a_1I+a_0A^{-1}=(0)$$

De donde:

$$A^{-1}=-\frac{a_n}{a_0}A^{n-1}-\frac{a_{n-1}}{a_0}A^{n-2}...-\frac{a_1}{a_0}I$$

Ejemplos:

a) Cálculo de la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$ usando el Teorema de Cayley Hamilton:

Polinomio característico: $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -1\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-5\lambda+4$

Aplicando el teorema: $A^2-5.A+4.I=(0)\to A-5.I+4.A^{-1}=(0)$

Despejando la inversa:

$$A^{-1}=-\frac{1}{4}A+\frac{5}{4}I=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}+\frac{5}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4}\end{pmatrix}$$

Comprobamos que es, efectivamente, la inversa:

$$A.A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/4 & 1/4\\ 2/4 & 2/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/4 & 0/4\\ 0/4 & 4/4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Cálculo de la inversa de la matriz $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix}$:

Polinomio característico: $p_c(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & -1\\ -1 & -1-\lambda & 0\\ 1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\lambda^3-\lambda^2+\lambda+1$

Aplicamos el teorema: $-A^3 - A^2 + A + I = (0) \rightarrow -A^2 - A + I + A^{-1} = (0)$

Despejando la inversa:

$$A^{-1} = A^2 + A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

05. Bibliografia

BURGOS, J., "Algebra Lineal "
GROSSMANN, S., "Algebra Lineal con aplicaciones" , Ed. McGraw Hill
DIAZ HERNANDO, J.A., "Matrices", Ed. Tebar Flores
DE LA VILLA, A., Problemas de álgebra GLACSA 1998
MERINO, L.-SANTOS, E., "Algebra Lineal con métodos elementales". Ed.Thomson, 2006
CASTELLET-LLERENA, "Algebra Lineal y Geometría". Ed.Reverté (1991)
ROJO, J., "Álgebra Lineal" McGraw-Hill Interamericana S.A.U. 2001