Aplicaciones continuas entre espacios topológicos

Introducción:

En lo que sigue intentaremos establecer la idea de función continua entre espacios topológicos, considerando que toda aplicación del espacio topológico (A,T_A) en el espacio topológico (B,T_B) induce aplicaciones entre los conjuntos de las partes de ambos espacios, $f : p(A) \to p(B)$ y $f^{-1} : p(B) \to p(A)$ que conservan las uniones, las intersecciones y la diferencia de partes:

$\forall M_k \in P(B), \forall N_k \in P(A), k \in K$:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{k\in K} M_k\right) = \bigcup_{k\in K} f^{-1}(M_k) \qquad f\left(\bigcup_{k\in K} N_k\right) = \bigcup_{k\in K} f(N_k)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{k\in K} M_k\right) = \bigcap_{k\in K} f^{-1}(M_k) \qquad f\left(\bigcap_{k\in K} N_k\right) = \bigcap_{k\in K} f(N_k)$$

$$f^{-1}(M_k - M_j) = f^{-1}(M_k) - f^{-1}(M_j) \qquad f(N_k - N_j) = f(N_k) - f(N_j)$$

$$f\left(f^{-1}(M_k)\right) \subseteq M_k \qquad N_k \subseteq f^{-1}(f(N_k))$$

Será obvia también la coincidencia de la idea de aplicación continua entre espacios topológicos con la misma noción que manejamos en el análisis matemático elemental. Para ello, recordemos algunas ideas básicas, muy resumidas, de la topología.

- Topología en un conjunto X:

Es toda familia Tx de partes de X que verifica tres condiciones:
1_Que pertenezcan a Tx el conjunto vacío y el mismo X,
2_Que la unión de un número (finito o infinito) de elementos cualesquiera de Tx, sea también un elemento de Tx,
3_Que la intersección de un número finito de elementos de Tx sea un elemento de Tx.
Los elementos de Tx se denominan abiertos de X con respecto a esta topología. Los cerrados de X con respecto a la topología Tx son los complementarios de los abiertos.

- Base Bx de una topología Tx:

Es una familia de partes de X tal que todos los abiertos de Tx se obtienen como unión de elementos de Bx. Obviamente, elementos de la familia Bx son abiertos.

Espacio topológico:

- Es un par cuyos elementos son un conjunto y una topología definida en dicho conjunto. Así, por ejemplo, (A,Ta) es un espacio topológico si A es un conjunto y Ta es una topología definida en A.

- Clausura de un conjunto A de X:

Es la intersección de todos los cerrados que contienen a A. Si A es igual a su clausura, es cerrado.

- Interior de un conjunto A:

Es la unión de todos los abiertos que están contenidos en A. Si A está contenido en su interior es abierto.

- Adherencia o frontera de un conjunto A:

Es la diferencia entre su clausura y su interior. Un abierto no tiene frontera

- Entorno de un punto $x_0 \in X$:

Es todo conjunto a cuyo interior pertenezca x_0. Un conjunto no es entorno de los puntos de su frontera. Un entorno abierto de x_0 es un abierto a cuyo interior pertenece x_0. Un entorno cerrado de x_0 es un cerrado a cuyo interior pertenece x_0. Todo abierto es entorno de sus puntos.

- Punto de acumulación de un conjunto A del espacio topológico (X,T_x):

El punto p del espacio topológico se dice que es punto de acumulación de A si pertenece a la clausura del conjunto $A-\{p\}$. Cualquier abierto que contenga a p contiene otros puntos de A distintos de p. Cualquier entorno de p contiene puntos de A distintos de p. El conjunto de todos los puntos de acumulación de un conjunto A se denomina conjunto derivado de A.

- Recubrimiento abierto de un espacio topológico (X,T_x):

Es todo conjunto, finito o infinito, de abiertos del espacio, $\{G_i\}_{i\in I}$, $G_i \in T_x$, tal que $X \subseteq \bigcup_{i\in I} G_i$. El espacio topológico (X,T_x) se dice *compacto* si de todo recubrimiento abierto puede extraerse un recubrimiento finito.

Notaciones:

Espacio topológico: (X,T_x)

Familia de abiertos: T_x

Familia de cerrados: F_x

Base de la topología del espacio topológico (X,T_x): B_x Clausura del conjunto A: $\overline{A}$

Interior del conjunto A: $\mathrm{int}(A)$

Adherencia o frontera de A: $Fr(A)$

Familia de entornos abiertos de p en el espacio topológico (X,T_x): $T_X(p)$

Familia de entornos de p: $E(p)$

Función definida del espacio topológico (X,T_X) en el espacio topológico (Y,T_Y): $f: X \to Y$

Imagen por f de un conjunto A: $f(A)$

Imagen inversa por f de un conjunto B: $f^{-1}(B)$

Conjunto derivado del conjunto A: A'

Definición de aplicación continua:

Dados dos espacios topológicos (A,T_A) y (B,T_B), una función definida desde el primero hacia el segundo se dice continua en un punto $x_0 \in A$ sii la imagen inversa de todo entorno abierto de $f(x_0)$ es un entorno de x_0:

$$f : A \to B \ continua \ en \ x_0 \in A \Leftrightarrow \forall G \in T_B(f(x_0)) \to f^{-1}(G) \in E(x_0)$$

o bien:

$$f : A \to B \ continua \ en \ x_0 \in A \Leftrightarrow \forall G \in T_B(f(x_0)), \exists M \in E(x_0) / f(M) \subseteq G$$

que puede enunciarse también así:

$$f : A \to B \ continua \ en \ x_0 \in A \Leftrightarrow \exists M \in E(x_0) / \forall G \in T_B(f(x_0)), f(M) \subseteq G$$

Así, por ejemplo, en el espacio topológico de la recta real con la topología usual formada por los intervalos abiertos de R, la definición de función continua se puede enunciar de esta forma:

$$f : R \to R \ continua \ en \ x_0 \in R \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \in E(x_0) \to f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

es decir:

$$f : R \to R \ continua \ en \ x_0 \in R \Leftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

y usando la noción de distancia ($d(a,b) = |a - b|$):

$$f : R \to R \ continua \ en \ x_0 \in R \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - x_0| \leq \delta \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Caracterizando a las aplicaciones continuas:

Existen varios resultados que son equivalentes a la definición de aplicación continua en un punto de un espacio topológico y permiten, en definitiva, caracterizar la continuidad. Tales resultados se refieren la imagen inversa de abiertos, de cerrados, a la imagen de la clausura o del interior de un conjunto del espacio topológico dado. Veamos esto en el siguiente teorema.

Teorema 01:
Las siguientes proposiciones son equivalentes

1) La función $f : A \to B$ es continua en el espacio (A,T_A).

$$\forall U \in T_B\{f(x_0)\} \to f^{-1}(U) \in E\{x_0\}$$

2) La imagen inversa de un elemento de una base B_B de la topología del espacio topológico imagen es un abierto de la topología T_A del espacio topológico original.

$$\forall U_B \in B_B, f^{-1}(U_B) \in T_A$$

3) La imagen inversa de un elemento de la topología T_B del espacio topológico imagen es un abierto de la topología T_A del espacio topológico original.

$$\forall G \in T_B, f^{-1}(G) \in T_A$$

4) La imagen inversa de un cerrado en la topología T_B del espacio topológico imagen es un cerrado en la topología T_A del espacio topológico original.

$$\forall H \in F_B, f^{-1}(H) \in F_A$$

5) La clausura en la topología T_A de la imagen inversa de un conjunto cualquiera M del espacio topológico imagen está contenida en la imagen inversa de la clausura de M respecto a la topología T_B.

$$\forall M \subseteq B, \overline{f^{-1}(M)} \subseteq f^{-1}(\overline{M})$$

6) La imagen de la clausura de un conjunto N en la topología T_A está contenida en la clausura en la topología T_B de la imagen de N.

$$\forall N \in A, f(\overline{N}) \subseteq \overline{f(N)}$$

7) La imagen inversa del interior de un conjunto M en la topología T_B está contenida en el interior de la imagen inversa de M en la topología T_A del espacio original.

$$\forall M \subseteq B, f^{-1}(\text{int}(M)) \subseteq \text{int}\left(f^{-1}(M)\right)$$

Demostración:

- Veamos que 1) implica 2):
  Si $\forall U \in T_Y\{f(x_0)\}, f^{-1}(U) \in E\{x_0\} \Rightarrow \forall U_B \in B_B, f^{-1}(U_B) \in T_A$:
  Como $\forall U_B \in B_B \to U_B \in T_B$, por ser B_B base de T_B. Para probar que $f^{-1}(U_B) \in T_A$ probemos simplemente que está contenido en su interior y por consiguiente ha de ser un abierto:
  $\forall x_0 \in f^{-1}(U_B) \to f(x_0) \in U_B \wedge U_B \ abierto \to U_B \in T_B\{f(x_0)\} \to$
  $\to f^{-1}(U_B) \in E\{x_0\} \ (por\ 1)) \to x_0 \in \text{int}\left(f^{-1}(U_B)\right)$
  O sea, $f^{-1}(U_B) \subseteq \text{int}\left(f^{-1}(U_B)\right) \to f^{-1}(U_B)$ abierto $\to f^{-1}(U_B) \in T_A$
- Veamos que 2) implica 3):
  Si $\forall U_B \in B_B, f^{-1}(U_B) \in T_A \Rightarrow \forall G \in T_B, f^{-1}(G) \in T_A$:
  Como $\forall G \in T_B, G = \bigcup_{i \in I} U_{Bi}, U_{Bi} \in B_B \to f^{-1}(G) = \left(\bigcup_{i \in I} U_{Bi}\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_{Bi})$.

Es decir,

$$f^{-1}(G)=\bigcup_{i\in I} f^{-1}(U_{Bi})\wedge f^{-1}(U_{Bi})\in T_A\ (por\ 2))\to f^{-1}(G)\in T_A$$

- Veamos que 3) implica 4):

Si $\forall G\in T_B, f^{-1}(G)\in T_A \Rightarrow \forall H\in F_B, f^{-1}(H)\in F_A$:

Puesto que si $H\in F_B\to B-H\in T_B\to f^{-1}(B-H)\in T_A\ (por\ 3))\to$

$\to f^{-1}(B)-f^{-1}(H)\in T_A\to A-f^{-1}(H)\in T_A\to f^{-1}(H)\in F_A$

- Veamos que 4) implica 5):

$\forall H\in F_B, f^{-1}(H)\in F_A\Rightarrow \forall N\in A,\ f(\overline{N})\subseteq\overline{f(N)}$:

De ser $f(N)\subseteq\overline{f(N)}\to N\subseteq f^{-1}f(N)\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(N)}\right)$, y como

$\overline{f(N)}\in F_B$, será $f^{-1}\left(\overline{f(N)}\right)\in F_A\ (por\ 4))$, por tanto se tiene que

$$N\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(N)}\right)\wedge f^{-1}\left(\overline{f(N)}\right) cerrado\to \overline{N}\subseteq f^{-1}\left(\overline{f(N)}\right)\to$$

$$\to f(\overline{N})\subseteq\overline{f(N)}\to$$

- Veamos que 5) implica 6):

Si $\forall N\in A,\ f(\overline{N})\subseteq\overline{f(N)}\Rightarrow \forall M\in B,\ \overline{f^{-1}(M)}\subseteq f^{-1}(\overline{M})$:

Llamemos $N=f^{-1}(M)\to f(N)=f(f^{-1}(M))\subseteq M\to$

$$\to\overline{f(N)}\subseteq\overline{M}\to\overline{f(N)}\subseteq\overline{M}\wedge f(\overline{N})\subseteq\overline{f(N)}\ (por\ 5))\to$$

$$\to f(\overline{N})\subseteq\overline{f(N)}\subseteq\overline{M}\to f^{-1}(f(\overline{N}))\subseteq f^{-1}(\overline{f(N)})\subseteq f^{-1}(\overline{M})$$

O sea:

$$\overline{N}\subseteq f^{-1}(f(\overline{N}))\subseteq f^{-1}(\overline{M})\to\overline{N}\subseteq f^{-1}(\overline{M})\to\overline{f^{-1}(M)}\subseteq f^{-1}(\overline{M})$$

- Veamos que 6) implica 7):

Si $\forall M\in B,\ \overline{f^{-1}(M)}\subseteq f^{-1}(\overline{M})\Rightarrow f^{-1}(\mathrm{int}(M))\subseteq\mathrm{int}\left(f^{-1}(M)\right)$:

Como la unión del interior de un conjunto con la clausura de su complementario es todo el espacio, se tiene que:

$\mathrm{int}(M)\bigcup\left(\overline{B-M}\right)=B\to\mathrm{int}(M)=B-\overline{B-M}$, con lo cual:

$$f^{-1}(\mathrm{int}(M))=f^{-1}(B-\overline{B-M})=f^{-1}(B)-f^{-1}(\overline{B-M})=A-f^{-1}(\overline{B-M})$$

y por 6):

$$\overline{f^{-1}(B-M)}\subseteq f^{-1}(\overline{B-M})\to A-f^{-1}(\overline{B-M})\subseteq A-\overline{f^{-1}(B-M)}$$

por tanto:

$$f^{-1}(\mathrm{int}(M))=A-f^{-1}(\overline{B-M})\subseteq A-\overline{f^{-1}(B-M)}=A-\overline{A-f^{-1}(M)}=$$

$$=\mathrm{int}(f^{-1}(M))$$

- Veamos que 7) implica 1):

Si $f^{-1}(\mathrm{int}(M))\subseteq\mathrm{int}\left(f^{-1}(M)\right)\Rightarrow\forall U\in T_B\{f(x_0)\}, f^{-1}(U)\in E\{x_0\}$:

Pues vemos que $\forall U\in T_B\{f(x_0)\}\to f(x_0)\in\mathrm{int}(U)\to$

$$\to x_0 \in f^{-1}(\mathrm{int}(U)) \subseteq \mathrm{int}(f^{-1}(U))\ (por\ 7)) \to f^{-1}(U)\ es\ entorno\ de\ x_0 \to$$
$$\to f^{-1}(U) \in E\{x_0\}$$

Composición de aplicaciones continuas:

Teorema 02:
Dados tres espacios topológicos, (A,T_A), (B,T_B) y (C,T_C), y dos aplicaciones continuas, $f : A \to B$ y $g : B \to C$, la aplicación compuesta $gof : A \to C$ es también continua.

Demostración:
Bastará aplicar las veces necesarias la proposición 3) del teorema anterior, es decir, que la imagen inversa de un abierto en el espacio topológico imagen es un abierto en el espacio topológico origen.

$$\forall G \in T_c \wedge g\ continua \to g^{-1}(G) \in B \to g^{-1}(G) \in B \wedge f\ continua \to$$
$$\to f^{-1}\left(g^{-1}(G)\right) \in A \to \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right)(G) = \left(g \circ f\right)^{-1}(G) \in A \to g \circ f\ continua$$

Restricción y extensión:

Dados dos espacios topológicos (A,T_A) y (B,T_B), consideremos una aplicación continua $f : A \to B$ del primero en el segundo, y sea (D,T_D) un subespacio topológico del espacio (A,T_A).
Llamamos *inclusión* de D en A a la aplicación $i_D : D \to A$ definida por la condición de que $\forall x \in D, i_D(x) = x \in A$.
Llamamos *restricción* de f a D a la aplicación $f_{/D} : D \to B$ tal que $f_{/D} = f \circ i_D$.

Teorema 03:
Las aplicaciones inclusión y restricción de una aplicación continua, son ambas continuas.
Demostración:
- Para ver que la inclusión i_D es continua, veamos, por ejemplo, que la imagen inversa de un abierto de T_A es un abierto de T_D:

$$\forall G \in T_A \wedge D \subseteq A \to i_D^{-1}(G) \in D \cap G \in T_D$$

- Para ver que la restricción $f_{/D}$ es continua, apliquemos el teorema 02, por el que la composición de aplicaciones continuas, es también aplicación continua.

$$f\ continua \wedge i_D\ continua \to f_{/D} = f \circ i_D\ continua$$

Teorema 04:
Sean dos espacios topológicos, (A,T_A) y (B,T_B), y un recubrimiento abierto de A, $\{G_i\}_{i\in I}$, existiendo para cada elemento G_i del recubrimiento una aplicación continua $f_i : G_i \to B$ tal que $\forall x \in G_i \cap G_j, f_i(x) = f_j(x)$. Existe entonces una aplicación continua $f : A \to B$ tal que su restricción a cada abierto G_i del recubrimiento coincide con la aplicación continua f_i, es decir, $f_{/G_i} = f_i, i \in I$.

Demostración:
Se trata de ver que: a) es posible definir una aplicación $f:A\to B$ tal que efectivamente $f_{/G_i}=f_i, i\in I$, y, a continuación, b) comprobar que la aplicación f así definida es continua.
a) Puesto que $\forall x\in A$, existe al menos un abierto G_l del recubrimiento al cual pertenece x, bastará definir $f:A\to B$ por la condición de que $\forall x\in A, f(x)=f_l(x)$, donde es $f_l:G_l\to B$. Si además existen otros abiertos, $G_h, G_k,\ldots$ del recubrimiento a los cuales pertenece x, se cumple, por hipótesis que $f_l(x)=f_h(x)=f_k(x)=\ldots$, por lo que f está bien definida.
b) Para comprobar que f es continua hemos de probar, por ejemplo, que la imagen inversa de un abierto de B es un abierto de A (apartado 3º del teorema 01). O sea,
$\forall G^0\in T_B, f^{-1}(G^0)\in T_A$

$$\forall G^0\in T_B, f^{-1}(G^0)=\bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(G^0)\wedge f_i \; continua\; \forall i\in I\to f_i^{-1}(G^0)\in T_{G_i}\to$$

$$\to f_i^{-1}(G^0)\in T_{G_i}\wedge \exists U\in T_A / f_i^{-1}(G^0)=G_i\cap U\to f_i^{-1}(G^0)\in T_A\to \bigcup_{i\in I} f_i^{-1}(G^0)\in T_A\to$$

$$\to f^{-1}(G^0)\in T_A$$

Teorema 05:
Sean dos espacios topológicos, (A,T_A) y (B,T_B), y un recubrimiento cerrado finito de A, $\{H_i\}_{i\in I}$, existiendo para cada elemento H_i del recubrimiento una aplicación continua $f_i:H_i\to B$ tal que $\forall x\in H_i\cap H_j, f_i(x)=f_j(x)$. Existe entonces una aplicación continua $f:A\to B$ tal que su restricción a cada cerrado H_i del recubrimiento coincide con la aplicación continua f_i, es decir, $f_{/H_i}=f_i, i\in I$.
Demostración:
Es idéntica a la demostración del teorema anterior, solo que usando en la parte b) el apartado 4º del teorema 01.

Topología inicial y topología final respecto a aplicaciones continuas

Teorema 06:
Dado un conjunto cualquiera, A, una familia de espacios topológicos $\{(B_k, T_{B_{kk}})\}_{k\in K}$ y una familia de aplicaciones $\{f_k\}_{k\in K}$ de A en cada uno de los espacios topológicos, $f_k:A\to B_k, k\in K,$ se verifica que:
a) Existe una topología mínima, T_A, en A, tal que cada una de las aplicaciones f_k es continua. A la topología T_A se le denomina *topología inicial en A respecto de las familias* $\{(B_k, T_{B_{kk}})\}_{k\in K}$ *y* $\{f_k\}_{k\in K}$.
b) Para cualquier otro espacio topológico (C,T_C), una aplicación $h:C\to A$ será continua si y solo si son continuas las aplicaciones compuestas $f_k oh:C\to B_k$.
Demostración:
a) Sea la siguiente familia de partes de A:

$$\alpha=\left\{f_k^{-1}(U_k)/U_k\in T_{B_k}\right\}$$

y sea $T(\alpha)$ la mínima topología que contiene a α . Veamos que $T(\alpha)$ es la topología inicial en A respecto de las familias $\{(B_k, T_{B_{kk}})\}_{k\in K}$ y $\{f_k\}_{k\in K}$.

Cada f_k es continua, pues la imagen inversa de un abierto es también un abierto:

$$\forall U_k \in T_{B_k} \rightarrow f_k^{-1}(U_k) \in \alpha \subseteq T(\alpha) \rightarrow f_k \ continua$$

Para ver que $T(\alpha)$ es mínima, supongamos otra topología T_A^0 en A tal que cada f_k sea continua:

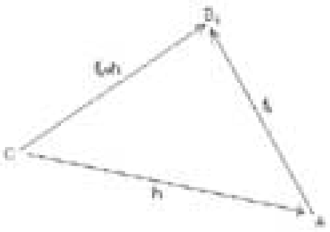
Sabemos que $\forall w \in \alpha, \exists U_j \in T_{B_j} / f_j^{-1}(U_j) = w$, y como f_j es continua en la topología T_A^0, $w = f_j^{-1}(U_j) \in T_A^0 \rightarrow \alpha \subseteq T_A^0 \rightarrow T(\alpha) \subseteq T_A^0$ y $T(\alpha)$ es la mínima topología para la que las f_k son continuas.

b) Veamos la equivalencia:

1_Si $h: C \rightarrow A$ es continua $\rightarrow h \ continua \wedge f_k.k \in K \ continua \rightarrow f_k oh \ continua$ (por el teorema 02)

2_Si cada $f_k \circ h$ es continua, se tiene que $\forall w \in \alpha, \exists U_k \in T_{B_k} / w = f_k^{-1}(U_k)$, por lo que es $h^{-1}(w) = h^{-1}\left(f_k^{-1}(U_k)\right) = (f_k \circ h)^{-1}(U_k) \in T_C$ (por ser continua $f_k \circ h$). Entonces se tiene que $\forall G \in T(\alpha), G = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} w_k\right) / w_k \in \alpha \rightarrow h^{-1}(G) = h^{-1}\left(\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} w_k\right)\right) =$

$$= \bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{k=1}^{n_i} h^{-1}(w_k)\right) \in T_C \rightarrow h \ continua$$



Una consecuencia inmediata de este teorema es el siguiente enunciado:

Teorema 07:

Si es (M, T_M) un espacio topológico, y es A un conjunto cualquiera contenido en M, $A \subset M$, entonces la topología inducida en A por la topología T_M es la topología inicial en A respecto a las familias $\{(M, T_M)\}, \{i_A\}$, donde $i_A : A \rightarrow M$ es la inclusión de A en M.

Demostración: es obvia.

El siguiente análogo del teorema 06 permite definir la idea de topología final.

Teorema 08:

Dado un conjunto cualquiera, A, una familia de espacios topológicos $\{(B_k, T_{B_{kk}})\}_{k\in K}$ y una familia de aplicaciones $\{f_k\}_{k\in K}$ de cada uno de los espacios topológicos en A, $f_k : B_k \rightarrow A, k \in K,$ se verifica que:

a) Existe una topología mínima, T_A, en A, tal que cada una de las aplicaciones f_k es continua. A la topología T_A se le denomina *topología final en A respecto de las familias* $\{(B_k, T_{B_{kk}})\}_{k\in K}$ *y* $\{f_k\}_{k\in K}$.

b) Para cualquier otro espacio topológico (C,T_C), una aplicación $h: A \to C$ será continua si y solo si son continuas las aplicaciones compuestas $hof_k : B_k \to C$

Demostración:

a) La familia $T_A = \{U \subseteq A / f_k^{-1}(U) \in T_{B_k} k \in K\}$ es obviamente una topología en A, pues las f_k son continuas.

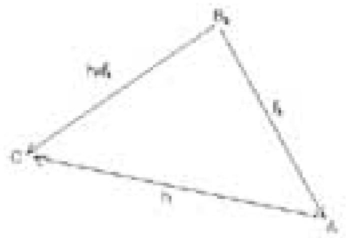
Si es T_A^0 otra topología en A tal que las f_k son continuas, se tiene que:

$\forall G \in T_A^0, f_k^{-1}(G) \in T_{B_k}, k \in K \to G \in T_A \to T_A^0 \subseteq T_A$, por tanto T_A es la mínima topología para la que las f_k son continuas.

b) 1_Si $h: A \to C$ es continua, entonces $hof_k : B_k \to C$ es también continua, pues son continuas las aplicaciones f_k y se verifica el teorema 02.

2_Si $hof_k : B_k \to C$ es continua se cumple que $\forall G^0 \in T_C, (h \circ f_k)^{-1}(G^0) =$

$= f_k^{-1} \circ h^{-1}(G^0) = f_k^{-1}\left(h^{-1}(G^0)\right) \in T_{B_k} \to h^{-1}(G^0) \in T_A \to h: A \to C \ continua$



La continuidad en un espacio métrico:

Si consideramos un espacio vectorial, A, dotado de una métrica o distancia, d_A, podemos encontrar condiciones equivalentes a la continuidad de una aplicación f desde el espacio (A,d_A) en otro espacio métrico (B,d_B), en relación con las métricas de ambos espacios.

El siguiente enunciado nos muestra dos condiciones métricas que son equivalentes a la continuidad de una aplicación $f: A \to B$, en un punto $x_0 \in A$, donde A y B son espacios métricos, (A,d_A) y (B,d_B).

Teorema 09:

Dados los espacios métricos, (A,d_A) y (B,d_B), y una aplicación, $f: A \to B$, son equivalentes los siguientes enunciados:

1) La aplicación f es continua en $x_0 \in A$.
2) Para toda sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ contenida en (A,d_A) convergente en $x_0 \in A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, se verifica que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.
3) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / d_A(x,x_0) < \delta \to d_B(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Demostración:

Veamos que 1) implica 2):

Si la aplicación $f: A \to B$ es continua en $x_0 \in A$ y si la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ es convergente a x_0 ($\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$), se tiene que para probar que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ hemos de probar que $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0(\varepsilon) / \forall n \geq N_0, d_B\left(f(x_n), f(x_0)\right) < \varepsilon$.

Consideremos en el espacio (B,d_B) la bola $G_B = \beta_{d_B}(f(x_0);\varepsilon)$ de centro $f(x_0)$ y radio ε, con lo que G_B será entorno de $f(x_0)$, y, por ser f continua, la imagen inversa de tal entorno de $f(x_0)$ será un entorno de x_0:

$$f^{-1}(G_B) \in E_{d_A}(x_0)$$

Por tanto, existe al menos una bola de centro en x_0 contenida en $f^{-1}(G_B)$:

$$\exists \delta > 0 / \beta_{d_A}(x_0;\delta) \subseteq f^{-1}(G_B)$$

como, por hipótesis es $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, se tiene que $\exists N_0 \in N / \forall n \geq N_0,\ d(x_n,x_0) < \delta$

por consiguiente:

$\exists N_0 \in N / \forall n \geq N_0, x_n \in \beta_{d_A}(x_0;\delta) \subseteq f^{-1}(G_B) \to f(x_n) \in G_B = \beta_{d_B}(f(x_0);\varepsilon) \to$
$\to d_B\big(f(x_n), f(x_0)\big) < \varepsilon$

En definitiva, la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ converge a $f(x_0)$, $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$

Veamos que 2) implica 3):

Hemos de probar que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / d_A(x,x_0) < \delta \to d_B\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Supongamos que no fuera cierto, es decir, supongamos que

$$\forall \delta > 0,\ d_A(x,x_0) < \delta \to d_B\big(f(x), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$$

Si tomamos $\delta = 1/n$, existirá un $x_n \in A$ tal que

$$d_A(x_n,x_0) < 1/n \wedge d_B\big(f(x_n), f(x_0)\big) \geq \varepsilon$$

Es decir, la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ converge y sin embargo la sucesión $\{f(x_n)\}_{n\geq 1}$ no converge, contra la hipótesis. Por tanto, ha de ser:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) / d_A(x,x_0) < \delta \to d_B\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$$

Veamos que 3) implica 1):

Se trata de probar la continuidad de $f: A \to B$ en $x_0 \in A$, es decir, que

$$\forall G \in T_B(f(x_0)),\ f^{-1}(G) \in E(x_0)$$

Vemos que si $G \in T_B(f(x_0)) \to \exists \beta_{d_B}\big(f(x_0);\varepsilon\big) \subseteq G$

Y también, por hipótesis, si $\exists \delta / d_A(x,x_0) < \delta \to d_B\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$

Entonces, $\forall z \in \beta_{d_A}(x_0;\delta) \to d_A(z,x_0) < \delta \to d_B\big(f(z), f(x_0)\big) < \varepsilon \to$

$\to f(z) \in \beta_{d_B}\big(f(x_0);\varepsilon\big) \subseteq G \to z \in f^{-1}(G)$

Por tanto, aplicando esto a x_0: $x_0 \in \beta_{d_A}(x_0;\delta) \to x_0 \in f^{-1}(G)$, es decir $f^{-1}(G) \in E(x_0)$

La continuidad uniforme:

Dados dos espacios métricos, (A,d_A) y (B,d_B), la aplicación $f: A \to B$ se dice que es uniformemente continua si se verifica que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x,y \in A,\ d_A(x,y) < \delta \to d_B\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

Teorema 10:

Si $f: A \to B$ es uniformemente continua, entonces también es continua en todo punto $x_0 \in A$.

Demostración:
Es obvio, pues llamando $x_0 = y$ se tiene:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / d_A(x, x_0) < \delta \to d_B(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

que es el enunciado 3) del teorema anterior, equivalente a la continuidad en $x_0 \in A$

La proposición inversa no siempre resulta ser cierta. En el siguiente teorema se establece una condición para que la continuidad en un punto implique la continuidad uniforme.

Teorema 11:
Sean los espacios métricos (A, d_A), (B, d_B), y la aplicación continua $f : A \to B$. Si el espacio A es compacto, entonces f es uniformemente continua.
Demostración:
Sabemos que un espacio topológico es compacto si de todo recubrimiento abierto puede extraerse un recubrimiento finito.
Si la aplicación $f : A \to B$ es continua en $a \in A$, se cumplirá que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_a > 0 / d_A(x, a) < r_a \to d_B(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

o bien, usando la noción de bola de centro en a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r_a > 0 / x \in \beta_{d_A}(a; r_a) < r_a \to d_B(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Consideremos la familia de todas las bolas de centro en cada uno de los puntos del espacio: $\beta_{d_A}(a; r_a / 2), \forall a \in A$.
Tal familia obviamente recubre el espacio A, que, al ser, por hipótesis, compacto, admitirá un recubrimiento finito:

$$A \subseteq \beta_{d_A}(a_1; r_1 / 2) \cup \beta_{d_A}(a_2; r_2 / 2) \cup \ldots \cup \beta_{d_A}(a_m; r_m / 2)$$

Es decir, el espacio A queda recubierto por un número finito de bolas centradas en cada uno de los m puntos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, con radios respectivos $r_1 / 2, r_2 / 2, \ldots, r_m / 2$.
Tomemos el mínimo de los radios de tales bolas:

$$\delta = \min\{r_1 / 2, r_1 / 2, \ldots, r_m / 2\}$$

y probemos que para este valor de δ se verifica la condición de continuidad uniforme dada en la definición, es decir, probemos que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, y \in A, d_A(x, y) < \delta \to d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

si $d_A(x, y) < \delta$, existe al menos una bola $\beta_{d_A}(a_k; r_k / 2)$ a la que pertenece x:

$$\forall \varepsilon > 0, x \in \beta_{d_A}(a_k; r_k / 2) \to d_B(f(x), f(a_k)) < \varepsilon / 2$$

por otra parte:

$$d_A(y, a_k) \le d_A(y, x) + d_A(x, a_k) < \delta + r_k / 2 \le r_k \to y \in \beta_{d_A}(a_k; r_k)$$

por tanto: $\forall \varepsilon > 0, y \in \beta_{d_A}(a_k; r_k) \to d_B(f(y), f(a_k)) < \varepsilon / 2$
y de ambas desigualdades:

$$d_B(f(x), f(y)) \le d_B(f(x), f(a_k)) + d_B(f(a_k), f(y)) \le \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

en definitiva, es

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x, y \in A, d_A(x, y) < \delta \to d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

y la continuidad de $f : A \to B$ es uniforme.

Teorema 12:
Dado el espacio métrico (A, d_A) y el subconjunto $M \subseteq A$ no vacío, la aplicación $f : A \to R$ definida por $\forall x \in A, f(x) = d(x, M)$ es uniformemente continua.
Demostración:
Se trata de probar que se verifica la condición:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / \forall x, y \in A, d_A(x,y) < \delta \to d_R\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon \to \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$$

Se tiene:

$\forall x, y \in A, \forall z \in M, d_A(x,z) \leq d_A(x,y) + d_A(y,z) \to d_A(x,M) \leq d_A(x,y) + d_A(y,M) \to$
$\to \left|d_A(x,M) - d_A(y,M)\right| \leq d_A(x,y)$

O sea:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \varepsilon > 0 / \ d_A(x,y) < \delta \to \left|f(x) - f(y)\right| \leq d_A(x,y) < \varepsilon$$

Teorema 13:

Para tres espacios métricos, (A, T_A), (B, T_B) y (C, T_C), y dos aplicaciones uniformemente continuas, $f : A \to B$ y $g : B \to C$, se verifica que la aplicación compuesta, $g \circ f : A \to C$ es también uniformemente continua.

Demostración:

Por ser g uniformemente continua:

$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 / \forall x', y' \in B, d_B(x', y') < \delta \to d_C\big(g(x'), g(y')\big) < \varepsilon$

Por ser *f* uniformemente continua:

$\exists\mu > 0 / \forall x, y \in A, d_A(x,y) < \mu \to d_B\big(f(x), f(y)\big) < \delta \to d_c(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon$

Por tanto:

$\forall\varepsilon > 0, \exists\mu > 0 / d_A(x,y) < \mu \to d_C((f \circ g)(x), (f \circ g)(y)) < \varepsilon$

Extensión elemental de las aplicaciones continuas

Teorema 14:

Dados los espacios métricos, (A, d_A) y (B, d_B), y dos aplicaciones continuas, $f : A \to B$ y $f : A \to B$, se verifica:

1) El conjunto $M \subseteq A$ definido por $M = \{x \in A / f(x) = g(x)\}$ es cerrado.
2) Si M es denso en A, entonces $f = g$.

Demostración:

1) Si $x_0 \in A - M \to x_0 \notin M \to f(x_0) \neq g(x_0) \to d_B(f(x_0), g(x_0)) = \varepsilon > 0$

Sin embargo, si ambas funciones, f y g, son continuas en x_0, se tiene que

$$\exists\delta > 0 / d_A(x, x_0) < \delta \to d_B(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2 \wedge d_B(g(x), g(x_0)) < \varepsilon/2$$

es decir, existe un entorno de x_0 en donde se verifica que

$$d_B(f(x), f(x_0)) < \varepsilon/2, \quad d_B(g(x), g(x_0)) < \varepsilon/2$$

En el supuesto de que ambas funciones fueran iguales, $f(x) = g(x)$, en dicho entorno, llegaríamos a una contradicción, pues por la desigualdad triangular, sería:

$$d_B(f(x_0), g(x_o)) \leq d_B(f(x_0), f(x)) + d_B(g(x), g(x_0)) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

por tanto, ha de ser $f(x) \neq g(x)$, por lo que $x \notin M$.

En definitiva vemos, pues, que si un punto $x_0 \in A - M$ existe un entorno que pertenece también a A-M, por lo que A-M es abierto.

Si A-M es abierto, por definición M es cerrado.

2) Dado un espacio topológico (A, T_A) se dice que un subconjunto $M \subseteq A$ es denso en A sii su clausura coincide con A, esto es, sii $\overline{M} = A$. Es obvio que si M es cerrado, entonces contiene a su clausura, y por tanto M=A.

Esto quiere decir que en todo el espacio A se verifica que ambas funciones son iguales: $f(x) = g(x), \forall x \in A$.

La demostración anterior se ha hecho mediante el principio de que si un conjunto cerrado es denso en un espacio la igualdad de funciones en el conjunto se puede extender a la igualdad de funciones en todo el espacio. Esto se ha dado en llamar *principio de extensión de igualdades.*

El siguiente teorema utiliza el mismo principio para las desigualdades. Se puede llamar *principio de extensión de desigualdades.*

Teorema 15:
Sea el espacio métrico (A, d_A) y dos aplicaciones continuas de A en la recta real ampliada, $f : A \to \overline{R}$ y $g : A \to \overline{R}$. Sea M el subconjunto de A formado por los elementos cuya imagen por f es menor o igual a su imagen por g:

$$M = \{x \in A / f(x) \leq g(x)\}$$

Se verifica:

1) M es cerrado en A.
2) Si M es denso en A, entonces $f(x) \leq g(x), \forall x \in A.$

Demostración:

1) $\forall x_0 \in A - M \to x_0 \notin M \to f(x_0) > g(x_0) \to \exists \varphi \in \overline{R} / f(x_0) > \varphi > g(x_0)$

Sea $G_f = f^{-1}(\varphi, +\infty)$ y $G_g = g^{-1}(-\infty, \varphi)$

Por ser f continua, G_f es entorno de x_0, y por ser g continua, también G_g es entorno de x_0, por tanto $G_f \cap G_g$ es entorno de x_0, y se cumple para $\forall x \in G_f \cap G_g$ que

$f(x) > \varphi > g(x) \to x \notin M \to x \in A - M \to G_f \cap G_g \in T_{d_A}(x_0)$

Es decir:

$\forall x_0 \in A - M, \exists G_f \cap G_g \in T_{d_A}(x_0) / G_f \cap G_g \subseteq A - M \to A - M \ abierto \to M \ cerrado$

2) Si el conjunto M es denso en A, entonces, por definición, $\overline{M} = A$ y como M es cerrado en A coincide con su clausura, por lo que $M = \overline{M} = A$: $f(x) \leq g(x), \forall x \in A.$

Bibliografía:

Seifert, H.-Threfall, W.; A Textbook of topology, Academic Press, Inc., 1990
Hocking, J. G.-Young, G.S.; Topología, Editorial Reverté, Barcelona, 1975
Massey, William S.; Introducción a la Topología Algebraica, Editorial Reverté, Barcelona, 1982.
N.Bourbaki; Topologie Générale, Ediciones Hermann, Paris, 1971