Una Introducción a las Curvas Algebraicas Planas y sus puntos singulares

1. Conjuntos algebraicos

Si consideramos el espacio afín n-dimensional $E^n(K)$, donde K es un cuerpo algebraicamente cerrado, por ejemplo el cuerpo R de los números reales, podemos considerar los lugares definidos implícitamente, esto es, definidos por ecuaciones de la forma $f=0$, o, más concretamente, por el conjunto $V(f)$ de los ceros de estas funciones f, es decir, por las soluciones de las ecuaciones. Diremos que $V(f)$ es un conjunto algebraico cuando las f son polinomios en una o varias indeterminadas.

$$V(f)\ conj.algebráico \leftrightarrow f \in K[x_1,...,x_n] \wedge V(f)\ ceros\ de\ f$$

En el anillo $P = K[x_1,...,x_n]$ de los polinomios en n indeterminadas, cualquier familia F de polinomios, $F \subseteq P$, engendra un ideal $I(F)$ del anillo P. Asimismo, si llamamos $V(F)$ al conjunto de sus ceros, también engendran un ideal $I(V(F))$ de dicho anillo.

2. Hipersuperficies algebraicas

Una hipersuperficie algebraica n-dimensional es el conjunto algebraico $V(f)$ de los ceros de un polinomio $f \in P = K[x_1,...,x_n]$. El grado de dicho polinomio, $grad(f)$, puede ser cualquiera. Sin embargo, el caso de $grad(f)=1$ define las estructuras planas.

Si $grad(f)=1$, $V(f)$ es un hiperplano n-dimensional, que sería el conjunto de los ceros del polinomio $f = a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n$, es decir, las soluciones de la ecuación lineal

$$a_0 + a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$$

En el caso de que $grad(f)=1$ y $n=3$, $V(f)$ es un plano del espacio ordinario, ceros del polinomio $f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_3 + a_3x_3$, o sea, soluciones de la ecuación lineal

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_3 + a_3x_3 = 0$$

Ejemplos:

1) El conjunto *V(f)* de los ceros del polinomio $f = x_1^3 - 2x_2 + \frac{1}{5}x_3^2 - 7x_4 + 1$, es decir, las soluciones de la ecuación $x_1^3 - 2x_2 + \frac{1}{5}x_3^2 - 7x_4 + 1 = 0$, define una hipersuperficie algebraica tetradimensional.

2) El conjunto *V(f)* de los ceros del polinomio $f = 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 7x_5 - 2$, es decir, el conjunto de las soluciones de la ecuación $5x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 - 7x_5 - 2 = 0$ define un hiperplano del espacio afín de 5 dimensiones.

3) El conjunto *V(f)* de los ceros del polinomio $f = -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4$, es decir, el conjunto algebraico de las soluciones de la ecuación $-2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4 = 0$ define un plano del espacio ordinario tridimensional.

3. Curvas algebraicas

Una curva algebraica n-dimensional es el conjunto algebraico $V(f_1,...,f_{n-1})$ de los ceros de los n-1 polinomios $f_1,...,f_{n-1} \in P = K[x_1,...,x_n]$ primos entre sí. Los grados de dichos polinomios, $grad(f_1),..., grad(f_n)$, pueden ser cualesquiera. Sin embargo, el caso de $grad(f_1)=...=grad(f_n)=1$ define las líneas rectas.

Si n=3, es decir, si se trata del espacio $E^3(K)$, los ceros de dos polinomios $f_1, f_2 \in K[x_1.x_2, x_3]$, primos entre sí, definen una curva algebraica del espacio tridimensional.

Si n=3 y $grad(f_1)=grad(f_2)=1$, siendo los polinomios $f_1, f_2 \in K[x_1.x_2, x_3]$ primos entre sí, entonces $V(f_1,f_2)$ define una línea recta del espacio tridimensional.

Si n=2, el conjunto de los ceros de un polinomio $f \in P = K[x_1, x_2]$ define una curva algebraica del plano, es decir, una curva algebraica plana. Si, además, fuera grad(f)=1, entonces dicha curva sería una línea recta.

Ejemplos:

1) El conjunto algebraico de los ceros de los tres polinomios

$$\begin{cases} f_1 = & 3x_1^2 + x_3 - 7x_4^5 - 2 \\ f_2 = & x_1 - 7x_2 + x_3^2 \\ f_3 = & 2x_2^2 - x_3 + 5x_4^3 + 7 \end{cases}$$

define una curva algebraica del espacio tetradimensional.

2) El conjunto algebraico de los ceros de los dos polinomios

$$\begin{cases} f_1 = & x_1^2 - 3x_2^3 + x_3 + 5 \\ f_2 = & -3x_2^5 + 5x_3 - 9 \end{cases}$$

define una curva algebraica del espacio tridimensional ordinario.

3) El conjunto algebraico de los ceros del polinomio

$$\{ f = \quad 3x_1^2 - x_2$$

define una curva algebraica del espacio bidimensional ordinario, es decir, una curva del plano.

4) El conjunto algebraico de los ceros de los dos polinomios

$$\begin{cases} f_1 = & 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2 \\ f_2 = & -3x_1 - 7x_3 - 1 \end{cases}$$

define una línea recta del espacio tridimensional ordinario.

5) El conjunto algebraico de los ceros del polinomio

$$\{ f = -x_1 + 5x_2 + 2$$

define una línea recta del plano.

4. Curvas algebraicas planas

4.1. Puntos simples y puntos singulares:

Dada un curva algebraica plana f(x,y) ($f \in K[x,y]$), un punto cualquiera $P(a,b)$ de dicha curva ($f(a,b)=0$) es simple si al menos una de sus derivadas parciales es distinta de cero:

$$P(a,b) \in f(x,y) \; simple \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a \neq 0 \;\vee \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b \neq 0$$

En un punto simple, por consiguiente, la primera derivada no se anula.

Un punto singular es un punto no simple, es decir, un punto donde se anula la primera derivada:

$$P(a,b) \in f(x,y) \sin gular \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a = 0 \;\vee \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b = 0$$

En un punto singular, en definitiva, se verifica que:

$$f(a,b)=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_a=0,\quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_b=0$$

4.2. Desarrollo de Taylor:

Desarrollando el polinomio que representa *f(x,y)*, en suma de Taylor en el punto P(a,b), se tiene:

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{1}{1!}\left\{f_x\,(a,b).(x-a)+f_y\,(a,b).(y-b)\right\}+\frac{1}{2!}\left\{f_x^{2)}(a,b).(x-a)^2+f_y^{2)}(a,b).(y-b)^2\right\}+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left\{f_x^{n)}(a,b).(x-a)^n+f_y^{n)}(a,b).(y-b)^n\right\}$$

o bien:

$$f(x,y)=f(a,b)+(f_{1p})+(f_{2p})+\ldots+(f_{np})$$

Si $P(a,b)\in f(x,y)$ es un punto simple se tendrá:

$$f(x,y)=(f_{1p})+(f_{2p})+\ldots+(f_{np})$$

Si $P(a,b)\in f(x,y)$ es un punto singular será:

$$f(x,y)=(f_{mp})+(f_{(m+1)p})+\ldots+(f_{np})$$

donde *m* es mayor que la unidad (m>1). A *m* se le llama *multiplicidad del punto P(a,b) con respecto a la curva algebraica f(x,y)*.

Obviamente, los puntos simples son de multiplicidad 1 con respecto a la curva algebraica que los contiene.

5. Recta tangente a una curva algebraica plana:

5.1. En un punto simple:

En punto simple, P(a,b), de multiplicidad 1 respecto a la curva que le contiene, el primer término de su desarrollo de Taylor que no se anula está dado por

$$(f_{1p})=\frac{1}{1!}\left\{f_x\,(a,b).(x-a)+f_y\,(a,b).(y-b)\right\}$$

La recta $(f_{1p})=0$ define la tangente a la curva algebraica en dicho punto:

$$f_x\,(a,b).(x-a)+f_y\,(a,b).(y-b)=0$$

Es la única tangente en el punto, por lo que cabe definir como normal en el mismo a la recta

$$\frac{x-a}{f_x(a,b)}-\frac{y-b}{f_y(a,b)}=0$$

Ejemplo:
Sea la curva algebraica plana $f(x,y)=x^2-3y-1$ definida por el conjunto algebraico de sus ceros. Determinemos su tangente en el punto (2,1).

Será: $f_x(2,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_2=2x\big|_2=4$, $\quad f_y(2,1)=\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_1=-3$

La tangente:

$$f_x\,(2,1).(x-2)+f_y\,(2,1).(y-1)=0\Rightarrow 4.(x-2)-3(y-1)=0\Rightarrow y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}$$

La normal:

$$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-3}=0\Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$$

5.2. En un punto singular de multiplicidad m:

En punto singular, P(a,b), de multiplicidad m respecto a la curva que le contiene, el primer término de su desarrollo de Taylor que no se anula está dado por

$$(f_{mp})=\frac{1}{m!}\left\{f_x^{m)}(a,b).(x-a)^m+f_y^{m)}(a,b).(y-b)^m\right\}$$

Veamos que existen varias tangentes en ese punto. Para ello dividamos toda la expresión por $(y-b)^m$:

$$\frac{(f_{mp})}{(y-b)^m}=\frac{1}{m!}\left\{f_x^{m)}\left(\frac{x-a}{y-b}\right)^m+f_y^{m)}\right\}=Az^m+B\in K[z]$$

habiendo llamado: $z=\dfrac{x-a}{y-b}$, $\quad A=\dfrac{1}{m!}f_x^{m)}$, $\quad B=\dfrac{1}{m!}f_y^{m)}$

por ser K cuerpo algebraicamente cerrado, el polinomio Az^m+B tiene m raíces, c_j, repetidas o no:

$$\frac{(f_{mp})}{(y-b)^m} = Az^m + B = \prod_{j=1}^{m}(z-c_j)$$

O sea:

$$\left(f_{mp}\right) = (y-b)^m \prod_{j=1}^{m}(z-c_j) = \prod_{j=1}^{m}(z.(y-b)-c_j(y-b)) = \prod_{j=1}^{m}((x-a)-c_j(y-b))$$

y las rectas

$$(x-a)-c_j(y-b)=0, \quad j=1,\ldots,m$$

definen m tangentes, repetidas o no, de la curva algebraica f(x,y) en un punto singular P(a,b) de multiplicidad m.

La multiplicidad de cada tangente (el numero de veces que se repite) es también el numero de veces que se repite la correspondiente raíz c_j.

Así, si son s las raíces distintas, y r_j el número de veces que se repite cada c_j de ellas, se verifica que

$$m = r_1 + \ldots + r_s$$

y podemos escribir:

$$\left(f_{mp}\right) = \prod_{j=1}^{s}((x-a)-c_j(y-b))^{r_j}$$

donde r_j, i=1,...,s es, por tanto, la multiplicidad de cada una de las s tangentes distintas a la curva en el punto singular P(a,b) de multiplicidad m.

6. Bibliografía

FULTON, W., Curvas Algebraicas. Editorial Reverté, 1971
ABELLANAS, P., Geometría Básica, Editorial Romo, Madrid, 1969
SERRE, Jean-Pierre, Algebre Locale. Multiplicités, Springer Verlag, 1975
SEIDENBERG, Abraham, Elements of the Theory of Algebraic Curves, Addison-Wesley, 1968