Aplicaciones entre conjuntos

0. Una introducción breve:

En una correspondencia, *f=(G;A,B)*, de un conjunto A en un conjunto B, con grafo G, los elementos del primer conjunto que se corresponden con uno o más elementos del conjunto B se denominan *elementos originales* de la correspondencia y el conjunto de todos ellos es el *dominio de definición* de la misma, constituyendo, obviamente, la primera componente del grafo G.

Conjunto de originales (dominio de definición) $= \mathrm{Pr}_1 G \subseteq A$

El conjunto de las imágenes que corresponden a los elementos originales se llaman *valores* de la correspondencia, pertenecen al conjunto B y constituyen la segunda componente del grafo:

Conjunto de valores (conjunto de imágenes) $= \mathrm{Pr}_2 G \subseteq B$

La correspondencia es unívoca sii ningún elemento original tiene más de una imagen en el conjunto de valores:

f unívoca $\leftrightarrow (\forall x \in \mathrm{Pr}_1 G)((x,y) \in G \wedge (x,y') \in G \rightarrow y = y')$

o, dicho de otro modo:

$$f \textit{ unívoca} \leftrightarrow (\forall x \in A), f(x) = y \wedge f(x) = y' \rightarrow y = y'$$

La correspondencia será inyectiva sii no hay elementos distintos del dominio de definición que tengan la misma imagen:

f inyectiva $\leftrightarrow (\forall y \in \mathrm{Pr}_2 G)((x,y) \in G \wedge (x',y) \in G \rightarrow x = x')$

o bien:

f inyectiva $\leftrightarrow (\forall y \in B), f(x) = y \wedge f(x') = y \rightarrow x = x'$

La correspondencia será suprayectiva o sobreyectiva si el conjunto de las imágenes o valores constituye todo el conjunto B, es decir, si B coincide con la segunda componente del grafo:

f suprayectiva $\leftrightarrow \mathrm{Pr}_2 G = B$

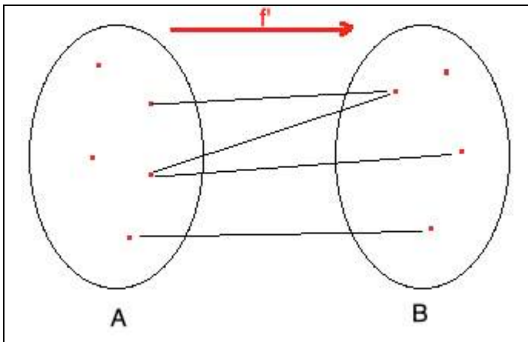
o sea:

f suprayectiva $\leftrightarrow (\forall y \in B)(\exists a \in A / f(x) = y)$

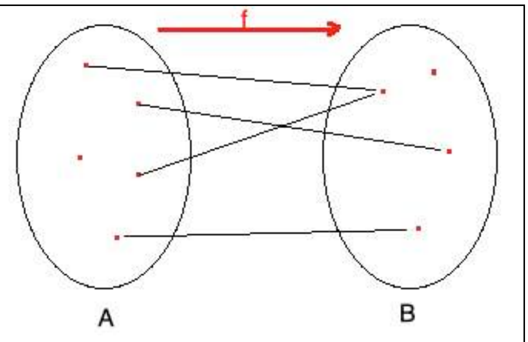
Un correspondencia que sea inyectiva y también suprayectiva es, por definición, una correspondencia biyectiva:

$$f\ biyectiva \leftrightarrow f\ inyectiva \wedge f\ \sup rayectiva$$

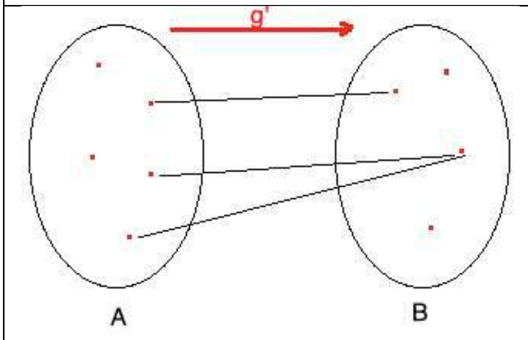
Mostramos a continuación gráficamente, mediante diagramas de Ven, ejemplos simples de la clasificación indicada para las correspondencias:



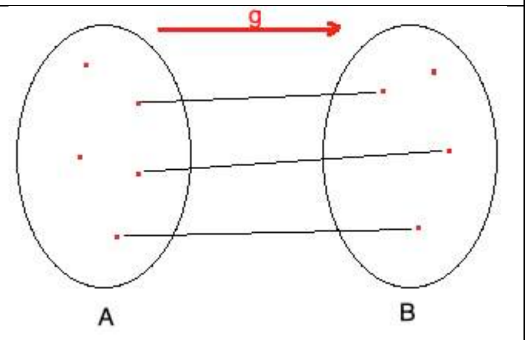
No unívoca



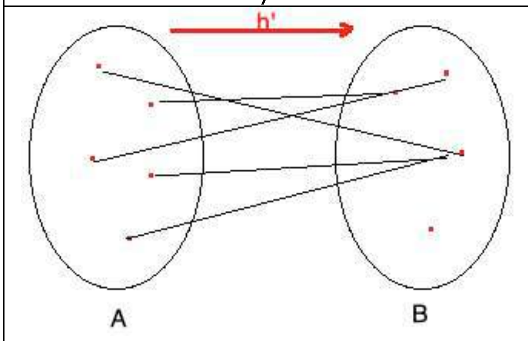
Unívoca



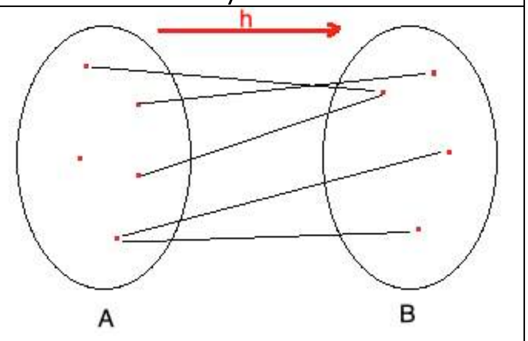
No inyectiva



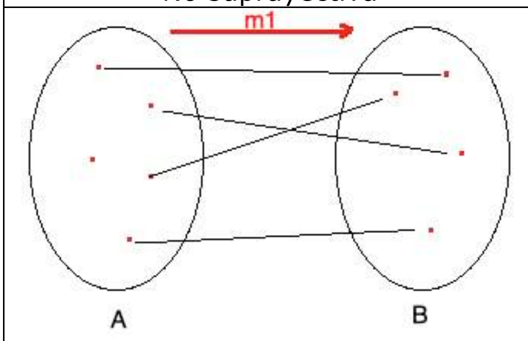
Inyectiva



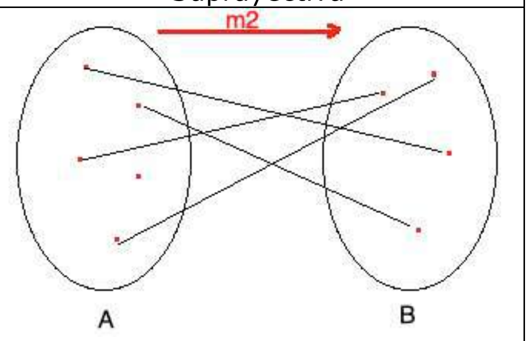
No suprayectiva



Suprayectiva



Biyectiva



Biyectiva

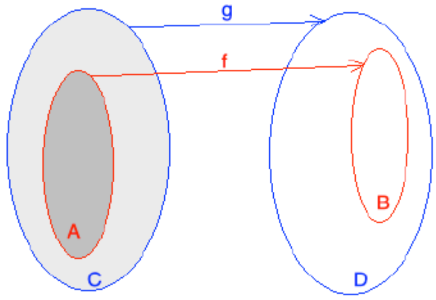
Vista esta pequeña introducción pasamos al estudio de la idea de aplicación.

1. Aplicaciones entre conjuntos. Componiendo aplicaciones.

Una aplicación del conjunto A al conjunto B es una correspondencia unívoca $f=(F;A,B)$ en la que el dominio de definición Pr_1F coincide con el conjunto inicial A:

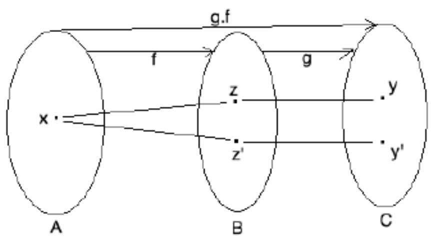
$$f=(F;A,B)\ aplicación \leftrightarrow \begin{cases} f\ unívoca \\ Pr_1 F = A \end{cases}$$

Extensión y restricción:
Dadas las aplicaciones $f=(F;A,B), g=(G;C,D)$, si son tales que $B\subseteq D$ y $F\subseteq G$ diremos que *g es la extensión de f al conjunto C*, o bien que *f es la restricción de g al conjunto A*. Veamos la situación gráficamente:



$$B\subseteq D,\ \ F\subseteq G$$
$$A=\Pr_1 F\subseteq \Pr_1 G = C$$
$$f = restr\ de\ g\ a\ A,\ \ \ g = exten\ de\ f\ a\ C$$

Composición de aplicaciones:
Teorema 1.1: Dadas las aplicaciones $f=(F;A,B), g=(G;B,C)$, se cumple que la correspondencia $g\circ f=(G\circ F;A,C)$ es también una aplicación.
Demostración:
Hemos probar que el grafo es unívoco y que el dominio de definición coincide con el conjunto inicial A.
- $G\circ F$ es unívoco:



Veamos que si $(x,y)\in G\circ F$ y $(x,y')\in G\circ F$, entonces $y=y'$:

$$\left.\begin{array}{l} (x,y)\in G\circ F\rightarrow \exists z\in B/(x,z)\in F\wedge (z,y)\in G \\ (x,y')\in G\circ F\rightarrow \exists z'\in B/(x,z')\in F\wedge (z',y')\in G \end{array}\right\}\rightarrow$$

como F es unívoco $(x,z)\in F\wedge (x,z')\in F\rightarrow z=z'$

con lo que $(z,y)\in G\wedge (z,y')\in G$ y como G también es unívoco $y=y'$.

- $A = \mathrm{Pr}_1(G \circ F)$:

Teniendo en cuenta la definición de correspondencia recíproca (ver el artículo sobre correspondencias en http://casanchi.org/mat/correspondencia.pdf), se tiene:

$$\mathrm{Pr}_1(G \circ F) = f^{-1}(\mathrm{Pr}_1 G) = f^{-1}(B) = A \text{, por tanto } A = \mathrm{Pr}_1(G \circ F).$$

En general, diremos que una aplicación f es una *factorización* de las aplicaciones $f_1, f_2, ..., f_n$ si es

$$f = f_1 \circ f_2 \circ ... \circ f_n .$$

Teorema 1.2: La composición de aplicaciones es asociativa.
Demostración:
Es obvio, pues se trata de la composición de correspondencias, que sabemos que es asociativa (ver: http://casanchi.org/mat/correspondencia.pdf)

Teorema 1.3: Si las aplicaciones $f = (F; A, B)$ y $g = (G; B, C)$ son inyectivas, entonces $g \circ f = (G \circ F; A, C)$ es inyectiva.
Demostración:
$(x,y),(x',y) \in G \circ F \rightarrow [\exists z \in B / (x,z) \in F \wedge (z,y) \in G] \wedge$
$\wedge [\exists z' \in B / (x',z') \in F \wedge (z',y) \in G] \wedge G \textit{ inyectivo} \rightarrow$
$\rightarrow z = z' \rightarrow (x,z) \in F \wedge (x',z) \in F \wedge F \textit{ inyectivo} \rightarrow x = x'$
por tanto:
$(x,y),(x',y) \in G \circ F \rightarrow x = x' \rightarrow G \circ F \textit{ inyectivo} \rightarrow g \circ f \textit{ inyectiva}$

Teorema 1.4: Si las aplicaciones $f = (F; A, B)$ y $g = (G; B, C)$ son suprayectivas, entonces $g \circ f = (G \circ F; A, C)$ es suprayectiva.
Demostración:
Conj de valores de f: $im(f) = f(A) = B$ (por ser suprayectiva)
Conj de valores de g: $im(g) = f(B) = C$ (por ser suprayectiva)
Luego:
Conj de valores de $g \circ f$: $im(g \circ f) = (g \circ f)(A) = g\left[f(A)\right] = g(B) = C$
Por tanto:

$$(g \circ f)(A) = C \rightarrow g \circ f \text{ suprayectiva}$$

Teorema 1.5: Si las aplicaciones $f = (F; A, B)$ y $g = (G; B, C)$ son biyectivas, entonces $g \circ f = (G \circ F; A, C)$ es biyectiva.
Demostración:
Por ser g y f aplicaciones biyectivas son ambas inyectivas y suprayectivas, y, por los teoremas 1.3 y 1.4, es también g.f inyectiva y suprayectiva, luego g.f es biyectiva,

Teorema 1.6: Sean las aplicaciones $f = (F; A, B)$ y $g = (G; B, C)$. Si la aplicación compuesta $g \circ f = (G \circ F; A, C)$ es inyectiva, entonces f es inyectiva.
Demostración:
Probémoslo por reducción al absurdo (teorema contrarrecíproco):
Si f no fuera inyectiva:

$$\exists x, x' \in A, \exists y \in B / x \neq x' \wedge (x,y) \in F \wedge (x',y) \in F$$

entonces, por ser g aplicación:

$$\exists z \in C / (y,z) \in G \to (x,z) \in G \circ F \wedge (x',z) \in G \circ F \wedge x \neq x' \to$$
$$\to g \circ f \text{ no sería inyectiva.}$$

Teorema 1.7: Sean las aplicaciones $f = (F; A, B)$ y $g = (G; B, C)$. Si la aplicación compuesta $g \circ f = (G \circ F; A, C)$ es suprayectiva, entonces g es suprayectiva.
Demostración:
Probemos también el contrarrecíproco:
Si g no fuera suprayectiva:

$$im(g) = g(B) \neq C$$

Entonces:
$im(g \circ f) = (g \circ f)(A) = g\left[f(A)\right] \neq C$, aún cuando $f(A) = B$, es decir, aún cuando f fuera suprayectiva.
En definitiva: $(g \circ f)(A) \neq C$ y $g \circ f$ no sería suprayectiva.

Teorema 1.8: Toda aplicación $f = (F; A, B)$ induce en A una partición o clasificación y, por tanto, define una relación de equivalencia en el conjunto a.
Demostración:
Basta definir una relación R en el conjunto A por la condición de que dos elementos x e y, están relacionados si tienen la misma imagen en el conjunto B:

$$\forall x, y \in A, xRy \leftrightarrow f(x) = f(y)$$

es obvio que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva, pues se basa en las mismas propiedades que tiene la igualdad de las imágenes asociadas.
Se trata, en definitiva, de una relación de equivalencia, que, como sabemos (ver http://casanchi.org/mat/relacionesc01.pdf) parte al conjunto en el que está definida en clases de equivalencia, que son disjuntas y su unión es el total del conjunto. Es, por consiguiente, una partición del mismo.

Teorema 1.9: Dada una aplicación $f = (F; A, B)$, existen siempre dos aplicaciones $i_A = (I_A; A, A)$ y $i_B = (I_B; B, B)$ tales que $f \circ i_A = f$ y $i_B \circ f = f$.
Demostración:
Basta ver que los correspondientes grafos son

$$I_A = \left\{(x,x) / x \in A\right\},\ I_B = \left\{(y,y) / y \in B\right\}$$

y se tiene:

$$A \xrightarrow{i_A} A \xrightarrow{f} B \qquad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{i_B} B$$
$$A \xrightarrow{f \circ i_A} B \qquad A \xrightarrow{i_B \circ f} B$$

2. Caracterización de aplicaciones. Teoremas de caracterización.

En este apartado probaremos las condiciones necesarias y suficientes que deben verificarse para que una determinada aplicación entre dos conjuntos sea inyectiva, o bien suprayectiva o biyectiva.
Para ello probaremos previamente el teorema 1.2, que nos servirá de base para obtener los tres resultados que pretendemos encontrar.

Teorema 2.1: Sean las aplicaciones $f=(F;A,B)$ y $h=(H;A,C)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:

a) Existe una aplicación $g=(G;B,C)$ tal que $h=g\circ f$ -

b) $\forall a,a'\in A, f(a)=f(a')\to h(a)=h(a')$

Demostración:

- Veamos que a)-->b):

Si existe g tal que $h=g\circ f$: $\forall a\in A, h(a)=(g\circ f)(a)=g\left[f(a)\right]$

luego, si $f(a)=f(a')\to h(a)=g\left[f(a)\right]=g\left[f(a')\right]=h(a')$

- Veamos que b)-->a):

Para ver que existe la aplicación g indicada en el enunciado, consideremos primero el caso $f(A)=B$ (que f sea aplicación suprayectiva):

y sea el conjunto de pares

$$G=\left\{(b,c)/\left(\exists a\right)\left((a,b)\in F\wedge(a,c)\in H\right)\right\}$$

comprobemos entonces que $g=(G;B,C)$ es una aplicación:

$$\forall b\in B,\exists a\in A/(a,b)\in F\wedge\exists c\in C/(a,c)\in H\to$$
$$\to\forall b\in B,\exists c\in C/(b,c)\in G$$

el elemento c es único, porque si existiera otro c' tal que $(a',c')\in H$

se tendría $(a',b)\in F\wedge(a,b)\in F\to f(a)=f(a')=b$, y, por la condición impuesta

$$f(a)=f(a')=h(a)=h(a')\to c=c'$$

Luego $g=(G;B,C)$ es aplicación, y por construcción es $G\circ F=H$, en definitiva se tiene que $g\circ f=h$.

Consideremos ahora el caso general $f(A)=B'\subseteq B$ (f no necesariamente suprayectiva):

Sea la aplicación $f'=(F;A,B')$, esto es $f'(a)=f(a),\forall a\in A$.

Si sustituimos A,B,C,f,h por A,B',C,f',h estamos en la misma situación de antes, ahora con $f'(A)=B'$ existiendo por consiguiente la aplicación $g'=(G;B',C)$ tal que $g'\circ f'=h$.

Prolongando la aplicación g' a la aplicación $g=(G;B,C)$ se tiene que:

$$\forall a\in A,h(a)=g\left[f'(a)\right]=g\left[f(a)\right]\to h=g\circ f$$

En definitiva, se cumple el grafico:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

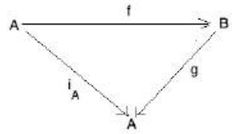
Teorema 2.2 (caracterización de las aplicaciones inyectivas):

La condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f=(F;A,B)$ sea inyectiva es que exista una aplicación $g=(G;B,A)$ tal que

$$g\circ f=i_A$$

Demostración:

Es consecuencia inmediata del teorema 1.2, pues basta hacer en dicho teorema *C=A* y *h=*I_A para que resulte el gráfico anterior



y como se verifica que $f(a)=f(a') \to i_A(a)=i_A(a') \to a=a'$, la aplicación f es inyectiva.

Teorema 2.3 (caracterización de las aplicaciones suprayectivas):
La condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f=(F;A,B)$ sea suprayectiva es que exista una aplicación $h=(H;B,A)$ tal que

$$f \circ h = i_B$$

Demostración:

- Si f es suprayectiva:

  Sea el conjunto $F_b = \left\{ a \in A / (a,b) \in F \right\}$

  f suprayectiva $\to \forall b \in B, \exists a \in A / f(a)=b \to (a,b) \in F_b \to F_b \neq \phi$

  Elegimos un elemento cualquiera de F_b que llamaremos $h(b)$, lo cual es posible por el axioma de elección, con lo que definimos una aplicación

  $$h=(H;B,A) \ H=(b,h(b)), b \in B \text{, y es tal que}$$

  $$f(h(b))=(f \circ h)(b)=b \to f \circ h = i_B$$

  por tanto:

  $$\exists h=(H;B,A) \text{ tal que } f \circ h = i_B$$

- Si $\exists h=(H;B,A) / f \circ h = i_B$:

  $\forall b \in B, h(b) \in A \wedge f(h(b))=(f \circ h)(b)=i_B(b)=b$, o sea:

  $$\forall b \in B, \exists a = h(b) \in A / f(a)=b \to f \text{ suprayectiva}$$

Teorema 2.4 (caracterización de las aplicaciones biyectivas):
La condición necesaria y suficiente para que una aplicación $f=(F;A,B)$ sea biyectiva es que existan dos aplicaciones, $g=(G;B,A)$ y $h=(H;B,A)$, tales que $g \circ f = i_A$ y $f \circ h = i_B$. En tal caso, ambas aplicaciones *g* y *h* son únicas y además coinciden.
Demostración:
Como una aplicación biyectiva es, por definición, una aplicación que es inyectiva y suprayectiva, es obvio que, una vez probados los dos teoremas anteriores, han de existir las aplicaciones *g* y *h* indicadas. Probemos, entonces que tales aplicaciones son únicas y coincidentes, para lo cual basta probar la igualdad de ambas.
Usamos la propiedad asociativa de la composición de aplicaciones:

$$g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h \to g \circ i_B = i_A \circ h \to g = h$$

3. Aplicación recíproca.

Se llama aplicación inversa, o aplicación recíproca de la aplicación $f=(F;A,B)$ a una aplicación $g=(G;B,A)$ tal que

$$g\circ f=i_A \quad \text{y} \quad f\circ g=i_B$$

Del teorema 2.4 podemos inferir que solamente las aplicaciones biyectivas tienen aplicación inversa, la cuál es única y también biyectiva. Por tanto, si llamamos f^{-1} a la aplicación inversa de f:

$$f^{-1}=(F^{-1};A,B)$$

su grafo F^{-1} será el recíproco del grafo F, es decir, la primera componente de uno será la segunda componente del otro:

$$\mathrm{Pr}_1 F^{-1}=\mathrm{Pr}_2 F \qquad\qquad \mathrm{Pr}_2 F^{-1}=\mathrm{Pr}_1 F$$

Teorema 3.1: La aplicación recíproca de la composición de dos aplicaciones biyectivas es la composición de sus correspondientes aplicaciones recíprocas en orden inverso al de la composición de ambas:

$$(f\circ g)^{-1}=g^{-1}\circ f^{-1}$$

Demostración:

Para ver que $g^{-1}\circ f^{-1}$ es la recíproca de $f\circ g$, hagamos la composición de ambas, a fin de comprobar que resulta la aplicación identidad. Usamos la propiedad asociativa de la composición de aplicaciones:

$$\left(g^{-1}\circ f^{-1}\right)\left(f\circ g\right)=g^{-1}\circ(f^{-1}\circ f)\circ g=g^{-1}\circ g=i_B$$

Teorema 3.2 (propiedad de involución):

La aplicación inversa de la inversa es la aplicación dada:

$$\left(f^{-1}\right)^{-1}=f$$

Demostración:

Veamos que f es la recíproca de f^{-1}:

$$\left(f^{-1}\right)\circ f=i_A\wedge f\circ\left(f^{-1}\right)=i_B\rightarrow f=\left(f^{-1}\right)^{-1}$$

4. Factorización canónica de una aplicación.

La aplicación canónica:

Toda aplicación $f=(F;A,B)$ tiene asociada una relación de equivalencia R definida en el conjunto inicial A por la condición:

$$\forall x,y\in A,\ xRy\leftrightarrow f(x)=f(y)$$

(dos elementos de A están relacionados por R si tienen la misma imagen)

Esto quiere decir que para toda aplicación f hay un conjunto cociente de A por la relación de equivalencia R, A/R, constituyendo cada clase el conjunto de los elementos de A que tienen la misma imagen por la aplicación f.

$$A/R=\left\{\left[x\right]/\,x\in A\right\}$$

y también quiere decir que para toda aplicación f siempre hay otra aplicación $n=(N;A,A/R)$, por la que cada elemento del conjunto inicial A se le hace corresponder la clase de equivalencia a la que pertenece. Tal aplicación es obviamente suprayectiva por su propia construcción y se denomina *aplicación canónica* asociada a f.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "n"'] & B \\ A/R & \end{tikzcd}$$

n: aplicación canónica

Teorema 4.1:

Dada una aplicación cualquiera $f=(F;A,B)$ y su relación de equivalencia asociada R, se verifica que $\varphi=(\Phi;A/R,f(A))$ es una aplicación biyectiva.

Demostración:

El grafo de esta aplicación es $\Phi=\left\{(\left[x\right],f(x))/\,x\in A\right\}$.

Es unívoco, esto es, no hay elementos en el conjunto inicial A/R que tengan más de una imagen: $\left(\left[x\right],f(x)\right)=\left(\left[x\right],f(x')\right)\rightarrow f(x)=f(x')$

Es inyectivo, ya que: $\left(\left[x\right],f(x)\right)=\left(\left[x'\right],f(x)\right)\rightarrow\left[x\right]=\left[x'\right]$

Es suprayectivo: $\forall f(x)\in f(A),\exists\left[x\right]\in A/R\rightarrow\left(\left[x\right],f(x)\right)\in\Phi$

Teorema 4.2:

Dada una aplicación cualquiera $f=(F;A,B)$ y su relación de equivalencia asociada R, se verifica que $i=(I;f(A),B)$ es una aplicación inyectiva.

Demostración:

Su grafo es $I=\left\{(f(x),y)/\,x\in A,y\in B\right\}$.

Es unívoco: $\left(f(x),y\right)=\left(f(x),y'\right)\rightarrow y=y'$

Su grafo es inyectivo: $\left(f(x),y\right)=\left(f(x'),y\right)\rightarrow f(x)=f(x')$

Sería también suprayectivo, si la aplicación f fuera suprayectiva, pues entonces sería $f(A)=B$ y coincidirían el conjunto inicial y el conjunto final de la aplicación $i=(I;f(A),B)$.

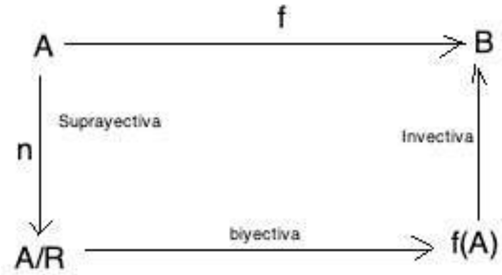
Teorema 4.3:
Una aplicación cualquiera $f=(F;A,B)$ puede factorizarse como composición de una aplicación inyectiva con una aplicación biyectiva y con una aplicación suprayectiva.
Demostración:
Basta tomar las aplicaciones inyectiva y biyectiva de los dos teoremas anteriores, junto con la aplicación canónica, suprayectiva:

$$\forall x\in A,(i\circ\varphi\circ n)(x)=(i\circ\varphi)\left[n(x)\right]=(i\circ\varphi)(\left[x\right])=i\left[\varphi(\left[x\right])\right]=i\left(f(x)\right)=y$$

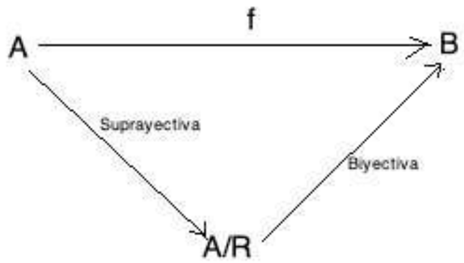
y puesto que $\forall x\in A, f(x)=y$, será:

$$f=i\circ\varphi\circ n$$

De la definición de la aplicación canónica asociada a una aplicación cualquiera, junto con los tres teoremas anteriores, se tiene el siguiente diagrama



Y caso de que la aplicación f dada sea suprayectiva, esto es, que f(A)=B, el diagrama se simplificaría:



5. Bibliografía.

1. Halmos, Paul R.- Teoría intuitiva de conjuntos.
   CECSA, México, 1976
2. Zarisky, O.; Samuel P.- Conmutative Álgebra.
   Springer, New York, 1991
3. Godement, R.-Álgebra.
   Tecnos, Madrid, 1978