Sobre la idea de función analítica de variable compleja

Los problemas más fundamentales de las disciplinas centrales de la ciencia, análisis matemático, geometría, mecánica clásica, electromagnetismo, física cuántica, etc, dan lugar a funciones analíticas, esto es, a funciones indefinidamente diferenciables y desarrollables en serie entera, verificándose que la suma o el producto de funciones analíticas es también una función analítica, y que el cociente de funciones analíticas es también una función analítica en dominios que no anulen al denominador. Lo mismo ocurre para la derivada y la integración de funciones analíticas, que siempre dan funciones analíticas.

Asimismo, con las obvias restricciones, se verifica también que la inversa de una función analítica es también función analítica, o que también son analíticas funciones *f(z)* determinadas por ecuaciones de la forma

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(z).f(z)^k = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k(z).\frac{d^{k)} f(z)}{dz^k} = 0$$

Es, en definitiva, fundamental el estudio de estas funciones para efectuar un tratamiento adecuado de los principales problemas que surgen en el desarrollo de las diferentes ramas de la física o de la matemática.

Tratemos de ver en lo que sigue, con algún detalle, en qué consiste la analiticidad de las funciones complejas de variable compleja.

Introducción:

Los espacios de Banach son espacios vectoriales normalizados y completos, es decir, espacios vectoriales sobre un cuerpo que puede ser el de los números reales o bien el de los números complejos, que están dotados de una métrica o norma y tales que en ellos toda sucesión de Cauchy es convergente.

El cuerpo de los números reales puede ser considerado un espacio vectorial sobre sí mismo, lo mismo que el cuerpo de los números complejos. En ambos espacios existe una métrica o norma dada por

$$\forall x, y \in R,\ d(x,y) = |x-y|, \qquad \forall z,u \in C,\ d(z,u) = |z-u|$$

(El símbolo $|\ |$ representa el valor absoluto en el caso de los números reales, y el módulo en el caso de los números complejos)

Y, también, ambos son completos, ya que toda sucesión de Cauchy de elementos del espacio tiene límite en el espacio. Ambos son, pues, espacios de Banach.

Otro ejemplo de espacio de Banach es el espacio $L(B_1, B_2)$ de las funciones lineales y continuas entre dos espacios de Banach, B_1 y B_2. Es decir, se trata del espacio vectorial de las aplicaciones $f: B_1 \to B_2$ tales que si es k el cuerpo de definición del espacio vectorial:

a) $\forall \alpha, \beta \in B_1, \forall a, b \in k,\ f(a\alpha + b\beta) = af(\alpha) + bf(\beta)$

b) $\forall \varepsilon > 0, \exists r \in R, 0 < r < 1$ tal que $|z_1 - z_2| < r \to |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

La norma en el espacio $L(B_1, B_2)$ dentro del dominio $|z| \leq 1$ se define por

$$|f| = \sup_{|z| \leq 1} |f(z)|$$

Teorema 01: Sea C el espacio de Banach de los números complejos sobre el cuerpo de los números complejos y sea *L(C, C)* el espacio de Banach de las funciones lineales y continuas de C en C. Si es $f \in L(C, C)$ entonces se verifica que

$$\forall z \in C, \exists u \in C / f(z) = u.z \in C$$

Demostración:

$\forall z \in C,\ f(z) = f(1.z) = f(1).z = u.z \in C$

Teorema 02: La aplicación $\varphi : L(C, C) \to C$ tal que $\forall f \in L(C, C), \varphi(f) = f(1) \in C$ es un isomorfismo.

Demostración:

- φ es inyectiva:

Bastará probar que para $f_1, f_2 \in L(C, C) / \varphi(f_1) = \varphi(f_2) \to f_1 = f_2$:

$[\varphi(f_1) = \varphi(f_2) \to f_1(1) = f_2(1)] \Rightarrow \forall z \in C,\ f_1(z) = f_1(1).z \wedge f_2(z) = f_2(1).z \to f_1(z) = f_2(z) \to$

$\to f_1 = f_2$

- φ es sobreyectiva:

Hemos de probar que $\forall z \in C, \exists f \in L(C, C) / \varphi(f) = z$:

$\forall u \in C,\ \exists f \in L(C, C) / f(u) = z.u \to f(1) = z \to \varphi(f) = z$

- φ es lineal:

Se ha de verificar que $\forall f, g \in L(C, C), \forall z, u \in C,\ \varphi(zf + ug) = z\varphi(f) + u\varphi(g)$:

$\forall f, g \in L(C, C), \forall z, u \in C,\ \varphi(zf + ug) = (zf + ug)(1) = zf(1) + ug(1) = z\varphi(f) + u\varphi(g)$

- φ es estable respecto a la composición de funciones:

$\forall f, g \in L(C, C), \forall z, u \in C,\ \varphi(f \circ g) = (f \circ g)(1) = f[g(1)] = f[c] = f(1.c) =$

$= f(1).c = f(1).g(1) = \varphi(f).\varphi(g)$

En definitiva, el espacio de Banach $L(C, C)$ de las funciones lineales continuas de C en C es isomorfo al espacio de Banach complejo C.

Teorema: El isomorfismo $\varphi : L(C, C) \to C$ es isométrico, es decir:

$$\forall \phi \in L(C, C), |\phi| = |\varphi(\phi)|$$

Demostración:

$$\left. \begin{array}{c} |\phi| = \sup\limits_{|z| \leq 1} |\phi(z)| = |\phi(1)| \\ |\varphi(\phi)| = |\phi(1)| \end{array} \right\} \to |\phi| = |\varphi(\phi)|$$

Diferenciación:

Sean B_1 y B_2 espacios de Banach. Sea $M \subseteq B_1$ un subcojunto de B_1 y sea $f : M \to B_2$ una aplicación de M en B_2. Se dice que f es diferenciable en $z_0 \in M$ sii existe una aplicación lineal $\phi : B_1 \to B_2$ tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-\phi(h)|}{|h|}=0$$

La aplicación $\phi : B_1 \to B_2$ se denomina *diferencial de f en z_0* y se representa por *$Df(z_0)$*.
Se dice que $f : M \to B_2$ es *diferenciable en M* si es diferenciable en todo punto de M.
Consideraremos en lo que sigue que ambos espacios de Banach, B_1 y B_2, son el espacio complejo C y la función diferenciable es $f : M \to C$, siendo $M \subseteq C$.
Si la función f es diferenciable en M, obviamente f es también continua en M. La continuidad de la diferencial $\phi = Df(z_0)$ se puede establecer del modo el siguiente.

Teorema 03: La aplicación lineal $\phi : C \to C$, diferencial de f en el dominio M, es continua, es decir, $\phi \in L(C,C)$.
Demostración:
- Sabemos que f es continua y que ϕ es la diferencial de f en el dominio $M \subseteq C$. O sea, se cumple que
$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in R, 0 < r < 1$, $|z_0 + h - z_0| < r \to |f(z_0+h) - f(z_0)| < \varepsilon / 2$
$\forall \varepsilon > 0, \exists r \in R, 0 < r < 1$, $|z_0 + h - z_0| < r \to |f(z_0+h) - f(z_0) - \phi(h)| < (\varepsilon/2).|h|$
o sea: $|h| < r \to (|f(z_0+h) - f(z_0)| < \varepsilon/2) \wedge (|f(z_0+h) - f(z_0) - \phi(h)| < (\varepsilon/2).|h|)$
esto quiere decir que
$|\phi(h)| = |(f(z_0+h) - f(z_0)) - (f(z_0+h) - f(z_0) - \phi(h))| \leq \varepsilon/2 + (\varepsilon/2).|h| < \varepsilon$
Puesto que $\forall z \in C, \exists u \in C / z = u.h$, será $\phi(z) = \phi(u.h) = u.\phi(h)$, de donde, el módulo es $|\phi(z)| = |u|.|\phi(h)| \leq |u|.\varepsilon = \frac{\varepsilon}{r}.|u||h| = \frac{\varepsilon}{r}|u.h| = \frac{\varepsilon}{r}|z|$
Por tanto, por ser ϕ aplicación lineal:

$$|z_1 - z_2| \leq r \to |\phi(z_1) - \phi(z_2)| = |\phi(z_1 - z_2)| \leq \frac{\varepsilon}{r}|z_1 - z_2| \leq \frac{\varepsilon}{r}.r = \varepsilon \to \phi \; continua$$

En definitiva, ϕ es aplicación lineal y continua de C en C por lo que, efectivamente, pertenece al espacio $L(C,C)$.

Teorema 04: Si es $\phi = Df(z_0)$ la diferencial de $f : M \to C$ en $z_0 \in M$ se verifica que

$$\varphi(\phi) = \phi(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Demostración:

$$\frac{|f(z_0+h) - f(z_0) - \phi(h)|}{|h|} = \left|\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \phi(h)}{h}\right| \to \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - \phi(h)}{h} = 0$$

y siendo $\phi(h) = \phi(h.1) = h.\phi(1)$:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h) - f(z_0) - h.\phi(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - \frac{h.\phi(1)}{h}\right) = 0 \to$$

$$\to \varphi(\phi) = \phi(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

Representamos por $f'(z_0)$ al número complejo $\phi(1)$ asociado a la diferencial de f en $z_0 \in M$.

Teorema 05: Sean $M \subseteq C$ y $N \subseteq C$ dominios abiertos del espacio C, y consideremos las funciones de variable compleja $f: M \to C$ y $g: N \to C$. Si f es diferenciable en $z_0 \in M$ y g es diferenciable en $u_0 = f(z_0) \in N$ entonces la función compuesta $l = g \circ f$ es diferenciable en $z_0 \in M$ y se verifica que $Dl(z_0) = Dg(u_0).Df(z_0)$.

Demostración:

Por ser diferenciables, las funciones f y g cumplirán:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - Df(z_0)(h)|}{|h|} = 0 \to f(z_0 + h) = f(z_0) + Df(z_0)(h) + \theta_f(h)$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{|g(u_0 + t) - g(u_0) - Dg(u_0)(t)|}{|t|} = 0 \to g(u_0 + t) = g(u_0) + Dg(u_0)(t) + \theta_g(t)$$

Siendo $\theta_f(h)$ y $\theta_g(t)$ infinitesimales:

$$\forall \varepsilon > 0, 0 < \varepsilon < 1, \exists r > 0 / |h| < r, |t| < r, |\theta_f(h)| \leq \varepsilon |h|, \ |\theta_g(t)| \leq \varepsilon |t| \qquad [5.1]$$

Por el teorema 03, la diferencial de una aplicación entre espacios de Banach es continua y, por consiguiente, acotada, por lo que se infiere que existen constantes $a, b \in R$ tales que

$$|Df(z_0)(h)| \leq a|h|, \quad |Dg(u_0)(t)| \leq b|t| \qquad [5.2]$$

por tanto:

$$|Df(z_0)(h) + \theta_f(h)| \leq |Df(z_0)(h)| + |\theta_f(h)| \leq a|h| + \varepsilon|h| = (a + \varepsilon)|h|$$

$$|Dg(u_0)(t) + \theta_g(t)| \leq |Dg(u_0)(t)| + |\theta_g(t)| \leq b|t| + \varepsilon|t| = (b + \varepsilon)|t|$$

y como ε es menor que la unidad, ambas desigualdades se pueden expresar como:

$$|Df(z_0)(h) + \theta_f(h)| \leq (a+1)|h|, \ |Dg(u_0)(t) + \theta_g(t)| \leq (b+1)|t| \qquad [5.3]$$

y la función compuesta $l = g \circ f$ verifica que:

$$l(z_0 + h) = (g \circ f)(z_0 + h) = g\big(f(z_0 + h)\big) = g\big(f(z_0) + Df(z_0)(h) + \theta_f(h)\big) =$$
$$= g\big(u_0 + (Df(z_0)(h) + \theta_f(h))\big) = g(u_0) + Dg(u_0)(Df(z_0)(h) + \theta_f(h)) + \theta_g(Df(z_0)(h) + \theta_f(h))$$

Como la diferencial $Dg(u_0)$ es lineal:

$$l(z_0 + h) = g(u_0) + Dg(u_0)Df(z_0)(h) + Dg(u_0)\theta_f(h)) + \theta_g(Df(z_0)(h) + \theta_f(h))$$

Es decir:

$$l(z_0 + h) = g(u_0) + Dg(u_0)Df(z_0)(h) + \theta_l(h)$$

donde $\theta_l(h) = Dg(u_0)\theta_f(h) + \theta_g(Df(z_0)(h) + \theta_f(h))$

Veamos que $\theta_l(h)$ infinitésimal:

$$|\theta_l(h)| = |Dg(u_0)\theta_f(h) + \theta_g(Df(z_0)(h) + \theta_f(h))| \leq |Dg(u_0)\theta_f(h)| + |\theta_g(Df(z_0)(h) + \theta_f(h))| \leq$$
$$\leq b|\theta_f(h)| + \varepsilon|Df(z_0)(h) + \theta_f(h)| \leq \varepsilon b|h| + \varepsilon|Df(z_0)(h)| + \varepsilon|\theta_f(h)| \leq \varepsilon b|h| + \varepsilon a|h| + \varepsilon\varepsilon|h| \leq$$
$$\leq (a + b + 1)|h|$$

por consiguiente, se verifica, para la función compuesta:

$$l(z_0+h)=g(u_0)+Dg(u_0)Df(z_0)(h)+\theta_l(h)$$

o sea:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left|(g\circ f)(z_0+h)-(g\circ f)(z_0)-Dg(f(z_0))Df(z_0)(h)\right|}{|h|}=0$$

con lo que se evidencia que es $Dg(f(z_0))Df(z_0)(h)$ la diferencial.

Teorema 06: Sabemos que las funciones continuas en z_0, *Con(z0),* constituyen un *C-álgebra*, es decir, un álgebra sobre el cuerpo *C* de los números complejos. Se verifica que la familia *D(z0)* de las funciones diferenciables en z_0 tiene también estructura de *C-álgebra* y es subálgebra de *Con(z0).*
El cociente de funciones diferenciables en z_0 es también diferenciable en z_0 siempre que el denominador del cociente no se anule en ese punto.
Se verifican para la derivación de funciones complejas las mismas reglas que en la derivación de funciones reales.
Demostración:
Trivialmente, se tiene:

$$\forall f,g\in D(z_0),\ \ f+g\in D(z_0)$$
$$\forall\lambda\in C,\forall f\in D(z_0),\ \ \lambda f\in D(z_0)$$
$$\forall f,g\in D(z_0),\ \ f.g\in D(z_0)$$
$$\forall f,g\in D(z_0)/g(z_0)\neq 0,\ \ f/g\in D(z_0)$$

Siendo las diferenciales:

$$D(f+g)(z_0)=Df(z_0)+Dg(z_0)$$
$$D(\lambda f(z_0))=\lambda Df(z_0)$$
$$D(f.g)(z_0),\ \ Df(z_0).g(z_0)+f(z_0).Dg(z_0)$$
$$D\big(f(z_0)/g(z_0)\big)=\big(Df(z_0).g(z_0)-f(z_0).Dg(z_0)\big)/g(z_0)^2$$

Y las derivadas:

$$D(f+g)(z_0)=\phi\to\phi(1)=f'(z_0)+g'(z_0)$$
$$D(\lambda f)(z_0)=\phi\to\phi(1)=\lambda f'(z_0)$$
$$D(f.g)(z_0)=\phi\to\phi(1)=f'(z_0).g(z_0)+f(z_0).g'(z_0)$$
$$D(f/g)(z_0)=\phi\to\phi(1)=\big(f'(z_0)g(z_0)-g'(z_0).f(z_0)\big)/g(z_0)^2$$

Una función *f(z)* derivable en z_0 se denomina función entera o función holomorfa. La denominación de holomorfa fue introducida por vez primera por dos matemáticos, Briot y Bouquet, que fueron alumnos de Cauchy.

Desarrollo en serie:
Dada la serie formal $S(X)=\sum_{n\geq 0}a_nX^n$ de radio de convergencia $\rho(S)=r$, se dice que la función compleja *f(z)* es desarrollable en serie en el punto z_0, si se puede definir por la expresión $f(z)=S(z-z_0)=\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$, con $|z-z_0|<r$, lo que también es expresable en la forma $f(z)=\sum_{n\geq 0}a_n(z-z_0)^n$, $\forall z\in D(z_0;r)$, donde $D(z_0;r)$ es un disco de centro en z_0 y radio r.

Teorema 07:
Si la función *f(z)* es desarrollable en serie en el punto z_0, entonces es desarrollable en serie en un punto cualquiera del disco $D(z_0;r)$, es decir:
Si existen coeficientes $a_n, n=1,2,...$ tales que $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, $\forall z \in D(z_0;r)$
entonces se cumple que existen $b_n, n=1,2,...$ tales que

$$\forall z_1 \in D(z_0;r), \quad f(z)=\sum_{n\geq 0} b_n(z-z_1)^n, \forall z \in D(z_1;r_1), \quad r_1 < r-|z_1-z_0|$$

Demostración
Si es $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$ podemos, por simplificar, hacer un cambio de variables para expresar el desarrollo en el origen, de la forma $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, obteniéndose:

$$f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n = \sum_{n\geq 0} a_n(z-z_1+z_1)^n = \sum_{n\geq 0} a_n\left[(z-z_1)+z_1\right]^n = \sum_{n\geq 0} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(z-z_1)^k.z_1^{\,n-k} =$$

$$=\sum_{n\geq 0} a_n \sum_{k\geq 0} \binom{n}{k}(z-z_1)^k.z_1^{\,n-k} = \sum_{k\geq 0}\sum_{n\geq 0} a_n \binom{n}{k}(z-z_1)^k.z_1^{\,n-k} = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{n\geq 0} a_n \binom{n}{k} z_1^{\,n-k}\right)(z-z_1)^k$$

y puesto que la serie $\sum_{n\geq 0} a_n \binom{n}{k} z_1^{\,n-k}$ converge absolutamente, se tiene, llamando

$b_k = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{n}{k} z_1^{\,n-k}$: $f(z)=\sum_{k\geq 0} b_k(z-z_1)^k$, $\forall z_1 \in D(0;r)$, $\forall z \in D(z_1;r_1)$, con $r_1 < r-|z_1|$

Veamos que si la función *f(z)* es desarrollable en serie entera en el punto z_0, entonces existe la función derivada $f'(z)$ y también es desarrollable en serie entera en z_0, con igual radio de convergencia. Es decir: $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, con $|z-z_0|<r \rightarrow \quad f'(z)=\sum_{n\geq 0} n.a_n(z-z_0)^{n-1}$ con $|z-z_0|<r$. Enunciamos el teorema de la siguiente forma.

Teorema 08: Sea la serie formal $S(X)=\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ tal que $\rho(S)=r>0$ y sea la serie formal derivada $S'(X)=\sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1}$. Si es $f(z)=\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ entonces:

a) $\forall z \in C(0;r), \exists f'(z) / f'(z)=S'(z).$

b) $\rho(S')=\rho(S)=r>0$

Demostración:

a)

- Del teorema anterior sabemos que $\forall z_1 \in D(0;r), \sum_{n\geq 1} n a_n z_1^{n-1}$ converge absolutamente.
- $\forall z \in D(z_1;r)-\{z_1\}$, es $g(z)=\dfrac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}=\dfrac{b_0+\sum_{n\geq 1} b_k(z-z_1)^k{}'-b_0}{z-z_1}=$

  $=\sum_{n\geq 1} b_k(z-z_1)^{k-1}$

- Puesto que la serie $\sum_{n\geq 1} b_k (z-z_1)^{k-1}$ converge $\forall z \in D(z_1; r_1)$, se tiene que si es $T(X) = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$, será $\rho(T) \geq r$.
- Esto quiere decir que la función $g(z) = \sum_{n\geq 1} b_k (z-z_1)^{k-1}$ es continua en $D(z_1; r_1)$ y $f'(z_1) = \lim_{z\to z_1} g(z) = g(z_1) = b_1 = S'(z_1)$. O sea:

$$f'(z_1) = S'(z_1) = \sum_{n\geq 1} n a_n z_1^{\,n-1}$$

b) De lo anterior, $\rho(S') \geq r$. Veamos también que se deduce que $\rho(S') \leq r$:
Si $X < \rho(S')$ la serie $\sum_{n\geq 1} n|a_n|x^{n-1}$ converge, y siendo $\sum_{n\geq 1} |a_n|x^n \leq \sum_{n\geq 1} n|a_n|x^{n-1}$ se tiene que $\sum_{n\geq 1} |a_n|x^n$ es convergente, por lo que $X \leq r$ y $\rho(S') \leq r$

Corolario a los teoremas 07 y 08:
Toda función compleja de variable compleja que sea desarrollable en serie entera en un dominio abierto del plano complejo es indefinidamente diferenciable en dicho dominio, pues aplicando reiteradamente el teorema 08 encontramos que

$f^{n)}(z)$ existe y es $f^{n)} = S^{n)}(z)$

Definición de función analítica:
Una función definida en un dominio abierto D del plano complejo se dice que es analítica en tal dominio si es desarrollable en serie entera en todo punto de D.

Bibliografía:

Cartan, H.; Teoría elemental de las funciones analíticas de una y varias variables, Madrid Selecciones Científicas , 1968.
Apóstol, T. M.; Análisis Matemático, Editorial Reverté, 1977
Caratheodory, C.; Theory of functions of a complex variable, AMS Chelsea Publishing, 2000
Markushevich, A. I.; Teoría de las funciones analíticas, Urmo S.A. de Ediciones, 1977