

# **Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden**

**José Jesús MENA DELGADILLO**

## **Introducción.**

En ciencias exactas, naturales, sociales y administrativas existen una gran variedad de problemas que, cuando se formulan (modelan) en términos matemáticos requieren la determinación de una función, la cual debe de satisfacer una o varias ecuaciones que contienen derivadas de la función. Tales ecuaciones se denominan ecuaciones diferenciales. Sin duda en diversos campos del conocimiento se desea describir el comportamiento de algún sistema o fenómeno en términos de razón, o tasa de cambio de una o más variables de una función dada. En otras palabras el modelo matemático frecuentemente consiste en una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales.

## **Tipos de ecuaciones diferenciales**

a) Ecuaciones diferenciales elementales.

Las ecuaciones diferenciales elementales consisten esencialmente en encontrar la función primitiva que dio origen a la ecuación diferencial, es decir, determinar las relaciones entre las variables y constantes de la ecuación.

Las condiciones que debe cumplir una ecuación diferencial para ser resuelta se satisfacen por los teoremas de existencia y unicidad.

Supongamos que se tiene una función de la forma:  $y' = g(x, y)$  en donde se satisface:

a) La función  $g(x, y)$  es continua en la región  $\Re$  de puntos  $(x, y)$ .

b)  $\frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$  existe y es continua en todos los puntos en  $\Re$ . En donde se admiten

infinitas soluciones de la forma:  $f(x, y, C) = 0$  siendo  $C$  una constante arbitraria, tal que para punto de  $\Re$  pasa una y solo una curva de la familia de curvas

$f(x, y, C) = 0$ . Siendo  $C$  una constante arbitraria, en donde por cada punto de  $\Re$  pasa una y solo una curva de la familia  $f(x, y, C) = 0$ .

Una solución particular de la ecuación diferencial se obtiene de la función primitiva dando valores definidos a las constantes arbitrarias.

Geométricamente, la primitiva de la ecuación diferencial corresponde a la ecuación de una familia de curvas y una solución particular es la ecuación de una de las curvas. El conjunto de estas curvas se denominan Curvas integrales de la ecuación diferencial.

La primitiva de una ecuación diferencial se denomina la solución general de la ecuación.

Ejemplo 1.

Sea la ecuación deferencial.

$$\frac{d^3 Y(x)}{d x^3} = 0$$

Mostrar que la función primitiva es de la forma:

$$Y(x) = A x^2 + B x + C$$

En donde:  $A$ ,  $B$  y  $C$  son valores de constantes arbitrarias.

Solución.

$$\frac{d Y(x)}{d x} = 2 A x + B$$

$$\frac{d Y^2(x)}{d x^2} = 2 A$$

Finalmente:

$$\frac{d Y^3(x)}{d x^3} = 0$$

Observe que la familia de curvas solución corresponde a un conjunto geométrico de parábolas.

Ejemplo 2.

Sea la ecuación diferencial.

$$Y^2(x) \left( \frac{dY(x)}{dx} \right)^2 + Y^2(x) = r^2$$

Mostrar que la función primitiva es de la forma:

$$(x - C)^2 + Y^2(x) = r^2$$

En donde: C y r son valores de constantes arbitrarias.

Solución.

Derivando con respecto a la variable x, la función primitiva, resulta:

$$2(x - C) + 2Y(x) \left[ \frac{dY(x)}{dx} \right] = 0$$

Es decir:

$$(x - C) = -Y(x) \left[ \frac{dY(x)}{dx} \right]$$

$$(x - C)^2 = Y^2(x) \left[ \frac{dY(x)}{dx} \right]^2$$

Sustituyendo la expresión anterior en la función diferencial, resulta:

$$(x - C)^2 + Y^2(x) = r^2$$

Es decir, la función primitiva de la ecuación diferencial tiene la forma de una familia de circunferencias en el plano x-y. Con centro en los puntos (C,0) y radio r.

b) Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado.

Una ecuación diferencial de primer orden y primer grado se pueden escribir de la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

Ejemplo 1.

Sea la ecuación diferencial:

$$\frac{d y}{d x} + \frac{y+x}{y-x} = 0$$

Muestre que la ecuación anterior es una ecuación diferencial de primer orden y primer grado.

Solución:

La ecuación diferencial se puede expresar de la forma:

$$dy(y-x) + dx(y+x) = 0$$

Que corresponde a la forma de la definición, en donde:

$$M(x, y) = y + x \quad y \quad N(x, y) = y - x$$

Ecuaciones diferenciales exactas.

Considere la ecuación:

$$\Psi(x, y) = C \quad (1)$$

En donde: C = Constante, para la función  $\Psi(x, y)$  diferenciable.

Derivando (1) se obtiene:

$$\frac{d}{dx} \Psi(x, y) = \frac{d}{dx} \Psi(x, y) + \frac{d}{dy} \Psi(x, y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (C) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \Psi(x, y) = \frac{d}{dx} \Psi(x, y) + \frac{d}{dy} \Psi(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx} \Psi(x, y) = \frac{d}{dx} \Psi(x, y) + \frac{d}{dy} \Psi(x, y) y' = 0$$

$$\frac{d}{dx} \Psi(x, y) = \Psi_x(x, y) + \Psi_y(x, y) y' = 0$$

Si:  $\Psi_x(x, y) = M(x, y)$  y  $\Psi_y(x, y) = N(x, y)$ , entonces la ecuación (1) toma la forma:

$$M(x, y) + N(x, y) y' = 0 \quad (2)$$

$$M(x, y) + N(x, y) y' = \frac{d}{dx} \Psi(x, y) + \frac{d}{dy} \Psi(x, y) y' = \frac{d}{dx} \Psi(x, \phi(x)) = 0$$

De manera que:  $\Psi[x, \phi(x) = y] = \text{Constante}$ , en cuyo caso se dice que la ecuación (2), es una ecuación diferencial exacta.

La ecuación (2) también suele escribirse de la forma:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

La ecuación diferencial que tiene la forma anterior se conoce como una ecuación diferencial simétrica.

Ejemplo 1.

Resolver la ecuación diferencial:

$$2xy^3 dx + 3x^2 y^2 dy = 0$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx}(x^2 y^3) = 0$$

$$x^2 y^3 = C_1$$

$$x^2 y^3 = C_1$$

$$y = C_2 x^{-\frac{2}{3}}$$

En donde:  $C_1$  y  $C_2$  son constantes.

Ejemplo 2.

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y \cos x dx + 2x e^y dx + \sin x dy + x^2 e^y dy + 2 dy = 0$$

Entonces:

$$(y \cos x + 2x e^y) dx + (\sin x + x^2 e^y + 2) dy = 0$$

Es decir:

$$M(x, y) = y \cos x + 2x e^y, \quad N(x, y) = \sin x + x^2 e^y + 2$$

Dado que:

$$M_y(x, y) = \cos x + 2x e^y, \quad N_x(x, y) = \cos x + 2x e^y$$

Es decir:

$$M_y(x, y) = N_x(x, y)$$

Por lo tanto la ecuación diferencial es exacta.

Dado que:

$$\Psi_x(x, y) = M(x, y), \quad \Psi_y(x, y) = N(x, y)$$

De la primera expresión:

$$\Psi(x, y) = \int^x M(x, y) dx = \int^x (y \cos x + 2x e^y) dx = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + h(y)$$

Ahora:

$$\Psi_y(x, y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2$$

Entonces:

$$h'(y) = 2$$

$$h(y) = 2y$$

Por lo tanto:

$$\Psi(x, y) = y \operatorname{sen} x + x^2 e^y + 2y + C$$

En donde C es una constante.

Ejemplo 3.

Mostrar si la siguiente ecuación diferencial es exacta:

$$(3x^2 + 2xy) + (x + y^2) y' = 0$$

Entonces:

$$M(x, y) = 3x^2 + 2xy, \quad N(x, y) = x + y^2$$

$$M_y(x, y) = 2x, \quad N_x(x, y) = 1$$

Dado que:

$$M_y(x,y) \neq N_x(x,y)$$

Por lo tanto:

La ecuación diferencial No es exacta.

### Factores integrantes.

Considere una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \quad (3)$$

Si la ecuación diferencial (3) No es exacta, entonces trataremos de elegir una función:  $\mu(x,y)$  de tal manera que la ecuación diferencial (3) sea exacta; es decir:

$$\mu(x,y)(M(x,y)dx + N(x,y)dy) = 0 \quad (4)$$

$\mu(x,y)$ : es el factor integrante.

Ahora la ecuación diferencial (3) es exacta si satisface:

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x \quad (5)$$

Entonces:

$$\mu M_y + \mu_y M = \mu N_x + N \mu_x$$

Es decir:

$$M \mu_y - N \mu_x M + \mu (M_y - N_x) = 0$$

Considerando que  $\mu = \mu(x)$ , entonces:  $(\mu(x)N)_y = \mu(x)N_y$  y

$(\mu(x)N)_x = \mu(x)N_x + N \frac{d\mu(x)}{dx}$  por (5), resulta:

$$\mu(x)M_y = \mu(x)N_x + N \frac{d\mu(x)}{dx}$$

Resolviendo la ecuación anterior resulta:

$$\mu(x) \left[ \frac{M_y - N_x}{N} \right] = \frac{d\mu(x)}{dx} \quad (6)$$

A partir de la relación (6) se puede calcular la función:  $\mu(x)$

Ejemplo 1.

Verificar que  $\mu(x, y) = \frac{1}{x y^2}$  es un factor integrante de la ecuación diferencial y resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$(y^2 + x y) dx - x^2 dy = 0$$

Solución.

Hay que mostrar que la ecuación diferencial No es exacta.

Dado que  $M(x, y) = y^2 + x y$  ,  $N(x, y) = -x^2$ .

Entonces:

$$M_y = 2y + x \neq N_x = -2x$$

Por lo tanto efectivamente la ecuación diferencial No es exacta.

Ahora considerando la función correspondiente al factor integrante de (4), resulta:

$$\frac{1}{x y^2} ((y^2 + x y) dx + (-x^2) dy) = 0$$

Entonces:

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

Dado que  $M(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  ,  $N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ .

Por lo tanto:

Dado que  $M_y = -\frac{1}{y^2}$  ,  $N_x = -\frac{1}{y^2}$ .

Es decir.  $\mu(x, y) = \frac{1}{x y^2}$ . Es un factor de integración de la ecuación diferencial.

Resolviendo la ecuación diferencial exacta con el factor integrante, resulta:

Dado:

$$M(x, y) = \frac{d}{dx} \Psi(x, y) \quad , \quad N(x, y) = \frac{d}{dy} \Psi(x, y)$$

Sustituyendo:

$$\left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{d}{dx} \Psi(x, y)$$

Entonces:

$$\Psi(x, y) = \int^x \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx = \ln|x| + \frac{x}{y} + g(y)$$

Considerando la condición para  $N(x, y)$  resulta:

$$N(x, y) = \frac{d}{dy} \Psi(x, y) = -\frac{x}{y^2} + g'(y)$$

Dado que  $N(x, y) = -\frac{x}{y^2}$ .

Comparando, resulta:

$$g'(y) = 0$$

Entonces:

$$g(y) = \text{Constante}.$$

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es de la forma:

$$\Psi(x, y) = \ln|x| + \frac{x}{y} + C \quad \text{para} \quad x \neq 0, y \neq 0, C = \text{Constante}.$$

Ejercicio 2.

Encontrar un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy) \frac{dy}{dx} = 0$$

Solución.

Dado que  $M(x, y) = 3xy + y^2$  y  $N(x, y) = x^2 + xy$ .

Entonces:

Dado que:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \frac{x + y}{x(x + y)} = \frac{1}{x}$$

Sustituyendo en la expresión (6), resulta:

$$\mu(x) \frac{1}{x} = \frac{d\mu(x)}{dx}$$

Resolviendo para  $\mu(x)$  resulta:

$$\mu(x) = x$$

Verificando (5) para que con el coeficiente  $\mu(x)$  la ecuación diferencial es exacta.

$$\mu(x)M(x, y) + \mu(x)N(x, y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Sustituyendo:

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

Dado que en este caso:  $M(x, y) = 3x^2y + xy^2$  y  $N(x, y) = x^3 + x^2y$ .

Entonces:

$$M_y(x, y) = 3x^2 + 2xy \quad N_x(x, y) = 3x^2 + 2xy.$$

Por lo tanto con el coeficiente  $\mu(x) = \frac{1}{x}$  la ecuación diferencial es exacta.

Resolviendo la ecuación diferencial.

$$M(x, y) = 3xy + xy^2 = \Psi_x(x, y)$$

$$\Psi(x, y) = \int (3x^2y + xy^2) dx = yx^3 + \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$$

Ahora:

$$M_y(x, y) = 3x^2 + 2xy \quad N_x(x, y) = 3x^2 + 2xy$$

Dado que  $\Psi_y(x, y) = N(x, y)$  entonces  $g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \text{Constante}$ .

Por lo tanto la solución de la ecuación diferencial, es:

$$\Psi(x, y) = x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 + C_1$$

En forma equivalente:

$$x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 = C_2$$

### Ecuación diferencial Homogénea.

Una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad (7)$$

Es homogénea siempre y cuando la ecuación diferencial se pueda expresar de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right) \quad (8)$$

Ejemplos:

$$\text{a) } \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 + 2xy}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\text{b) } \frac{dy}{dx} = \ln x - \ln y + \frac{x+y}{x-y} = \ln \frac{x}{y} + \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)}$$

Si la ecuación diferencial es homogénea, entonces se realiza la siguiente transformación:

$$y = x v \quad (9)$$

De manera que la ecuación diferencial (8) se transforma en:

$$\frac{d y}{d x} = F(v) \quad (10)$$

Derivando (9) se obtiene:

$$\frac{d y}{d x} = x \frac{d v}{d x} + v$$

Considerando (10) y la ecuación diferencial anterior, resulta:

$$F(v) = x \frac{d v}{d x} + v \quad (11)$$

Por lo tanto:

$$\frac{d x}{x} = \frac{d v}{F(v) - v} \quad (12)$$

Ejemplo 1.

Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d y}{d x} = \frac{y^2 + 2 x y}{x^2}$$

Dado que es una ecuación diferencial homogénea.

$$\frac{d y}{d x} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{y}\right)$$

Dado que:

$$\frac{d y}{d x} = F(v)$$

Entonces:

$$x \frac{d v}{d x} + v = v^2 + 2 v$$

Desarrollando:

$$\frac{d x}{x} = \frac{d v}{v^2 + 2 v - v} = \frac{d v}{v(v+1)} = d v \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \right)$$

Finalmente:

$$\int \frac{d x}{x} = \int \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1} \right) d v$$

Resolviendo:

$$\ln |x| = \ln |v| - \ln |v+1| - \ln C$$

$$C x = \frac{v}{v+1} = \frac{\left( \frac{y}{x} \right)}{\left( \frac{y}{x} \right) + 1} = \frac{y}{y+x}$$

Por lo tanto:

$$y = \frac{C x^2}{1 - C x}$$

## Aplicaciones de ecuaciones diferenciales de primer orden

### Ejemplo1

Un lago de  $10^6 m^3$  ha sido contaminado con una sustancia tóxica. Un río atraviesa el lago con una velocidad de flujo de agua no contaminada de Dado que  $20\,000 \frac{m^3}{h}$ . La fabrica contaminante a un costado del lago arroja la sustancia tóxica a razón de  $0.01 \frac{kg}{h}$ .

- ¿Escriba la ecuación diferencial de la masa de la sustancia tóxica en el lago?
- ¿Escriba la solución de la ecuación diferencial?
- ¿Cuánta sustancia tóxica contendrá el lago eventualmente?

Solución:

a)

$$\frac{d m(t)}{d t} = Tasa_{entrada} - Tasa_{salida} = T_E - T_S$$

Dado que:

$$T_E = 0.01 \frac{kg}{h}.$$

$$T_S = (\text{Velocidad del flujo de agua saliente})(\text{Concentración de agua tóxica}).$$

$$T_S = \left( 20\,000 \frac{m^3}{h} \right) \left( \frac{kg}{10^6 m^3} \right) = 0.02 \frac{kg}{h}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, resulta:

$$\frac{d m(t)}{d t} = 0.01 - 0.02$$

b)

$$\frac{d m(t)}{d t} = 0.01 - 0.02 m = 0.02 \left( \frac{0.01}{0.02} - m \right)$$

Haciendo un cambio de variable:  $z = 0.5 - m$  entonces, resulta:

$$\frac{d m(t)}{d t} = 0.02 (z)$$

$$\frac{d z}{d t} = - \frac{d m(t)}{d t}$$

Entonces:

$$\frac{d z}{d t} = - 0.02 z$$

$$\frac{d z}{z} = - 0.02 d t$$

Integrando:

$$\int \frac{dz}{z} = -0.02 \int dt$$

Resolviendo:

$$\ln z = -0.02 t + C$$

$$z = e^{-0.02 t + C} = e^{-0.02 t} C_1$$

Sustituyendo el valor de z, resulta:

$$0.5 - m = e^{-0.02 t} C_1$$

Por lo tanto:

$$m(t) = e^{-0.02 t} C_1 - 0.5$$

Por condiciones iniciales, si  $t = 0$ , resulta:

$$m(t=0) = e^{-0.02(0)} C_1 - 0.5 = C_1 - 0.5$$

Ahora: Considerando  $m(t=0) = 0$ , entonces:

$$0 = C_1 - 0.5$$

$$C_1 = 0.5$$

Finalmente:

$$m(t) = 0.5 - 0.5 e^{-0.02 t}$$

c)

Si:  $t \rightarrow \infty$  en la ecuación diferencial anterior entonces, resulta:

$$m = 0.5 - 0.5 e^{-0.02(t \rightarrow \infty)} = 0.5$$

Por lo tanto:

$$m = 0.5 \text{ kg}$$

Ejemplo 2.

El Isotopo radiactivo Torio 234 se desintegra con una rapidez que es proporcional a su cantidad presente. Si 100 mgr de este material se reduce a 82.04 mgr en una semana. ¿Encontrar la relación entre la cantidad del material en términos del tiempo?

Encuentre el tiempo que debe de transcurrir para que la masa de a sustancia tenga la mitad de su valor original.

Solución.

La ecuación diferencial que describe el fenómeno es:

$$\frac{dQ}{dt} = -KQ$$

Entonces:

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -K \int_{t_0=0}^t dt$$

Desarrollando:

$$\ln \frac{Q}{Q_0} = -Kt$$

Por lo tanto:

$$Q = Q_0 e^{-Kt}$$

Por condiciones iniciales  $Q(t=0) = Q_0 = 100$  mgr. y  $Q(t=7\text{dias}) = 82.04$  mgr.

Para determinar K:

$$82.04 = 100 e^{-K(7)}$$

$$\frac{82.04}{100} = e^{-K(7)}$$

$$\frac{\ln 0.8204}{-7} = 0.02828 \text{ dias} = K$$

Finalmente:

$$Q(t) = 100 e^{-(0.02828)t}$$

El tiempo de vida media está dado por:

$$\frac{Q(t)}{Q_o} = e^{-(0.02828)t}$$

Se satisface:

$$\frac{Q(t)}{Q_o} = \frac{1}{2}$$

Sustituyendo:

$$\frac{1}{2} = e^{-(0.02828)t_{1/2}}$$

Desarrollando:

$$t_{1/2} = \frac{L_n(2)}{0.02828} = 24.5 \text{ dias.}$$

Ejemplo 3.

100 gr de azúcar que están en agua se convierten en Dextrosa a una velocidad que es proporcional a la cantidad que aún no se ha convertido. ¿Encuentre la ecuación diferencial que exprese la velocidad de conversión después de t minutos?

Solución.

Sea:  $q(t)$  la cantidad de gramos de azúcar convertidos en Dextrosa en t minutos.

La cantidad de gramos de azúcar no convertidos en Dextrosa en un tiempo t está dada por:  $(100 - q(t))$

Entonces, la velocidad de conversión de azúcar en Dextrosa es:

$$\frac{d q(t)}{d t} = K (100 - q(t))$$

En donde K, es una constante de proporcionalidad.

#### Ejemplo 4.

Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una línea recta (Eje X) estando sujeta a una fuerza que es proporcional a  $x$ , desde un punto fijo O y una fuerza resistente proporcional a su velocidad. ¿Expresar la fuerza total que actúa sobre la partícula?

Solución.

La primera fuerza que actúa es:  $F_1 = K_1 x$

La segunda fuerza que actúa es:  $F_2 = -K_2 v$

Por lo tanto la fuerza total que actúa sobre la partícula es:

$$F_T = F_1 + F_2 = K_1 x - K_2 v$$

Es decir:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = K_1 x - K_2 \frac{dx}{dt}$$

Nota: La anterior expresión corresponde a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y primer grado.

#### Ejemplo 5.

Considérese un tanque cilíndrico en el que el área de su sección transversal es una constante  $A$ , y tiene un orificio en que el área es una constante  $a$ . El pequeño orificio se tapa y el tanque se llena hasta una altura  $h$ . Cuando se retira el tapón, el agua se empieza a salir por el orificio. ¿Determinar la altura  $h(t)$ ?

Solución.

La diferencia de presión entre la parte superior e inferior ( $\Delta P$ ) está relacionada con la ecuación de Bernulli dada por la expresión:

$$\Delta P = \frac{1}{2} \rho v^2$$

En donde  $\rho$  corresponde a la densidad del agua y  $v$  es la velocidad.

La diferencia de presión también se puede escribir de la forma:

$$\Delta P = \rho g h$$

En donde  $g$  corresponde a la aceleración de la gravedad y  $h$  es la altura del nivel de agua.

Combinando las dos ecuaciones anteriores, resulta para la velocidad con la cual sale el tanque:

$$v = \sqrt{2 g h}$$

La velocidad del flujo está dada por:

$$\frac{d V}{d t} = - a v = - a \sqrt{2 g h}$$

Dado que:

$$\frac{d V}{d t} = A \frac{d h}{d t}$$

Sustituyendo en las dos relaciones anteriores, resulta:

$$A \frac{d h}{d t} = - a \sqrt{2 g h}$$

Finalmente la ecuación diferencial anterior se puede simplificar de la forma:

$$\frac{d h}{d t} = - K \sqrt{h}$$

En donde, K es una constante dada por:  $K = \frac{a}{A} \sqrt{2 g}$

Ejemplo 6.

Determinar el modelo que explica el crecimiento de poblaciones en condiciones ideales en el desarrollo de la población.

Solución.

El crecimiento de una población de individuos es proporcional a su población actual, es decir:

$$\frac{d P(t)}{d t} = K P(t)$$

En donde, K es una constante.

Considerando restricciones limitaciones del crecimiento debido a la disponibilidad de recursos, espacios, guerras, etc.

Sean: M la población de máxima capacidad de población y desarrollo y (M-P) representa la diferencia entre el máximo desarrollo de la población del total de la población actual. El término  $\frac{(M - P)}{M}$  corresponde a la razón de desarrollo.

Por lo tanto

$$\frac{d P}{d t} = K P \frac{(M - P)}{M}$$

Separando variables de la ecuación diferencial, resulta:

$$\frac{d P}{P (M - P)} = \frac{K}{M} d t$$

Por fracciones parciales se simplifica el término de la izquierda de la ecuación anterior:

$$\frac{1}{P (M - P)} = \frac{A_1}{P} + \frac{A_2}{M - P}$$

Desarrollando:

$$1 = A_1 (M - P) + A_2 P = A_1 M + P (A_2 - A_1)$$

En donde se satisface:

$$A_1 = A_2 = \frac{1}{M}$$

Es decir:

$$\frac{1}{P(M-P)} = \frac{1}{M P} + \frac{1}{M(M-P)}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{M} \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P} \right) dP = \frac{K}{M} dt$$

$$\left( \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P} \right) dP = K dt$$

Integrando:

$$\int^P \left( \frac{1}{P} + \frac{1}{M-P} \right) dP = K \int^t dt$$

Entonces:

$$\ln P - \ln(M-P) = Kt + C$$

Simplificando:

$$\frac{P}{(M-P)} = e^{Kt+C}$$

$$\frac{P}{(M-P)} = e^{Kt+C}$$

$$\frac{(M-P)}{P} = e^{-(Kt+C)}$$

$$M = P e^{-Kt-C} + P = P(e^{-Kt-C} + 1)$$

Finalmente:

$$P = \frac{M}{1 + C_1 e^{-K t}}$$

Ejemplo 7.

Al sacar un pastel del horno, su temperatura es de 300° F. Después de 3 min es de 200° F. ¿En cuánto tiempo se enfriara hasta la temperatura ambiente de 70°F?

Solución.

La razón con que cambia la temperatura de un objeto es proporcional a la diferencia entre su temperatura y la del medio que le rodea, que es la temperatura ambiente. El modelo que explica esta fenómeno es la Ley de enfriamiento de Newton, dado por la siguiente expresión:

$$\frac{d T}{d t} = K [T - T_m]$$

Dado que:

$$T_m = 70$$

Es decir:

$$\frac{d T}{T - 70} = K d t$$

Integrando:

$$\int \frac{d T}{T - 70} = K \int d t$$

$$\ln |T - 70| = K t + C_1$$

Simplificando:

$$T(t) = 70 + C_1 e^{K t}$$

Por condiciones iniciales:

$$T(t=0)=300 \quad y \quad T(t=3)=200$$

Entonces:

$$T(t=0)=70+C_1=300$$

Por lo tanto:

$$C_1=300-70=230$$

Ahora:

$$T(t=3)=70+230e^{K(3)}=200$$

Resolviendo:

$$e^{3K}=\frac{200-70}{230}=\frac{130}{230}=0.56$$

$$\ln e^{3K}=\ln 0.56=-0.579$$

$$K=\frac{-0.579}{3}=-0.193$$

Finalmente:

$$T(t)=70+230e^{-0.193t}$$

### **Bibliografía.**

\_ Ayres F., Ecuaciones Diferenciales (Teoría y Problemas), Edit. Mc Graw-Hill, Colombia, 1969.

\_ Boyce W. y DiPrima R., Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera, Edit. Limusa, México, 1980.

José Jesús MENA DELGADILLO  
Colegio de Ciencias y Humanidades, plantel Oriente  
UNAM, México