# Axiomática de conjuntos
# Clases ordinales y axioma de elección
# El axioma de las partes de un conjunto

**Introducción:**
Dentro del sistema axiomático NBGQ (Neumann-Bernays-Gödel-Quine) se estudian como signos fundamentales:

a) Variables: las letra del alfabeto latino.
b) Relatores binarios: "=" ("es igual que"), "$\in$" ("es elemento de"), "$\subseteq$" ("…está contenido en")
c) Cinco conectores: "$\approx$" ("no"), "$\wedge$" ("y"), "$\vee$" ("o"), "$\rightarrow$" ("si…entonces"), "$\leftrightarrow$" ("sii")
d) Cuantificadores: "$\forall$" ("para todo"), "$\exists$" ("existe un … tal que"), "$\dot{\exists}$" ("existe un único… tal que")
e) Un descriptor: "i" ("el … tal que").

Dentro del sistema son equivalentes expresiones como: $x \neq y$ y $\approx(x = y)$, que indicaríamos por $x \neq y \equiv \approx(x = y)$, o bien: $x \notin y$ y $\approx(x \in y)$, que indicaríamos asimismo por $x \notin y \equiv \approx(x \in y)$.

Los cuantificadores y el descriptor siempre van seguidos de una variable, de la que decimos queda *ligada* por ellos en la fórmula que sigue a continuación. Así, diremos que en la fórmula

$$(\forall x)(x \in y \rightarrow y \in x \vee x \in y)$$

la variable x está ligada, mientras que la variable y está libre.

Mediante $p(x)$ indicaremos una fórmula cualquiera, en la que la variable x está libre.

En este sistema, las variables se referirán a **clases**. Entre las clases podemos distinguir dos tipos: aquellas que son a su vez elementos de otras clases, y aquellas que no son elementos de clase alguna. A las primeras las llamaremos **conjuntos**, y a las segundas **clases últimas**. Quedan, finalmente, los **objetos concretos**, que son elementos de otras clases, pero que ellos mismos carecen de elementos.

$$\left[\textit{objetos concretos}\right]\left[\textit{conjuntos}\right]\left[\textit{clases últimas}\right]$$

siendo:

**elementos**: $\left[\textit{objetos concretos}\right]\left[\textit{conjuntos}\right]$

**clases**: $\left[\textit{conjuntos}\right]\left[\textit{clases últimas}\right]$

Tenemos, en definitiva, tres tipos de entidades: objetos concretos, conjuntos y clases últimas. Simbolizaremos por C el predicado monádico que se lee "… es un conjunto". En concreto, la definición de conjunto es la de una clase que pertenece a otra clase, esto es:

$$Cx \leftrightarrow (\exists y)(x \in y)$$

Usaremos en el presente estudio de los axiomas de elección y de las partes de un conjunto el resultado obtenido desde los axiomas de extensionalidad y formación de clases siguiente:

$$\left(\overset{*}{\exists} y\right)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \varphi(x)),$$ donde $y$ no es libre en $\varphi(x)$.

(que denominaremos en el texto, teorema de referencia, y puede verse su justificación en "Los axiomas de extensionalidad y formación de clases", http://casanchi.org/mat/eformacionclases01.htm)

**Clases inclusivas y clases conectadas. La clase ordinal**

- Una clase se denomina *inclusiva* sii contiene a cuanto le pertenece

$$Incl\ a \leftrightarrow (\forall x)(x \in a \rightarrow x \subseteq a)$$

- Una clase se dice que es conectada sii

$$Conec\ a \leftrightarrow (\forall x, y)(x \in a \wedge y \in a \rightarrow x \in y \vee y \in x \vee x = y)$$

Una clase ordinal es una clase inclusiva y conectada:

$$Ord\ a \leftrightarrow Incl\ a \wedge Cnec\ a$$

Las clases ordinales que son conjuntos, es decir, que son elementos de otras clases, se les denomina *conjuntos ordinales*. Un *número ordinal* es, simplemente, un conjunto ordinal.

Existencia y unicidad:
Usando el teorema de referencia, es posible formar la clase de los conjuntos ordinales tomando en dicho teorema la expresión $\varphi(x) = Incl\ x \wedge Cnec\ x$ . Se cumple entonces que

$$\left(\overset{*}{\exists} y\right)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge \varphi(x)),$$ o sea:

$$\left(\overset{*}{\exists} y\right)(\forall x)(x \in y \leftrightarrow Cx \wedge Incl\ x \wedge Cnec\ x)$$

Así, pues, existe y es única la clase de los conjuntos ordinales o de los números ordinales:

$$\Gamma = \{x / ord\ x\}$$

Obviamente, $(\forall a)(a \in \Gamma \leftrightarrow Ca \wedge ord\ a)$

Las propiedades inmediatas de la clase $\Gamma$ de los números ordinales son:

1) $ord\,\Gamma$
2) $N \subseteq \Gamma$, y también $N \in \Gamma$
3) $\phi \in \Gamma$
4) $\approx C\Gamma$

**Axioma de elección**:
Es el más controvertido de la axiomática de conjuntos. Lo formuló por primera vez Ernest Zermelo en 1904.

El axioma viene a enunciar que para toda colección de conjuntos no vacíos, sea colección finita o sea colección infinita, existe una función f tal que a cada elemento del dominio se le hace corresponder un solo elemento de cada uno de los conjuntos de la colección.

Sea A una colección, finita o infinita de conjuntos B no vacíos, entonces:

$$\forall B \in A, (\exists f)(f : A \to \cup A) \,/\, f(B) = b \in B$$

esto es, existe una función f que "elige" o "selecciona" un elemento b de cada conjunto B de la colección.

También acostumbra a enunciarse así:

Dada una colección cualquiera de conjuntos no vacíos y disjuntos entre sí, existe una clase que contiene un y sólo un elemento de cada uno de los conjuntos de la colección.

O también:

El producto cartesiano de una familia cualquiera no vacía de conjuntos no vacíos es no vacío.

El axioma nos garantiza la existencia de determinadas clases, las funciones de elección, sin dar ningún método de cómo construirlas. Esto hizo que este axioma fueran muy polémico desde los tiempos en que fue enunciado, y muchos matemáticos, sobre todo los intuicionistas, se han opuesto a su aceptación. Se pensó, incluso, que podría ser incompatible con el resto de los axiomas de la teoría de conjuntos, hasta que Kurt Gödel probó en 1940 su consistencia, y años más tarde, en 1963, Paul Cohen probaría su independencia del resto de los axiomas de la teoría.

En realidad, la afirmación del axioma es obvia si se trata de una colección finita de conjuntos, ya que se puede elegir un elemento de cada conjunto desde el primero hasta el último de la colección. La clase resultante se formaría una vez terminado el proceso de elección, elemento a elemento, proceso que es finito. Si pensamos en una familia de n conjuntos, puede hacerse una demostración usando el método de inducción completa. La formulación axiomática no sería necesaria en este caso.

Pero el axioma sí es necesario si la colección de conjuntos sobre los que se ha de elegir un elemento de cada uno de ellos es una colección infinita, ya que el proceso de elección, uno a uno de los conjuntos, no podría terminarse nunca.

Se ha descubierto posteriormente que el axioma de elección es equivalente a un gran número de axiomas y teoremas de diferentes ramas de la matemática, así, por ejemplo, es equivalente al llamado teorema de numerabilidad: "todo conjunto es biyectable con algún número ordinal", o al Lema de Zorn: "Todo conjunto inductivo admite al menos un elemento maximal", o al Axioma de Haussdorff: "En todo conjunto ordenado existe al menos una cadena maximal m tal que si la cadena n cumple que m está contenida en n, entonces m y n son iguales". También es equivalente al Axioma de Zermelo. "Todo conjunto puede ser bien ordenado (puede ser dotado de un buen orden)". Y muchos otros resultados son también equivalentes a este axioma, entre los que se cuentan el Lema de Tukey, el Lema de Kuratowski, el Teorema de Tijonov para los espacios compactos, etc.

**Comparación de cantidades. Axioma de las partes de un conjunto:**
Diremos que dos clases, A y B, son biyectables o coordinables, y lo indicaremos por $A \cong B$ , si existe una biyección f de dominio A y recorrido B (o viciversa obviamente, por ser biyección).

Se dice, en consecuencia, que ambas clases tienen la misma cantidad de elementos, o que tienen igual cardinalidad, o que son equipotentes:

$$A \cong B \leftrightarrow (\exists f)(Bif \wedge D_1 f = A \wedge D_2 f = B)$$

La clase A sería *minus potente* que la clase B si A es biyectable con una parte propia de la clase B, pero no con B. Indicaremos por $A \leq B$ que la clase A tiene menos o igual potencia que B:

$$A \leq B \leftrightarrow (\exists f)(Bif \wedge D_1 f = A \wedge D_2 f = B' \subseteq B)$$

A será estrictamente *minus potente* que B si ambas clases no son iguales:

$$A < B \leftrightarrow (A \leq B) \wedge \approx (A = B)$$

El desarrollo de la teoría de conjuntos permitió obtener importantes teoremas en este ámbito, entre los que podemos mencionar el teorema de Bernstein:

$$(\forall x, y)(Cx \wedge x \leq y \wedge y \leq x \rightarrow x \cong y)$$

o el teorema de Cantor:

$$(\forall x)(Cx \rightarrow x < P(x)), \ P(x): \text{ partes de x}$$

Para la obtención de estos resultados es necesario establecer un último axioma para la teoría de conjuntos: El axioma del conjunto de las partes, por el que afirmamos que las partes de un conjunto constituyen también un conjunto:

Axioma del conjunto de las partes:

$$(\forall x)(Cx \rightarrow CP(x))$$

**Los números cardinales:**
La búsqueda de números que sirvan para medir de manera exacta la cardinalidad de los conjuntos da origen a los números cardinales. Se trata de encontrar números que cumplan el requisito de que dos conjuntos biyectables entre sí tengan el mismo número cardinal, y recíprocamente, si dos conjuntos tienen el mismo número cardinal han de ser biyectables.

La definición de la clase $\mathrm{K}$ de los cardinales, debida a Von Neumann, es la de una clase formada por aquellos números ordinales que no son biyectables con ningún ordinal anterior:

$$\mathrm{K} = \left\{ x / x \in \Gamma \wedge \approx \left(\exists y\right)\left( y \in x \wedge y \cong x \right) \right\}$$

***Bibliografía:***
Bernays, P.: Axiomatic set theory, Amsterdam, 1958
Halmos, P.R.: Naive set theory, New York, 1960
Krivine, J.L.: Theorie axiomatique des ensembles, París, 1969
Mosterin, J.: Teoría axiomática de conjuntos, Barcelona, 1980