SOLUCIONES DE LAS ECUACIONES DE AIRY Y RICCATI EN TÉRMINOS DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

Autor: Carlos Barrios

Licenciado en Educación mención Física y Matemáticas

Egresado de la Universidad de Los Andes (ULA). Venezuela

Correos electrónicos: cjb_121@hotmail.com y cjb.14641@gmail.com

"Un matemático es una máquina para transformar café en teoremas". - Paul Erdos[1]

En las siguientes líneas continuación, se presenta un artículo donde se presupone por parte del lector, al menos, entendimiento teórico general de las ecuaciones y funciones de Bessel[2]; específicamente, sobre cuando estas últimas son funciones elementales y a su vez, el vínculo con la función Gamma. Muchas ecuaciones diferenciales de interés son realmente ecuaciones de Bessel disfrazadas y, como tales, resolubles por medio de funciones de Bessel. Sabiendo que la ecuación de Bessel se expresa

$$z^2 \frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \qquad (1)$$

también sabemos que la solución de dicha ecuación es

$$w(z) = c_1 J_p(z) + c_2 J_{-p}(z) \quad si \quad p \notin \mathbb{Z} \qquad y \qquad w(z) = c_1 J_p(z) + c_2 Y_p(z) \quad si \quad p \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

donde

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x/2)^{2n+p}}{n!\,(p+n)!} \qquad y \qquad Y_p(x) = \frac{J_p(x)\cos(p\pi) - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen}(p\pi)} \qquad (3)$$

---

[1] Paul Erdos (1913 – 1996), matemático húngaro inmensamente prolífico y famoso excéntrico que, con cientos de colaboradores, trabajó en problemas sobre combinatoria, teoría de grafos, teoría de aproximación, teoría de conjuntos y probabilidad.

[2] Friedrich Bessel (1784 - 1846), matemático y astrónomo alemán, conocido principalmente por realizar la primera medición precisa de la distancia de una estrella. Bessel supervisó la construcción del observatorio de Königsberg y fue su director desde 1813 hasta su muerte.

El cambio de variable $z = ax^b$ y $w = yx^c$ (donde a, b, c son constantes) transforma a (1) en una ecuación diferencial de segundo orden con una expresión un poco más "general", que nos permitirá abordar una gran variedad de situaciones. También, para esta nueva ecuación encontraremos su solución general en términos de funciones de Bessel. No olvidar que la función de Bessel viene dada por $J_p(x)$. Sean $dz = abx^{b-1}dx$ y $dw = x^c dy + cx^{c-1}ydx$. Entonces

$$\frac{dw}{dz} = \frac{x^c dy + cx^{c-1}ydx}{abx^{b-1}dx} = \frac{1}{ab}\left(x^{c-b+1}\frac{dy}{dx} + cx^{c-b}y\right) \qquad (4)$$

Así, sabiendo que $\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{d}{dz}\left[\frac{dw}{dz}\right]$ tenemos

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \left(\frac{1}{a^2b^2x^{b-1}}\right)\frac{d}{dx}\left[x^{c-b+1}\frac{dy}{dx} + cx^{c-b}y\right]$$

Entonces se obtiene

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{a^2b^2x^{b-1}}\left[(c-b+1)x^{c-b}\frac{dy}{dx} + x^{c-b+1}\frac{d^2y}{dx^2} + c(c-b)x^{c-b-1}y + cx^{c-b}\frac{dy}{dx}\right] \qquad (5)$$

Luego, sustituyendo (4) y (5) en (1), tomando en cuenta $z = ax^b$ y $w = yx^c$, tenemos

$$\frac{(ax^b)^2}{a^2b^2x^{b-1}}\left[(c-b+1)x^{c-b}\frac{dy}{dx} + x^{c-b+1}\frac{d^2y}{dx^2} + c(c-b)x^{c-b-1}y + cx^{c-b}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$+\frac{ax^b}{ab}\left[x^{c-b+1}\frac{dy}{dx} + cx^{c-b}y\right] + [(ax^b)^2 - p^2]yx^c = 0$$

Multiplicando esta expresión por b^2x^{-c}

$$\left[(c-b+1)x^{c-b}\frac{dy}{dx} + x^{c-b+1}\frac{d^2y}{dx^2} + c(c-b)x^{c-b-1}y + cx^{c-b}\frac{dy}{dx}\right]$$

$$+\left[x^{c-b+1}\frac{dy}{dx} + cx^{c-b}y\right] + [a^2b^2x^{2b} - p^2]y = 0$$

Mediante el juego algebraico, llegamos entonces a

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(2c+1)x\frac{dy}{dx}+[a^2b^2x^{2b}+(c^2-p^2b^2)]y=0 \qquad (6)$$

Hagamos las deducciones finales para llegar a la solución general en términos de funciones de Bessel. Si para (1), la solución general se expresa por (2), tenemos

$$y(x)x^c=c_1J_p(ax^b)+c_2J_{-p}(ax^b) \quad \Rightarrow y(x)=x^{-c}[c_1J_p(ax^b)+c_2J_{-p}(ax^b)] \quad si \quad p\notin\mathbb{Z}$$

$$(7)$$

$$y(x)x^c=c_1J_p(ax^b)+c_2Y_p(ax^b) \quad \Rightarrow y(x)=x^{-c}[c_1J_p(ax^b)+c_2Y_p(ax^b)] \quad si \quad p\in\mathbb{R}$$

A partir de la ecuación diferencial obtenida (6) y su solución general (7), se puede abordar una gran variedad de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Por ejemplo, podemos expresar la solución general de la ecuación de Airy[3]

$$y''+xy=0$$

en términos de funciones de Bessel. Dividimos (6) por x^2, para obtener

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(2c+1)\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+[a^2b^2x^{2b-2}+(c^2-p^2b^2)x^{-2}]y=0 \qquad (8)$$

Luego, comparamos (8) con la ecuación de Airy, y resulta

$$2c+1=0 \quad \Rightarrow \quad c=-\frac{1}{2} \qquad\qquad 2b-2=0 \quad \Rightarrow \quad b=\frac{3}{2}$$

$$a^2b^2=1 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{2}{3} \qquad\qquad c^2-p^2b^2=0 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{1}{3}$$

[3] George Biddell Airy (1801 - 1892) astrónomo y matemático británico. Ejerció la docencia como profesor de astronomía en Cambridge (1826-1835) y fue nombrado astrónomo real (1835-1881). Llevó a cabo numerosas investigaciones en el campo de la física matemática y de la matemática aplicada a los cálculos astronómicos. Es conocido, principalmente, por no haber sabido reconocer la importancia de los cálculos de J. C. Adams para el descubrimiento del planeta Neptuno, así como por sus detallados y casi exhaustivos estudios sobre el arco iris.

Al ser p no entero, la solución general de la ecuación de Airy en términos de funciones de Bessel es

$$y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\right]$$

Busquemos ahora, la solución general de la ecuación de Riccati[4], la cual se expresa

$$\frac{dy}{dx} + By^2 = Cx^m$$

Se puede obtener a partir de la ecuación de Riccati, una expresión equivalente más cómoda que nos permita aplicar las ideas previamente discutidas, si hacemos el cambio de variable $By = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$ para obtener

$$\frac{d^2u}{dx^2} - BCx^m u = 0$$

Se mostrará en un apéndice la justificación de este procedimiento. Para esta última ecuación, puede resultar de interés saber cuando su solución general se expresa en términos de funciones elementales. Si $m = -2$, la sustitución $y = v/x$ transforma la ecuación de Riccati en una ecuación de variables separables que tiene solución elemental. Si $m \neq -2$ ¿que otro requisito debe cumplir m para que esta ecuación tenga una solución general expresada en funciones elementales?

La teoría nos dice que si $k \in \mathbb{Z}$, se tiene que $J_{k+1/2}(x)$ es elemental[5]. Supongamos que dicha solución general se expresa en términos de funciones elementales. Para esta ecuación, comparando con (8), $c^2 - p^2b^2 = 0$, $c = -\frac{1}{2}$, $a^2b^2 = -BC$ y $2b - 2 = m$. Entonces se tiene $b \neq 0$ y también $m = \frac{m}{2} + 1$. Procedamos con los cálculos:

$$c^2 = p^2\left(\frac{m}{2}+1\right)^2 = \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad p^2(m+2)^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad p = \frac{1}{m+2}$$

---

[4] El matemático y filósofo Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), estudió hidrodinámica sobre la base de la mecánica newtoniana, colaborando en su introducción en Italia. Se le conoce sobre todo por el estudio de las llamadas ecuaciones de Riccati, ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales y de primer orden. Riccati las desarrolló para avanzar en sus estudios de hidrodinámica. Su trabajo se limitó al análisis de casos particulares de la ecuación, siendo ésta planteada y analizada en la forma que conocemos por la familia Bernoulli.

[5] Puede consultar el libro *Ecuaciones Diferenciales Con Aplicaciones Y Notas Históricas* de George Simmons, capítulo 8.

Luego, como la solución se expresa en funciones elementales, sin olvidar que $k \in \mathbb{Z}$

$$p = \frac{1}{m+2} = k + \frac{1}{2}$$

Haciendo algebra con la segunda igualdad de esta última expresión, se obtiene

$$m = -\frac{4k}{2k+1} \qquad (9)$$

Luego, para cuando $m \neq 2$, si la solución general de la ecuación de Riccati se expresa en términos de funciones elementales, debe cumplirse (9) para algún entero k. El recíproco también es cierto, e invitamos al lector a probar dicha afirmación.

Hemos visto cómo podemos usar la expresión de las ecuaciones de Bessel para abordar un gran número de ecuaciones diferenciales, y por supuesto, esto debe combinarse con nuestro sentido agudo y perspicacia. Esperamos que usted encuentra estos análisis de provecho, o al menos, de lectura amena.

APÉNDICE

Dada la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + By^2 = Cx^m$$

veamos lo que resulta de aplicar en ella la sustitución $By = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$.

$$By = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \Longrightarrow \quad B\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right] = \left(\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{u}\right]\right)\frac{du}{dx} + \frac{1}{u}\left(\frac{d}{dx}\left[\frac{du}{dx}\right]\right) = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}$$

Con este resultado, hagamos la sustitución en la ecuación de Riccati

$$\frac{dy}{dx} + By^2 = \frac{1}{B}\left[-\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2}\right] + \left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)y = Cx^m$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{1}{u}\frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)By = BCx^m \quad (multiplicando\ por\ B)$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{1}{u}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d^2u}{dx^2} + \left(\frac{du}{dx}\right)By = BCx^m u \quad (multiplicando\ por\ u)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2u}{dx^2} + \left(By - \frac{1}{u}\frac{du}{dx}\right)\frac{du}{dx} = BCx^m u \quad (haciendo\ \acute{a}lgebra)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d^2u}{dx^2} - BCx^m u = 0 \quad \left(ya\ \ que\ \ By - \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 0\right)$$

En el estudio de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, nos encontramos algunas veces son cambios de variables, que, de verdad, nos facilitan mucho el trabajo, a su vez que permiten otra mirada al problema que está estudiando. Hemos presentado en este artículo algo de eso, que aparte de tener un sentido práctico, proporciona un análisis y resultados interesantes.