ANÁLISIS MATEMÁTICO, LA PENDIENTE Y LA VELOCIDAD

Joaquín González Álvarez

Con este trabajo nos proponemos mostrar un método didáctico elemental de Análisis Matemático que hemos ideado como alternativa de los usuales, a un nivel asequible para graduados de un Bachillerato (High School) bien asimilado.

Se suelen presentar como antecedentes próximos en el tiempo, del Análisis Matemático o Cálculo Infinitisimal, el concepto de límite, la serie de Taylor, la geometría analítica, los aportes de Fermat, entre otros. En el método que proponemos acudiremos sólo al concepto de límite y a la geometría analítica. Comenzaremos ocupándonos de la ecuación de la recta:

$$ax + by + c = 0$$

despejamos expresando el resultado así:

$$y = mx + k \qquad (1)$$

donde m es la pendiente, llamada de este modo a la tangente del ángulo que forma la recta al cortar el eje de abscisas y k es la ordenada del punto de intersección. Nos interesa para nuestro objetivo determinar el incremento ∇y de y al incrementar x en ∇x, para lo cual procedemos así:

$$y + \nabla y = m(x + \nabla x) + k$$

despejando ∇y y dividiendo ambos miembros por ∇x obtenemos la relación:

$$m = \nabla y / \nabla x \qquad (2)$$

Esta relación entre dos incrementos, el de la variable dependiente entre el de la variable independiente será ESENCIAL en la fundamentación del cálculo infinitesimal o análisis matemático, pues es a partir de esa CRUCIAL relación que se introducirá el concepto de derivada de la variable dependiente o función, respecto a la variable independiente o abscisa. La denominación *infinitesimal* del cálculo se debe a que los incrementos de las variables serán tan pequeños que se considerarán como prácticamene cero, lo cual en términos matemáticos, como que el incremento tiende al *límite* cero y se smbolizará por $\lim \to 0$.

Como antes adelantamos una variable dependiente como y dependiente de x, en términos matemáticos se expresa como que y es *función* de x simbolizándose por $y = f(x)$. Con lo explicado podemos presentar la definición de *derivada* de una función df/dx, simbolicamente de esta forma:

$$df/dx = \lim_{\nabla x \to 0} \nabla y / \nabla x \qquad (3)$$

Veamos como podríamos obtener la derivada de una función del tipo $y = const.x^n$ utilizando el sencillo ejemplo $y = x^2$. Para ello damos los pasos que seguimos para obtener (2):

$$y + \nabla y = (x + \nabla x)^2$$

$$\nabla y = x^2 + 2x\nabla x + \nabla x^2 - x^2$$

$$\nabla y / \nabla x = 2x + \nabla x$$

Y por último llevando a $\lim \nabla x \to 0$ obtenemos:

$$dy/dx = 2x$$

La regla práctica para cualquier *n* será:

$$dy/dx = nx^{n-1}$$

Al cálculo infinitesimal se le conoce también como *Cálculo Diferencial e Integral*. El término diferencial de una variable refiere a cada uno de los términos del símbolo de derivada dy/dx, y se cumplirá que el diferencial de y es $dy = y'dx$ o $dy = f'(x).dx$.

Esta expresión permite determinar que $f(x)$ dió lugar a cierta $df(x)/dx$, esto es, permite calcular la *antiderivada* conociendo dy/dx, procedimiento que se conoce como *integración*, objeto de estudio del *Cálculo Integral*.

Mostraremos el proceso de integración a partir de la antes vista expresión:

$$dy = f'(x).dx$$

aplicando a ambos miembros el operador integral

$$\int dy = \int f'(x).dx \qquad (4)$$

En el primer miembro el operador integral "cancela" la *d* de la diferencial quedando sólo y, o mejor, $f(x)$.

Siguiendo con el ejemplo de la derivada $f'(x)$ de $f(x) = x^2$, que vimos es $f'(x) = 2x$

sustituímos en (4): $f(x) = \int 2x.dx$

y hagamos todos los pasos contrarios a la derivación, sumamos uno al exponente que ahora será 2 y dividimos por ese 2 obteniendo:

$$f(x) = x^2$$

esto es, hemos encontrado la antiderivada de $2x$ mediante la aplicación de la integración.

En la líneas anteriores hemos utilizado la igualdad $dy/dx = y'$ que se utilizará cuando convenga escribir más compactamente una expresión matemática si así se desea.

Llegado a este punto nos parece de interés realizar una referencia histórica a la fundación del cálculo infinitesimal en el siglo XVII. Dos de los mas relevantes exponentes del intelecto humano de todos los tiempos el inglés Sir Isaac Newton y el alemán Gottfield Leibniz, independientemente uno del otro, sentaron las bases y métodos del cálculo infinitesimal, suscitando una lamentable controversia por la autoría de la monumental obra. En nada fundamental diferían ambas proposiciones, sólo se advertían en algunos símbolos utilizados como los antes vistos de la derivada, mientras Newton utilizaba y', Gottfield Leibniz acudía a dy/dx.

Newton. Retrato de Godfrey Kneller, 1702. Imagen de Wikipedia

Leibnitz. Retrato de Christoph Bernhard. W Francke. Imagen de Wikipedia

Evidentemente dy/dx no solamente es mas útil, sino que está mas de acuerdo con la crucial relación $\nabla y/\nabla x$ donde x e y simbolizan cualquier abscisa y cualquier ordenada. Justificadamente se reconoce la gran superioridad intellectual de Sir Issac Newton al cual reconoce el mas notable fisicomatemático de la historia no sólo por sus aportes matemáticos sino también y principalmente por fundar la *Mecánica Clásica* totalmente vigente en la actualidad.

Como adelantamos en el título, la velocidad será tema a tratar. Hemos visto y recalcado como en el cálculo infinitesimal la relación

Incremento de variable dependiente/incremento de variable independiente

que en geometría analítica ha sido $\nabla y/\nabla x$, en mecánica las dependientes (ordenadas) serán el espacio s y la velocidad v, con el tiempo t como variable independiente (abscisa). Así la cosas tendremos que la velocidad instantánea será: $v = \lim_{\nabla t \to 0} \nabla s/\nabla t$, o sea, que tal como hemos aprendido $v = ds/dt$.

De manera que si $s = \frac{1}{2}at^2$ donde a es la aceleración constante, podemos calcular la velociad derivando el espacio respecto al tiempo:

$$v = ds/dt$$

$$v = at$$

y de paso hemos visto que $a = dv/dt$.

A continuación pasamos a dar una idea del Teorema Fundamental del Cálculo Infinitisimal, mediante un acercamiento intuitivo didáctico, el único posible ofrecer a quienes sólo han vencido una enseñanza media superior bien asimilada.

En un sistema de coordenadas x, y, vamos a calcular el área $A(x)$ bajo una curva $y = f(x)$. Del área separamos una franja por dos verticales con base entre las abscisas x y $x+h$, El área de esa franja rectangular es:

$A(x+h) - A(x)$ que será igual a la base por la altura $hf(x)$ por lo cual:

$f(x) = \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ y para un valor infinitesimal de h tendremos:

$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}$ donde vemos por lo ya aprendido que:

$f(x) = dA(x)/dx$ y por tanto:

$dA = f(x).dx$ e integrando:

$$A = \int f(x).dx \qquad (5)$$

La igualdad (5) es una forma abreviada del Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal donde se presenta la integral como área si bien nos fijamos el área bajo una curva es una suma de las áeas de la franjas infinitesimales, y es por tal motivo que el operador integral semeja una S alargada inicial de suma.

Somos de la opinión que el método didáctico que proponemos será de gran utilidad para estudiantes que se preparan para comenzar sus estudios universitarios en carreras científicas y técnicas. Cuando reciban explicaciones mas rigurosas con el empleo de expresiones matemáticas intrincadas, ya SABRÁN DE QUE SE LES ESTÁ HABLANDO, algo que evitará tempranas lamentables deserciones.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com