Ajuste de funciones
Ajuste con polinomios ortogonales

1. Idea de Interpolación y de ajuste. Soporte y base de ajuste:

Es frecuente encontrar en el análisis numérico funciones $y=f(x)$ definidas por tablas, de forma que solo se conocen los valores que toman en un conjunto finito de puntos, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$:

x_0	x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n
y_0	y_1	y_2	...	y_{n-1}	y_n

Con la necesidad de conocer valores de tal función $f(x)$ en puntos distintos de los que ya figuran en la tabla.

El problema de la interpolación consiste en la determinación de una función $g(x)$ que en los puntos de la tabla dada, $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, toma los mismos valores, $y_0, y_1,\ldots,y_{n-1}, y_n$, de la función f(x) tabulada, mientras que en los puntos intermedios se toman como valores de $f(x)$ los valores que tome la función interpoladora $g(x)$.

Son muchos los fenómenos experimentales que se comportan en ciertos intervalos como funciones de determinadas variables. Realizando su medición en un número finito de puntos se obtendrá una tabla y, al interpolar, una función que describe con un cierto error el fenómeno tabulado.

Teniendo en cuenta el espacio de las funciones de una variable real y en él, el conjunto de $n+1$ funciones $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), g_n(x)$, de forma que cualquier subconjunto de las mismas es linealmente independiente, se trata de encontrar un polinomio generalizado

$$p_n(x)=c_0.g_0(x)+c_1.g_1(x)+\ldots+c_{n-1}.g_{n-1}(x)+c_n.g_n(x)$$

tal que

$$p_n(x_i)=y_i,\ i=0,1,\ldots,n-1,n$$

Los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n$, se denominan *soporte* de la interpolación, y el error cometido depende tanto de la base de la interpolación, las funciones $g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), g_n(x)$, como del criterio escogido para la determinación de los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}, c_n$, del polinomio generalizado $p_n(x)$.

Sin embargo, cuando se conoce una base de $m+1$ funciones

$$g_0(x), g_1(x), \ldots, g_{m-1}(x), g_m(x)$$

con m<n, es decir, en número menor que el número de puntos del soporte, el problema de determinar las $p(x_i)=y_i,\ i=0,1,\ldots,n-1,\ n$, no tiene solución, siendo preciso idear otros métodos y otros criterios de aproximación. El problema ahora es el conocido como *problema del ajuste de funciones*.

En lo que sigue vamos a obtener como base del ajuste un conjunto de polinomios que sean ortogonales en los puntos del soporte, y determinaremos los coeficientes del polinomio generalizado del ajuste minimizando la norma euclidiana del vector de errores, esto es, del vector definido por las diferencias entre los valores dados en los puntos del soporte y los valores que en tales puntos toma el polinomio generalizado.

2. Determinación de un conjunto de polinomios ortogonales sobre un soporte dado:

Dos polinomios, $p_j(x)$ y $p_k(x)$, de grados respectivos j y k, se dicen ortogonales en el soporte $\{(x_0,y_0),(x_1,y_1),...,(x_n,y_n)\}$ sii se verifica que

$$\sum_{i=0}^{n} p_j(x_i).p_k(x_i) = \delta_{jk} \equiv \begin{cases} 0, si\ j \neq k \\ 1, si\ j = k \end{cases}, \quad i = 0,1,\ldots,n$$

Consideremos los *m+1* polinomios, ortogonales en los puntos del soporte dado

$$\{p_j(x)\}_0^m \equiv \{p_0(x), p_1(x), ..., p_m(x)\}$$

de expresiones:

$$p_j(x) = \sum_{k=0}^{j} \beta_{jk} x^k, \quad j = 0,1,...,m$$

esto es:

$$p_0(x) = \beta_{00} x^0$$
$$p_1(x) = \beta_{10} x^0 + \beta_{11} x^1$$
$$p_2(x) = \beta_{20} x^0 + \beta_{21} x^1 + \beta_{22} x^2$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$p_m(x) = \beta_{m0} x^0 + \beta_{m1} x^1 + \beta_{m2} x^2 + \ldots + \beta_{mm} x^m$$

- Si despejamos las $x^0, x^1, ..., x^{m-1}, x^m$ en función de estos polinomios obtendremos expresiones de la forma

$$x^j = \sum_{k=0}^{j} \alpha_{jk} p_k(x), \quad j = 0,1,\ldots,m$$

o sea:

$$x^0 = \alpha_{00} p_0(x)$$
$$x^1 = \alpha_{10} p_0(x) + \alpha_{11} p_1(x)$$
$$x^2 = \alpha_{20} p_0(x) + \alpha_{21} p_1(x) + \alpha_{22} p_2(x)$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$x^{m-1} = \alpha_{m-10} p_0(x) + \alpha_{m-11} p_1(x) + \ldots + \alpha_{m-1m-1} p_{m-1}(x)$$
$$x^m = \alpha_{m0} p_0(x) + \alpha_{m1} p_1(x) + \ldots + \alpha_{mm} p_m(x)$$

que podemos escribir en forma compacta así:

$$x^j = \alpha_{jj} p_j(x) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x), \quad j = 0,1,\ldots,m \qquad [2.1\_1]$$

y en cada punto x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, del soporte se verifica que

$$x_i^j = \alpha_{jj} p_j(x_i) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i), \quad j = 0,1,\ldots,m \qquad [2.1\_2]$$

- Si elevamos al cuadrado y sumamos respecto a *i*:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^{2j} = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_{jj} p_j(x_i) + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(\alpha_{jj} p_j(x_i) \right)^2 + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)^2 +$$
$$+ 2\alpha_{jj} \sum_{i=0}^{n} \left(p_j(x_i) \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)$$

Teniendo en cuenta que se trata de polinomios ortogonales en los puntos del soporte, será:

$$\sum_{i=0}^{n} p_j^2(x_i) = 1, \quad j = 0,1,\ldots,m$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2 p_k^2(x_i) = \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2$$

$$2\alpha_{jj} \sum_{i=0}^{n} \left(p_j(x_i) \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) \right) = 0$$

con lo que resulta:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^{2j} = \alpha_{jj}^2 + \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2$$

o bien

$$\alpha_{jj}^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^{2j} - \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk}^2 \quad j = 0,1,\ldots,m \qquad [2.1\_3]$$

- Si multiplicamos [2.1_2] por el polinomio ortogonal $p_h(x_i)$ y sumamos respecto a *i*:

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^j p_h(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_{jj} p_j(x_i) p_h(x_i) + \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x_i) p_h(x_i) \right), \quad j = 0,1,\ldots,m$$

por lo que

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^j p_h(x_i) = 0 + \alpha_{jh}, \quad j = 0,1,\ldots,m; h = 0,1,\ldots,m$$

Entonces

$$\alpha_{jh} = \sum_{i=0}^{n} x_i^j p_h(x_i), \quad j = 0,1,\ldots,m; \ h = 0,1,\ldots,m \qquad [2.1\_4]$$

- Si en [2.1_1] despejamos $p_j(x)$ se tiene

$$p_j(x) = \frac{1}{\alpha_{jj}} \left(x^j - \sum_{k=0}^{j-1} \alpha_{jk} p_k(x) \right), \quad j = 0,1,\ldots,m \qquad [2.1\_5]$$

La expresión recurrente [2.1_5] establece la dependencia de un polinomio cualquiera, $p_j(x)$, de todos los polinomios de grado inferior, $p_0(x)$, $p_1(x)$,…,$p_{j-1}(x)$, que podemos determinar calculando las constantes a_{jj} y a_{jk} que figuran en la misma, usando respectivamente las expresiones [2.1_3] y [2.1_4]. Veamos a continuación como ir determinando todos los polinomios ortogonales desde estas expresiones.

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_{00}}\left[x^0 - \sum_{k=0}^{0-1}\alpha_{0k}p_k(x)\right]$$
$$p_1(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\left[x^1 - \sum_{k=0}^{1-1}\alpha_{1k}p_k(x)\right]$$
$$p_2(x) = \frac{1}{\alpha_{22}}\left[x^2 - \sum_{k=0}^{2-1}\alpha_{2k}p_k(x)\right]$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$p_m(x) = \frac{1}{\alpha_{mm}}\left[x^m - \sum_{k=0}^{m-1}\alpha_{mk}p_k(x)\right]$$

Calculamos las constantes de forma sistemática, usando [2.1_3] y [2.1_4].

- Polinomio $p_0(x)$:

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_{00}}\left[x^0 - \sum_{k=0}^{0-1}\alpha_{0k}p_k(x)\right]$$

Puesto que el sumatorio es nulo, calculamos, usando [2.1_3]:

$$\alpha_{00}^2 = \sum_{i=0}^{n}x_i^{2.0} - \sum_{k=0}^{0-1}\alpha_{0k}^2 = \sum_{i=0}^{n}1 - 0 = n+1-0 = n+1 \rightarrow \alpha_{00} = \sqrt{n+1}$$

$$p_0(x) = \frac{1}{\alpha_{00}}\left[x^0 - \sum_{k=0}^{0-1}\alpha_{0k}p_k(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{n+1}}[1-0] = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Por tanto queda:

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad [2.1\_6]$$

- Polinomio $p_1(x)$:

$$p_1(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\left[x^1 - \sum_{k=0}^{1-1}\alpha_{1k}p_k(x)\right] = \frac{1}{\alpha_{11}}\left[x - \alpha_{10}p_0(x)\right]$$

usando [2.1_4]:

$$\alpha_{10} = \sum_{i=0}^{n}x_i^1 p_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{n}x_i$$

usando [2.1_3]:

$$\alpha_{11}^2 = \sum_{i=0}^{n}x_i^{2.1} - \sum_{k=0}^{1-1}\alpha_{1k}^2 = \sum_{i=0}^{n}x_i^2 - \sum_{k=0}^{0}\alpha_{1k}^2 = \sum_{i=0}^{n}x_i^2 - \alpha_{10}^2 = \sum_{i=0}^{n}x_i^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 \rightarrow \alpha_{11} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\alpha_{11}}\left[x - \alpha_{10} p_0(x)\right] = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}}\left[x - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{n} x_i \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right]$$

Resulta por tanto:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}}\left[x - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i\right]$$

[2.1_7]

- Polinomio $p_2(x)$:

$$p_2(x) = \frac{1}{\alpha_{22}}\left[x^2 - \sum_{k=0}^{2-1} \alpha_{2k} p_k(x)\right] = \frac{1}{\alpha_{22}}\left[x^2 - \alpha_{20} p_0(x) - \alpha_{21} p_1(x)\right]$$

usando [2.1_4]:

$$\alpha_{20} = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 p_0(x_i) = \frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{n} x_i^2$$

$$\alpha_{21} = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 p_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x_i^2}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2}}\left[x - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i\right]$$

usando [2.1_3]:

$$\alpha_{22}^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^{2.2} - \sum_{k=0}^{2-1} \alpha_{2k}^2 = \sum_{i=0}^{n} x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2 \rightarrow \alpha_{22} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2}$$

En definitiva, se obtiene, en función de α_{20} y α_{21}:

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n} x_i^4 - \alpha_{20}^2 - \alpha_{21}^2}}\left[x^2 - \alpha_{20} p_0(x) - \alpha_{21} p_1(x)\right]$$

[2.1_8]

Siguiendo con el proceso, el último de los polinomios del conjunto, $p_m(x)$, tendría una expresión análoga:

$$p_m(x) = \frac{1}{\alpha_{mm}}\left[x^m - \alpha_{m0} p_0(x) - \alpha_{m1} p_1(x) - ... - \alpha_{mm-1} p_{m-1}(x)\right]$$

3. Un ejemplo numérico de obtención de polinomios ortogonales en un soporte dado:

Consideremos el soporte constituido por los 4 puntos del plano siguientes:

$$\{(-1,-1),(1,1),(3,2),(4,1)\}$$

Y obtengamos un conjunto de tres polinomios, $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$, que sean ortogonales en tales puntos:

- Polinomio $p_0(x)$:

De [2.1_6]:

$$p_0(x)=\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}$$

- Polinomio $p_1(x)$:

De [2.1_7]:

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n}x_i^2-\frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=0}^{n}x_i\right)^2}}\left[x-\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}x_i\right]$$

y siendo en este ejemplo:

$$\sum_{i=0}^{3}x_i=-1+1+3+4=7,\quad \sum_{i=0}^{3}x_i^2=1+1+9+16=27,\quad \sum_{i=0}^{3}x_i^4=1+1+81+256=339$$

será:

$$p_1(x)=\frac{1}{\sqrt{59}/2}\left[x-\frac{7}{4}\right]=\frac{2}{\sqrt{59}}x-\frac{7}{2\sqrt{59}}$$

- Polinomio $p_2(x)$:

De [2.1_8]:

$$p_2(x)=\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n}x_i^4-\alpha_{20}^2-\alpha_{21}^2}}\left[x^2-\alpha_{20}p_0(x)-\alpha_{21}p_1(x)\right]$$

y siendo:

$$\alpha_{20}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{i=0}^{3}x_i^2=\frac{27}{2}$$

$$\alpha_{21}=\sum_{i=0}^{3}x_i^2p_1(x_i)=1.p_1(-1)+1.p_1(1)+3^2.p_1(3)+4^2.p_1(4)=$$

$$=-\frac{11}{2\sqrt{59}}-\frac{3}{2\sqrt{59}}+\frac{45}{2\sqrt{59}}+\frac{144}{2\sqrt{59}}=\frac{175}{2\sqrt{59}}$$

$$\alpha_{22}^2=\sum_{i=0}^{3}x_i^4-\alpha_{20}^2-\alpha_{21}^2=339-\frac{729}{4}-\frac{30625}{236}=\frac{6368}{236}\rightarrow\alpha_{22}=\sqrt{\frac{6368}{236}}$$

$$\alpha_{20}p_0(x)=\frac{27}{2}.\frac{1}{2}=\frac{27}{4}, \quad \alpha_{21}p_1(x)=\frac{175}{2\sqrt{59}}\left[\frac{2}{\sqrt{59}}x-\frac{7}{2\sqrt{59}}\right]=\frac{175}{59}x-\frac{1225}{236}$$

por lo que

$$-\alpha_{20}p_0(x)-\alpha_{21}p_1(x)=-\frac{27}{4}-\frac{175}{59}x+\frac{1225}{236}=-\frac{700}{236}x-\frac{368}{236}$$

se tiene, al sustituir:

$$p_2(x)=\sqrt{\frac{236}{6368}}\left[x^2-\frac{700}{236}x-\frac{368}{236}\right]=\sqrt{\frac{236}{6368}}x^2-\frac{700}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}}x-\frac{368}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}}$$

4. Ajuste con polinomios ortogonales:

Sea la función de ajuste o polinomio generalizado dado por la combinación lineal de los polinomios ortogonales en el soporte dado:

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{m}c_k p_k(x)$$

y consideremos el valor de estos polinomio en cada punto, $x_i,\ i=0,1,...,n$, del soporte:

$$p_k(x_i),\ k=0,1,...,m;\ i=0,1,...,n$$

cumpliéndose, obviamente, la condición de ortogonalidad:

$$\sum_{i=0}^{n}p_j(x_i).p_k(x_i)=\delta_{jk}\equiv\begin{cases}0 & (si\ j\neq k)\\ 1 & (si\ j=k)\end{cases}$$

Sea e_i el error cometido al ajustar mediante la indicada función $Q(x)$ en $x=x_i$:

$$e_i=y_i-Q(x_i)$$

y consideremos el vector de los errores $e=(e_1,e_2,...,e_n)$, cuya norma euclidiana verifica $|e|^2=e_1^2+e_2^2+...+e_n^2$.

Como pretendemos que tal norma sea mínima para la función de ajuste $Q(x)$ imponemos la condición de derivada nula respecto los coeficientes c_k introducidos en su construcción:

$$\frac{\partial|e|^2}{\partial c_j}=\frac{\partial}{\partial c_j}\left(\sum_{i=0}^{n}e_i^2\right)=\frac{\partial}{\partial c_j}\sum_{i=0}^{n}\left(y_i-Q(x_i)\right)^2=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial}{\partial c_j}\left(y_i-Q(x_i)\right)^2=\sum_{i=0}^{n}2\left(y_i-Q(x_i)\right)\frac{\partial}{\partial c_j}\left(y_i-Q(x_i)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}2\left(y_i-\sum_{k=0}^{m}c_k p_k(x_i)\right)\frac{\partial}{\partial c_j}\left(y_i-\sum_{k=0}^{m}c_k p_k(x_i)\right)=-\sum_{i=0}^{n}2\left(y_i-\sum_{k=0}^{m}c_k p_k(x_i)\right)p_j(x_i)=$$

$$=-2\sum_{i=0}^{n}y_i p_j(x_i)+2\sum_{i=0}^{n}p_j(x_i)\sum_{k=0}^{m}c_k p_k(x_i)=2c_j-2\sum_{i=0}^{n}y_i p_j(x_i)=0$$

de lo cual

$$c_j = \sum_{i=0}^{n} y_i p_j(x_i) \quad j = 0,1,\ldots,m$$

Y la función de ajuste es

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{m} c_j p_j(x_i) = \sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{i=0}^{n} y_i p_j(x_i) \right) p_j(x_i) \quad j = 0,1,\ldots,m$$

Ejemplo numérico de ajuste con polinomios ortogonales para el soporte del anterior ejemplo

Soporte:

$$\{(-1,-1),(1,1),(3,2),(4,1)\}$$

Base: Sean los polinomios ortogonales encontrados en el ejemplo del apartado 3.:

$$\{p_0(x), p_1(x), p_2(x)\} \equiv \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{59}}x - \frac{7}{2\sqrt{59}}, \sqrt{\frac{236}{6368}}x^2 - \frac{700}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}}x - \frac{368}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}} \right\}$$

Aproximando estos polinomios hasta la cuarta cifra decimal:

$$p_0(x) = \frac{1}{2} = 0'5000$$

$$p_1(x) = \frac{2}{\sqrt{59}}x - \frac{7}{2\sqrt{59}} \approx 0'2603.x - 0'4556$$

$$p_2(x) = \sqrt{\frac{236}{6368}}x^2 - \frac{700}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}}x - \frac{368}{236}\sqrt{\frac{236}{6368}} \approx 0'1925x^2 - 0'5710x - 0'3001$$

La función de ajuste:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k p_k(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x)$$

Coeficientes de la función de ajuste:

$$c_0 = \sum_{i=0}^{3} y_i p_0(x_i) = y_0 p_0(x_0) + y_1 p_0(x_1) + y_2 p_0(x_2) + y_3 p_0(x_3) = -1.1/2 + 1.1/2 + 2.1/2 +$$
$$+1.1/2 = 3/2 = 1'5000$$

$$c_1 = \sum_{i=0}^{3} y_i p_1(x_i) = y_0 p_1(x_0) + y_1 p_1(x_1) + y_2 p_0(x_2) + y_3 p_1(x_3) = -1.(0'2603.(-1) - 0'4556) +$$
$$+1.(0'2603.1 - 0'4556) + 2.(0'2603.3 - 0'4556) + 1.(0'2603.4 - 0'4556) = 1'7538$$

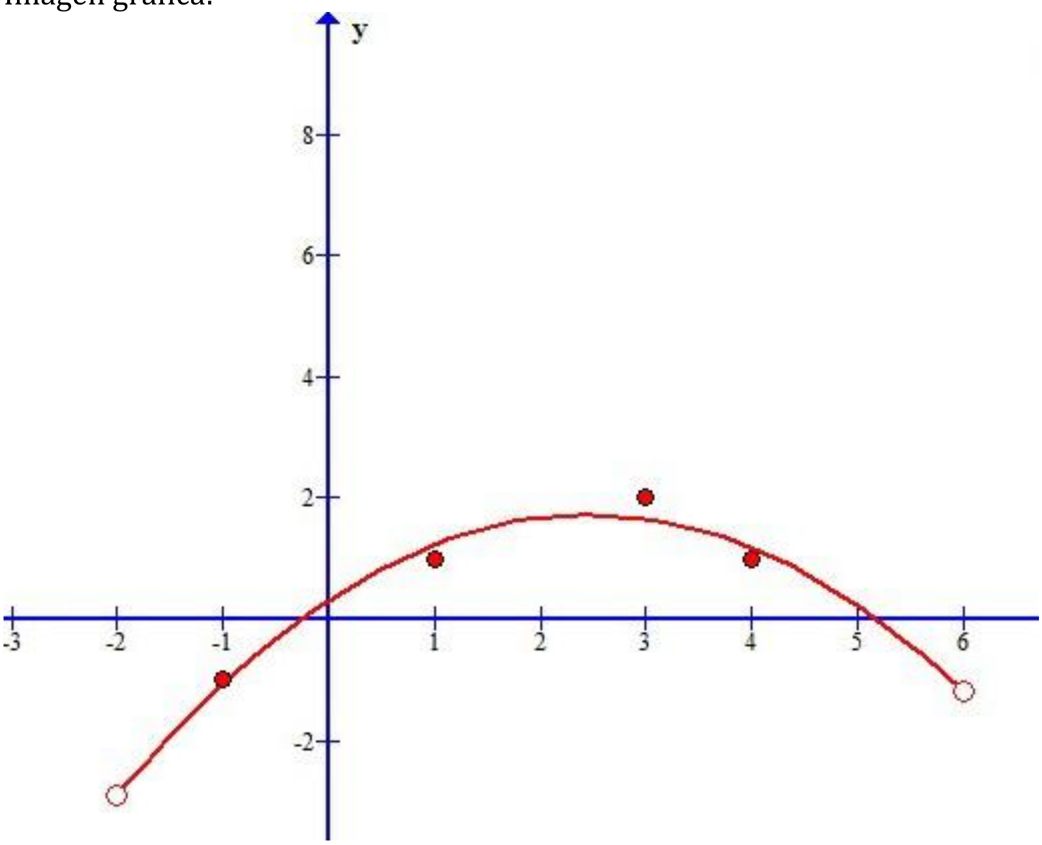
$$c_2 = \sum_{i=0}^{3} y_i p_2(x_i) = y_0 p_2(x_0) + y_1 p_2(x_1) + y_2 p_2(x_2) + y_3 p_2(x_3) =$$
$$= -1.(0'1925(-1)^2 - 0'5710(-1) - 0'3001) + 1.(0'1925.1^2 - 0'5710.1 - 0'3001) +$$

$$+2.\left(0'1925.3^2 - 0'5710.3 - 0'3001\right) + 1.\left(0'1925.4^2 - 0'5710.4 - 0'3001\right) = -1'2073$$

Resultando para la función de ajuste:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k p_k(x) = c_0 p_0(x) + c_1 p_1(x) + c_2 p_2(x) = 1'5000.p_0(x) +$$
$$+1'7538.p_1(x) - 1'2073 p_2(x) = 1'5000.1/2 + 1'7538.\left(0'2603.x - 0'4556\right) -$$
$$-1'2073.\left(0'1925x^2 - 0'5710x - 0'3001\right) =$$
$$= \left[0'7500 + 1'7538.(-0'4556) + (-1'2073).(-0'3001)\right] +$$
$$+\left[1'7538.0'2603 + (-1'2073)(-0'5710)\right].x + \left[(-1'2073)(0'1925)\right].x^2 =$$
$$= 0'3132 + 1,1458x - 0'2324x^2$$

Imagen gráfica:



$$Q(x) = 0'3132 + 1,1458x - 0'2324x^2$$

5. La medida de la aproximación en el ajuste con polinomios ortogonales:
El ajuste es tanto más aproximado a la función que definen los puntos del soporte cuanto menor es la norma euclidiana del vector de errores. La determinación, pues, de dicha norma nos permite saber el grado de aproximación del ajuste realizado:

$$|e|^2 = \sum_{i=0}^{n} e_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \sum_{j=0}^{m} c_j p_j(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{n} y_i \sum_{j=0}^{m} c_j p_j(x_i) + \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} c_j c_k p_j(x_i) p_k(x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - 2\sum_{j=0}^{m} c_j \sum_{i=0}^{n} y_i p_j(x_i) + \sum_{i=0}^{m} c_j^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - 2\sum_{i=0}^{m} c_j^2 + \sum_{i=0}^{m} c_j^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - \sum_{i=0}^{m} c_j^2$$

En definitiva:

$$|e|^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i^2 - \sum_{i=0}^{m} c_j^2$$

6. Bibliografía:

Apóstol, T.M., Calculus, Editorial Reverté, Barcelona, 1970
Rey Pastor, Y., Calleja, P., Trejo, C.,Análisis Matemático, Editorial Kapeluz, Buenos Aires, 1957
Henrici, P., Elements of Numerical Análisis, John Wiley, N. York, 1964
Scheid, F., Análisis numérico, Mc Graw-Hill, Madrid, 1972
Chinea, C. S., Ajuste de funciones. El método de los mínimos cuadrados (http://casanchi.com/mat/ajustemc01.htm)