ESPACIOS EUCLIDIANOS Y CÁLCULO DIFERENCIAL ABSOLUTO

00.Introducción a los espacios euclidianos

Un espacio afín, o puntual, real n-dimensional, que podemos denotar por E_n, es una terna $E_n = \left(E, V_n(R), f\right)$ en donde E es un conjunto cuyos elementos llamaremos *puntos del espacio afin*, $V_n(R)$ es un espacio vectorial real n-dimensional y f es una aplicación del conjunto producto ExE *en* $V_n(R)$ que cumple las condiciones:

$$\forall A \in E, \forall \vec{x} \in V_n(R), \exists \dot{B} \in E \, / \, f(A,B) = \vec{x}$$
$$\forall A,B,C \in E,\ f(A,C) = f(A,B) + f(B,C)$$
$$f(A,B) = \vec{0} \rightarrow A = B$$

(la notación $\dot{B}$ significa "único B")

Si el espacio vectorial asociado $V_n(R)$ es unidimensional, el espacio puntual afín asociado se denomina *Recta Afín*.
Si el espacio vectorial asociado $V_n(R)$ es bidimensional, el espacio puntual afín asociado se denomina *Plano Afín*.
Si el espacio vectorial asociado $V_n(R)$ es tridimensional, el espacio puntual afín asociado se denomina *Espacio Afín Tridimensional*.

Un espacio vectorial $V_n(R)$ es *euclidiano* si esta dotado de un producto interior, esto es, de una aplicación $p_i : V_n(R) x V_n(R) \rightarrow R$, o sea

$$\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in V_n(R) x V_n(R),\ p_i(\vec{x}, \vec{y}) \in R$$

que, por simplicidad, representaremos en adelante por el paréntesis $(\vec{x}, \vec{y}) \equiv p_i(\vec{x}, \vec{y})$. Es decir, "$(\vec{x}, \vec{y})$" significará "producto interior de los vectores $\vec{x}$ y $\vec{y}$", y que ha de cumplir las cinco condiciones siguientes:

a) Propiedad de conmutatividad:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n(R), (\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$$

b) Propiedad de distributividad respecto a la suma:

$$\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n(R), (\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$$

c) Propiedad de asociatividad mixta:

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n(R), (\vec{x}, \alpha \vec{y}) = (\alpha \vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y})$$

d) Propiedad de definición positiva:

$$\forall \vec{x} \in V_n(R), (\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$$

e) Propiedad de no degeneración:

$$\vec{x} \in V_n(R), (\vec{x}, \vec{x}) = 0 \rightarrow \vec{x} = 0$$

Un Espacio Puntual Euclidiano n dimensional es un espacio afín asociado a un espacio vectorial euclidiano n dimensional.

01. Sobre los sistemas de referencia. Coordenadas contravariantes y covariantes

Un sistema de referencia afín está constituido por un punto del espacio puntual euclidiano, que se llama origen del sistema de referencia, y una base del espacio vectorial asociado $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} = \{\vec{e}_i\}_n$.

Sistema de referencia con origen en el punto O: $\left(o, \{\vec{e}_i\}_n\right)$

Se llama vector de posición de un punto X del espacio, con respecto al sistema de referencia $\left(o, \{\vec{e}_i\}_n\right)$, al vector $\vec{x}$ de origen O y extremo X:

$$\bar{O}\vec{X} \equiv \vec{x} = x^1 \vec{e}_1 + ... + x^n \vec{e}_n \equiv x^i \vec{e}_i$$

Se denominan coordenadas contravariantes del vector $x^i \vec{e}_i$ en la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} = \{\vec{e}_i\}_n$ a las componentes $x^i, i = 1, ..., n$ del vector en dicha base.

Se denominan coordenadas covariantes del vector $x^i \vec{e}_i$ en la base $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} = \{\vec{e}_i\}_n$ a los productos interiores $x_j = (\vec{x}, \vec{e}_j), \; j = 1, ..., n$.

Un elemento diferencial de vector OX expresado en el sistema referencial fijo $\left(o, \{\vec{e}_i\}_n\right)$ es el vector cuyas coordenadas contravariantes en dicho sistema son las diferenciales de las funciones coordenadas de OX en tal sistema referencial:

$$d\bar{O}\vec{X} \equiv d\vec{x} = dx^1 \vec{e}_1 + ... + dx^n \vec{e}_n \equiv dx^i \vec{e}_i$$

02. El producto interior. La matriz métrica de Gramm

Producto interior de dos vectores expresados en la misma base, en función de sus coordenadas contravariantes:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x}=x^i\vec{e}_i\\ \vec{y}=y^j\vec{e}_j\end{array}\right\}\rightarrow(\vec{x},\vec{y})=\left(x^i\vec{e}_i,y^j\vec{e}_j\right)=x^i y^j\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=x^i y^j g_{ij}$$

Producto interior de los vectores diferenciales expresados en la misma base en función de sus coordenadas contravariantes:

$$\left.\begin{array}{l}d\vec{x}=dx^i\vec{e}_i\\ d\vec{y}=dy^j\vec{e}_j\end{array}\right\}\rightarrow(d\vec{x},d\vec{y})=\left(dx^i\vec{e}_i,dy^j\vec{e}_j\right)=dx^i dy^j\left(\vec{e}_i,\vec{e}_j\right)=dx^i dy^j g_{ij}$$

La matriz cuadrada

$$(g_{ij})_n\equiv((\vec{e}_i,\vec{e}_j))_n=\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n}\\ \dots & \dots & \dots\\ g_{n1} & \dots & g_{nn}\end{pmatrix}$$

se denomina *Matriz de Gramm* en la base indicada.

Si la base es ortogonal:

$$(g_{ij})_n\equiv((\vec{e}_i,\vec{e}_j))_n=\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & \dots & 0\\ 0 & g_{22} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & g_{nn}\end{pmatrix}$$

y si es ortonormal:

$$(g_{ij})_n\equiv((\vec{e}_i,\vec{e}_j))_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

El módulo y la norma de un vector en función de las coordenadas contravariantes:

$$\left|\vec{x}\right|=+\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}=+\sqrt{x^i y^j g_{ij}}\ ,\qquad N(\vec{x})=\left|\vec{x}\right|^2=\left[\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}\right]^2=+x^i x^j g_{ij}$$

En forma diferencial:

$$\left|d\vec{x}\right|=+\sqrt{\left(d\vec{x},d\vec{x}\right)}=+\sqrt{dx^i dx^j g_{ij}}\ ,\qquad N(d\vec{x})=\left|d\vec{x}\right|^2=\left(d\vec{x},d\vec{x}\right)=dx^i dx^j g_{ij}$$

En una base ortogonal:

$$\left|\vec{x}\right|=+\sqrt{\left(\vec{x},\vec{x}\right)}=+\sqrt{(x^i)^2 g_{ii}}\equiv\sqrt{(x^1)^2 g_{11}+\dots+(x^n)^2 g_{nn}}$$

$$N(\vec{x})=\left|\vec{x}\right|^2=(\vec{x},\vec{x})=+(x^i)^2 g_{ij}\equiv(x^1)^2 g_{11}+\dots+(x^n)^2 g_{nn}$$

$$\left|d\vec{x}\right|=+\sqrt{\left(d\vec{x},d\vec{x}\right)}=+\sqrt{(dx^i)^2 g_{ii}}\equiv\sqrt{(dx^1)^2 g_{11}+\dots+(x^n)^2 g_{nn}}$$

$$\mathcal{N}(d\vec{x}) = \left|d\vec{x}\right|^2 = \left(d\vec{x}, d\vec{x}\right) = +(dx^i)^2 g_{ii} \equiv (dx^1)^2 g_{11} + \ldots + (x^n)^2 g_{nn}$$

Y si la base es ortonormal:

$$\left|\vec{x}\right| = +\sqrt{\left(\vec{x}, \vec{x}\right)} = +\sqrt{(x^i)^2} \equiv +\sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$$

$$\mathcal{N}(\vec{x}) = \left|\vec{x}\right|^2 = (\vec{x}, \vec{x}) = (x^i)^2 \equiv (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$$

$$\left|d\vec{x}\right| = +\sqrt{\left(d\vec{x}, d\vec{x}\right)} = +\sqrt{(dx^i)^2} \equiv +\sqrt{(dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2}$$

$$\mathcal{N}(d\vec{x}) = \left|d\vec{x}\right|^2 = (d\vec{x}, d\vec{x}) = (dx^i)^2 \equiv (dx^1)^2 + \ldots + (dx^n)^2$$

Relación entre componentes contravariantes y componentes covariantes:

Se tiene: $x_k = (\vec{x}, \vec{e}_k) = \left(x^i \vec{e}_i, \vec{e}_k\right) = x^i (\vec{e}_i, \vec{e}_k) = x^i g_{ik} \quad k = 1,\ldots,n$

O sea, $x_k = x^i g_{ik} \quad k = 1,\ldots,n$

O bien, llamando $(g^{ik})_n$ a la matriz inversa de $(g_{ik})_n$, se tiene que

$x^i = x_k g^{ik} \quad i = 1,\ldots,n$

El producto interior en función de las componentes contravariantes y covariantes:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(x^i \vec{e}_i, y^j \vec{e}_j\right) = x^i y^j \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) = x^i y^j g_{ij} = x^i g_{ij} y^j = x_j y^j$$

Distancia ds entre dos puntos infinitamente próximos, X_1, X_2, de vectores de posición respectivos $\vec{x}_1, \vec{x}_2$:

$$ds = dist(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \left|\vec{x}_1 - \vec{x}_2\right| = \left|d\vec{x}\right| = +\sqrt{dx^i dx^j g_{ij}}$$

Derivada y diferencial del producto interior:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \frac{d}{dt}\left(x^i y^j g_{ij}\right) = \frac{dx^i}{dt} y^j g_{ij} + x^i \frac{dy^j}{dt} g_{ij} = \left(\frac{d\vec{x}}{dt}, \vec{y}\right) + \left(\vec{x}, \frac{d\vec{y}}{dt}\right)$$

$$d\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(d\vec{x}, \vec{y}\right) + \left(\vec{x}, d\vec{y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial z^k}\left(\vec{x}, \vec{y}\right) = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial z^k}, \vec{y}\right) + \left(\vec{x}, \frac{\partial \vec{y}}{\partial z^k}\right)$$

Ejemplo:

La matriz de Gramm en una cierta base $\left\{\vec{e}_i\right\}_3$ de un espacio vectorial euclidiano tridimensional es

$$\left(g_{ik}\right)_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz inversa $\left(g^{ik}\right)_3$.
b) Encontrar las componentes covariantes del vector $\vec{x}$ cuyas componentes contravariantes vienen dadas por $(x^1,x^2,x^3)=\left(3,5,1\right)$.
c) Encontrar las componentes contravariantes del vector $\vec{y}$ cuyas componentes covariantes son ($y_1,y_2,y_3)=(29,9,6)$.
d) Hallar el producto de ambos vectores usando las componentes contravariantes.
e) Hallar el producto de ambos vectores usando las componentes covariantes.
f) Hallar el producto de ambos vectores usando el producto de las componentes contravariantes por las componentes covariantes.

Resolución:

a) Inversa (llamando g al determinante de la matriz):

$$(g^{ik})_3=\frac{1}{g}\left[(g_{ik})^t\right]^{adj} = -\frac{1}{28}\begin{pmatrix} 1 & -5 & -7 \\ -5 & -3 & 7 \\ -7 & 7 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{7}{28} \\ \frac{7}{28} & -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{pmatrix}$$

b) $$x_k = x^i g_{ik} \rightarrow (x_1,x_2,x_3)=\left(3,5,1\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\left(20,18,2\right)$$

c) $$y^k = y_i g^{ik} \rightarrow \left(y^1,y^2,y^3\right)=\left(29,9,6\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{7}{28} \\ \frac{7}{28} & -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{pmatrix}=\left(2,5,7\right)$$

d) $$(\vec{x},\vec{y})=x^i y^k g_{ik} \rightarrow \left(3,5,1\right)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}=144$$

e) $$(\vec{x},\vec{y})=x_i y_k g^{ik} = \left(20,18,2\right)\begin{pmatrix} -\frac{1}{28} & \frac{5}{28} & \frac{7}{28} \\ \frac{5}{28} & \frac{3}{28} & -\frac{7}{28} \\ \frac{7}{28} & -\frac{7}{28} & \frac{7}{28} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 29 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix}=144$$

f) $\vec{x},\vec{y}) = x_i y^i = x^k y_k \rightarrow \begin{cases} (3,5,1)\begin{pmatrix} 29 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = 144 \\ (2,5,7)\begin{pmatrix} 20 \\ 18 \\ 2 \end{pmatrix} = 144 \end{cases}$

03. La matriz de Jacobi. Sistema natural de referencia

Dados dos sistemas de referencia con el mismo origen

$$\left(o,\{\vec{e}_i\}_n\right),\ \left(o,\{\vec{u}_k\}_n\right)$$

podemos obtener la relación entre los vectores de ambas bases, si conocemos las relaciones entre las componentes contravariantes de un vector $\vec{x}$ en ambos sistemas de referencia.

Así, si la expresión del vector $\vec{x}$ en ambos sistemas es

$$\vec{x} = x^k\vec{u}_k = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + \ldots + x^n\vec{u}_n$$
$$\vec{x} = y^i\vec{e}_i = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + \ldots + y^n\vec{e}_n$$

Y si las relaciones entre las componentes contravariantes del vector en ambos sistemas vienen definidas por las funciones diferenciables

$$\begin{cases} x^1 = x^1(y^1, y^2, \ldots, y^n) \\ x^2 = x^2(y^1, y^2, \ldots, y^n) \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ x^n = x^n(y^1, y^2, \ldots, y^n) \end{cases}$$

Se tiene para la expresión diferencial del vector $\vec{x}$ en ambos sistemas:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{x} = x^k\vec{u}_k \\ \vec{x} = y^i\vec{e}_i \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} d\vec{x} = dx^k\vec{u}_k \\ d\vec{x} = dy^i\vec{e}_i \end{array}\right\} \rightarrow d\vec{x} = dx^k\vec{u}_k = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}dy^i\vec{u}_k = dy^i\vec{e}_i \rightarrow \vec{e}_i = \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\vec{u}_k$$

o sea: $\left(o,\{\vec{e}_i\}_n\right) = \left(o,\left\{\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\vec{u}_k\right\}_n\right)$

Con lo que ambos sistemas de referencia son:

$$\left(o,\left\{\frac{\partial x^k}{\partial y^i}\vec{u}_k\right\}_n\right),\ \left(o,\{\vec{u}_k\}_n\right)$$

La matriz de paso, $J_n = \left(\dfrac{\partial x^k}{\partial y^i} \right)$ se denomina matriz de Jacobi.

Ejemplo de determinación de la matriz de Jacobi para el caso tridimensional:

Consideremos los sistemas de referencia del espacio tridimensional:

$$\left(0,\{\vec{e}_i\}\right) \equiv \left(0,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\right) \text{ y } \left(0,\{\vec{u}_k\}\right) \equiv \left(0,\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\right)$$

Sea el vector $\vec{x} = x^k \vec{u}_k = x^1\vec{u}_1 + x^2\vec{u}_2 + x^3\vec{u}_3 = y^1\vec{e}_1 + y^2\vec{e}_2 + y^3\vec{e}_3$, y sean las relaciones entre las componentes contravariantes en uno y otro sistema dadas por

$$\begin{cases} x^1 = 7y^1 + y^3 \\ x^2 = y^2 \\ x^3 = 2y^3 + 5y^1 + y^2 \end{cases}$$

Se tiene, entonces, que

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}_1 \\ \vec{u}_2 \\ \vec{u}_3 \end{pmatrix}$$

Matriz de Jacobi:

$$J_n = \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^i} \right) = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y podemos expresar ambos sistemas de referencia mediante uno solo de ellos:

$$\left(0,\{\vec{e}_i\}\right) \equiv \left(0,\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}\right) = \left(0,\{7\vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{u}_2, 5\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3\}\right)$$
$$\left(0,\{\vec{u}_k\}\right) \equiv \left(0,\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}\right)$$

Esto nos indica que, fijado un sistema de referencia, $\left(o,\{\vec{u}_i\}_n\right)$, para cada vector $\vec{x}$ puede definirse una nueva base por $\left\{ \dfrac{\partial x^k}{\partial y^i} \vec{u}_k \right\}_n$.

Se denomina sistema *natural de referencia* al par constituido por un vector $\vec{x}$ y una base $\{\vec{u}_i\}_n$:

$$\left(\vec{x},\{\vec{u}_i\}_n\right)$$

04. Sobre el carácter tensorial de una magnitud. covariancia y contravariancia:

Consideremos un cambio de la base $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$ a la base $\left\{\vec{e}_j\right\}_n$

$$\left\{\vec{u}_k\right\}_n \to \left\{\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\vec{u}_k\right\} = \left\{\vec{e}_j\right\}_n$$

esto es, llamando $A_j^k \equiv \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j}\right)$ a la matriz de paso, $\vec{e}_j = A_j^k \vec{u}_k$, y llamemos B_k^j a la matriz del paso inverso $\vec{u}_k = B_k^j \vec{e}_j$.

Una magnitud T' expresada en la base $\left\{\vec{e}_j\right\}_n$ tiene carácter tensorial sii está relacionada con la misma magnitud T expresada en al base $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$ mediante el producto de las matrices de paso indicadas antes:

$$T' = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2}....A_{j_p}^{k_p}.B_{k_1}^{j_1}.B_{k_2}^{j_2}....B_{k_s}^{j_s}.T$$

diremos que la magnitud tensorial T es p-covariante y s-contravariante.

Ejemplos:

1) $T'_{j_1 j_2} = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2} T_{k_1 k_2}$ es un tensor 2-covariante
2) $T'^{i_1}_{j_1 j_2} = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2} B_{h_1}^{i_1} T_{k_1 k_2}^{h_1}$ es un tensor 2-covariante 1-contravariante
3) $T'^{i_1 i_2} = B_{h_1}^{i_1} B_{h_2}^{i_2} T^{h_1 h_2}$ es un tensor 2-contravariante
4) $T'_{j_1 j_2} = A_{j_1}^{k_1}.A_{j_2}^{k_2} T_{k_1 k_2} + H$ no es un tensor

05.La transformación de Christöffel

Puesto que la base del sistema natural de referencia depende del vector $\vec{x}$, se tiene que si varía el vector $\vec{x}$ también variará la base del sistema de referencia natural. La expresión matemática de esta variación para un cambio infinitesimal del vector $\vec{x}$ se denomina *Transformación de Christöffel.*

$$\left(\vec{x}, \left\{\vec{u}_k\right\}_n\right) \to \left(\vec{x} + d\vec{x}, \left\{\vec{u}_k + d\vec{u}_k\right\}_n\right)$$

Es decir, se tiene que llamando x^k las coordenadas del vector $\vec{x}$ en la base $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$:

Sistema de referencia natural: $\left(\vec{x}(x^k), \left\{\vec{u}_k(x^k)\right\}_n\right)$

$$d\vec{x} = dx^k \vec{u}_k = \frac{\partial x^k}{\partial y^j} dy^j \vec{u}_k$$

$$d\vec{u}_k = \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial y^j} dy^j = \Gamma_{kj}^h dy^j \vec{u}_h$$

(llamando Γ_{kj}^{h} a las componentes de los vectores derivados $\dfrac{\partial \vec{u}_k}{\partial y^j}$ en la base $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$. Estos símbolos se denominan símbolos de Christöffel de 2ª especie)

En definitiva, la transformación de Christöffel queda descrita por:

$$\left(\vec{x},\left\{\vec{u}_k\right\}_n\right) \to \left(\left(x^k + \frac{\partial x^k}{\partial y^j}dy^j\right)\vec{u}_k,\left\{\vec{u}_k + \Gamma_{kj}^{h}dy^j\vec{u}_h\right\}_n\right)$$

06. La transformación de Christoffel en función de la matriz de Gramm. La identidad de Ricci.

Veamos la expresión de la transformación de Christöffel con respecto a la matriz métrica $G(g_{kj})_n$ de Gramm:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^s} = \frac{\partial}{\partial y^s}\left(\vec{u}_i,\vec{u}_j\right) = \left(\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial y^s},\vec{u}_j\right) + \left(\vec{u}_i,\frac{\partial \vec{u}_j}{\partial y^s}\right) = \left(\Gamma_{is}^{h}\vec{u}_h,\vec{u}_j\right) + \left(\vec{u}_i,\Gamma_{js}^{k}\vec{u}_k\right) =$$
$$= \Gamma_{is}^{h}\left(\vec{u}_h,\vec{u}_j\right) + \Gamma_{js}^{k}\left(\vec{u}_i,\vec{u}_k\right) = \Gamma_{is}^{h}g_{hj} + \Gamma_{js}^{k}g_{ik}$$

En definitiva:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^s} = \Gamma_{is}^{h}g_{hj} + \Gamma_{js}^{k}g_{ik}$$

o bien, por tratarse de una matriz simétrica:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial y^s} = \Gamma_{is}^{h}g_{jh} + \Gamma_{js}^{k}g_{ki}$$

a efectos de simplificación, podemos llamar:

$$(is,j) \equiv \Gamma_{is}^{h}g_{jh} = \Gamma_{is}^{h}g_{hj}\ ,\ (js,i) \equiv \Gamma_{js}^{k}g_{ki} = \Gamma_{js}^{k}g_{ik}$$

Estos nuevos símbolos se denominan símbolos de Christoffel de 1ª especie. Usando la matriz inversa de Gramm, podemos despejar los símbolos de 2ª especie en función de estos nuevos símbolos:

$$\Gamma_{is}^{h} = (is,j).g^{jh},\quad \Gamma_{js}^{k} = (js,i).g^{ki}$$

Por tanto, la expresión de la derivada parcial de los elementos de la matriz de Gramm queda, en función de los símbolos de Christoffel de 1ª especie, en la forma:

$$\partial_s g_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^s} = \left(is,j\right) + \left(js,i\right) \qquad [6.1]$$

(*Identidad de Ricci*)

variando subíndices en la identidad de Ricci, tenemos:

$$\P_s g_{ij} = \left(is, j\right) + \left(js, i\right)$$
$$\P_i g_{sj} = \left(si, j\right) + \left(ji, s\right)$$
$$\P_j g_{si} = \left(sj, i\right) + \left(ij, s\right)$$

de donde: $(is, j) = \frac{1}{2}\left(\P_i g_{sj} + \P_s g_{ij} - \P_j g_{si}\right)$

Esto nos permite escribir la transformación de Christoffel en función de los símbolos de primera especie, o bien, en función de la métrica del espacio:

$$\left(\vec{x}, \left\{\vec{u}_k\right\}_n\right) \rightarrow \left(\left(x^k + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} dy^j\right)\vec{u}_k, \left\{\vec{u}_k + (kj,i).g^{ih} dy^j \vec{u}_h\right\}_n\right)$$

$$\left(\vec{x}, \left\{\vec{u}_k\right\}_n\right) \rightarrow \left(\left(x^k + \frac{\partial x^k}{\partial y^j} dy^j\right)\vec{u}_k, \left\{\vec{u}_k + \frac{1}{2}\left(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{kj}\right).g^{ih} dy^j \vec{u}_h\right\}_n\right)$$

07. Carácter tensorial de los símbolos que aparecen en la transformación de Christöffel:

07.1. Carácter tensorial de la matriz de gramm:

Consideremos el cambio $\vec{e}_j = A_j^k \vec{u}_k$ y llamemos $g'_{ij} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right)$, $g_{kh} = \left(\vec{u}_k, \vec{u}_h\right)$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(x^i \vec{e}_i, x^j \vec{e}_j\right) = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) x^i x^j = g'_{ij} x^i x^j$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \left(x^i \vec{e}_i, x^j \vec{e}_j\right) = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) x^i x^j = \left(A_i^k \vec{u}_k, A_j^h \vec{u}_h\right) x^i x^j = A_i^k A_j^h g_{kh} x^i x^j$$

identificando:

$$g'_{ij} = A_i^k A_j^h g_{kh}$$

Se trata, por tanto, de un tensor 2-covariante.

07.2. Carácter tensorial de los símbolos de Christoffel:

Sean las bases $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$ y $\left\{\vec{e}_j\right\}_n$, donde los vectores varían respecto a las coordenadas respectivas $\vec{u}_k = \vec{u}_k(x^1,...,x^n)$ y $\vec{e}_j = \vec{e}_j(y^1,...,y^n)$. Consideremos el paso de la base $\left\{\vec{u}_k\right\}_n$ a la base $\left\{\vec{e}_j\right\}_n$, $\left\{\vec{u}_k\right\}_n \rightarrow \left\{\vec{e}_j\right\}_n$, con $\vec{e}_j = A_j^k \vec{u}_k = \frac{\partial x^k}{\partial y^j}\vec{u}_k$. Se tiene:

$$\Gamma'^r_{pq}\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_p}{\partial y^q} = \frac{\partial}{\partial y^q}\left(A_p^k \vec{u}_k\right) = \frac{\partial A_p^k}{\partial y^q}\vec{u}_k + A_p^k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial y^q} = \frac{\partial A_p^k}{\partial y^q}\vec{u}_k + A_p^k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x^s}\frac{\partial x^s}{\partial y^q} =$$

$$= \frac{\partial A_p^k}{\partial y^q}\vec{u}_k + A_p^k A_q^s \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial x^s} = \frac{\partial A_p^k}{\partial y^q}\vec{u}_k + A_p^k A_q^s \Gamma^m_{ks}\vec{u}_m = \frac{\partial A_p^k}{\partial y^q}\vec{u}_k + A_p^k A_q^s \Gamma^m_{ks} B^r_m \vec{e}_r$$

Es decir:

$$\Gamma'^{r}_{pq}\vec{e}_r = \frac{\partial A^k_p}{\partial y^q}\vec{u}_k + A^k_p A^s_q B'^r_m \Gamma^m_{ks}\vec{e}_r$$

que no obedece la indicación del carácter tensorial para una magnitud, salvo que sea nulo el primero de los dos sumandos:

$\frac{\partial A^k_p}{\partial y^q}\vec{u}_k = 0$, ya que entonces sería $\Gamma'^{r}_{pq}\vec{e}_r = A^k_p A^s_q B'^r_m \Gamma^m_{ks}\vec{e}_r \rightarrow \Gamma'^{r}_{pq} = A^k_p A^s_q B'^r_m \Gamma^m_{ks}$, y los símbolos de Christoffel de 2ª especie serían tensores 2-covariantes, 1-contravariantes.

Ahora bien, para que $\frac{\partial A^k_p}{\partial y^q}\vec{u}_k = 0$ ha de ser $\frac{\partial A^k_p}{\partial y^q} = \frac{\partial}{\partial y^q}\left(\frac{\partial x^k}{\partial y^p}\right) = 0 \rightarrow \frac{\partial x^k}{\partial y^p} = const$

Y esto solo es posible si el cambio de coordenadas es lineal. En definitiva, si las relaciones de Jacobi $x^k = x^k(y^j)$ del cambio de base son lineales, entonces los símbolos de Christoffel de 2ª especie tienen carácter tensorial.

Puesto que los símbolos de Christoffel de 1ª especie están relacionados con los símbolos de 2ª especie por

$$(is, j) = G^h_{is} g_{jh}$$

puede afirmarse lo mismo para estos otros símbolos.

08.Diferenciación absoluta

08.1. Derivada covariante de las componentes de un vector:

Dado un sistema de referencia fijo $\left(0,\{\vec{e}_i\}_n\right)$ y un vector cualquiera $\vec{x} = \alpha^i \vec{e}_i$ expresado en tal sistema, podemos obtener desde la base $\{\vec{e}_i\}_n$ dada otra base $\{\vec{u}_k\}_n$ cuyos elementos dependen del vector $\vec{x}$ elegido, y tal que la expresión de $\vec{x}$ en la nueva base sea $\vec{x} = \beta^k \vec{u}_k$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{x} = \alpha^i \vec{e}_i \\ \vec{x} = \beta^k \vec{u}_k\end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l}d\vec{x} = d\alpha^i \vec{e}_i \\ d\vec{x} = d\beta^k \vec{u}_k\end{array}\right\} \rightarrow d\vec{x} = d\alpha^i \vec{e}_i = \frac{\partial \alpha^i}{\partial \beta^k} d\beta^k \vec{e}_i = d\beta^k \vec{u}_k \rightarrow \vec{u}_k = \frac{\partial \alpha^i}{\partial \beta^k}\vec{e}_i$$

y la base resultante, en función del vector $\vec{x}$, es

$$\{\vec{u}_k\}_n = \left\{\frac{\partial \alpha^i}{\partial \beta^k}\vec{e}_i\right\}_n$$

siendo $J = \left(\frac{\P a^i}{\P b^k}\right)_n$ la matriz jacobiana del cambio de base

Puesto que, tal como se ha construido la nueva base, sus vectores dependen de las componentes del vector $\vec{x}$, una variación diferencial de tales componentes de $\vec{x}$ implicaría una variación diferencial de los vectores de la base obtenida. Esta relación entre el vector de referencia $\vec{x}$ y la base $\{\vec{u}_k\}_n$ define lo que denominaremos sistema de referencia natural. Se trata del par $\left(\vec{x},\{\vec{u}_k\}_n\right)$.

$$\vec{x} + d\vec{x} \rightarrow \left\{ \vec{u}_k + d\vec{u}_k \right\}_n$$

Si es $\vec{x} = \beta^k \vec{u}_k$, pretendemos contestar a la pregunta de cómo encontrar las componentes contravariantes y covariantes del vector diferencial $d\vec{x}$ en la base dada $\left\{ \vec{u}_k \right\}$. Es decir:

Se trata de encontrar la expresión $d\vec{x} = D\beta^k \vec{u}_k$ teniendo en cuenta la variación de los vectores $\vec{u}_k$ de la base. A las componentes $D\beta^k$ las denominaremos *diferenciales covariantes absolutas de las componentes contravariantes* del vector.

Y también se trata de encontrar la expresión $(d\vec{x}, \vec{u}_k) = D\beta_k$, teniendo también en cuenta la variación de los vectores de la base. A las componentes $D\beta_k$ las denominaremos diferenciales covariantes absolutas de las componentes covariantes del vector.

- Diferenciación covariante absoluta de las componentes contravariantes:
Veamos la expresión de la variación diferencial del vector $\vec{x}$ en la base $\left\{ \vec{u}_k \right\}_n$ del sistema natural de referencia, que representaremos por $D\beta^s \vec{u}_s$:

$$d\vec{x} = d(\beta^k \vec{u}_k) = d\beta^k \vec{u}_k + \beta^k d\vec{u}_k = d\beta^k \vec{u}_k + \beta^k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial \alpha^i} d\alpha^i = d\beta^k \vec{u}_k + \beta^k \Gamma^s_{ki} d\alpha^i \vec{u}_s \equiv$$

$$\equiv d\beta^s \vec{u}_s + \beta^k \Gamma^s_{ki} d\alpha^i \vec{u}_s = \left(d\beta^s + \beta^k \Gamma^s_{ki} d\alpha^i \right) d\vec{u}_s = D\beta^s \vec{u}_s$$

Las diferenciales $D\beta^s$ de las componentes contravariantes del vector $\vec{x}$ en la base $\left\{ \vec{u}_k \right\}_n$ se denominan *diferenciales covariantes absolutas* de las componentes contravariantes del vector, que en realidad se trata de las diferenciales covariantes absolutas de un tensor 1-contravariante:

$$\boxed{D\beta^s = \left(d\beta^s + \beta^k \Gamma^s_{ki} d\alpha^i \right)}$$

Donde aparecen, como es obvio, los símbolos de Christöffel de 2ª especie.

Asimismo, la derivada covariante absoluta de las componentes contravariantes respecto al sistema de referencia fijo:

$$D\beta^s = d\beta^s + \beta^k \Gamma^s_{ki} d\alpha^i = \frac{\partial \beta^s}{\partial \alpha^i} d\alpha^i + \beta^k \Gamma^s_{ki} d\alpha^i \rightarrow \frac{D\beta^s}{d\alpha^i} = \frac{\partial \beta^s}{\partial \alpha^i} + \beta^k \Gamma^s_{ki}$$

$$\boxed{\frac{D\beta^s}{d\alpha^i} = \frac{\partial \beta^s}{\partial \alpha^i} + \beta^k \Gamma^s_{ki}}$$

- Diferenciación covariante absoluta de las componentes covariantes:
En cuanto a la diferencial covariante absoluta de las componentes covariantes del vector $\vec{x}$, que también puede considerarse la diferencial covariante absoluta de un tensor 1-covariante, tenemos:

$$\beta_k = (\vec{x},\vec{u}_k) \rightarrow d\beta_k = d(\vec{x},\vec{u}_k) = (d\vec{x},\vec{u}_k) + (\vec{x},d\vec{u}_k) \rightarrow (d\vec{x},\vec{u}_k) = d\beta_k - (\vec{x},d\vec{u}_k) =$$

$$= d\beta_k - (\vec{x},\frac{\partial \vec{u}_k}{\partial \alpha^i} d\alpha^i) = d\beta_k - (\vec{x},\Gamma^s_{ki} d\alpha^i \vec{u}_s) = d\beta_k - \Gamma^s_{ki} d\alpha^i (\vec{x},\vec{u}_s) = d\beta_k - \beta_s \Gamma^s_{ki} d\alpha^i$$

o sea: $D\beta_k = (d\vec{x},\vec{u}_k) = d\beta_k - \beta_s \Gamma^s_{ki} d\alpha^i$, que se denomina diferencial covariante absoluta de las componentes covariantes de $\vec{x}$:

$$\boxed{D\beta_k = d\beta_k - \beta_s \Gamma^s_{ki} d\alpha^i}$$

Y la derivada covariante absoluta de las componentes covariantes respecto al sistema de referencia fijo es:

$$D\beta_k = d\beta_k - \beta_s \Gamma^s_{ki} d\alpha^i = \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha^i} d\alpha^i - \beta_s \Gamma^s_{ki} d\alpha^i \rightarrow \frac{D\beta_k}{d\alpha^i} = \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha^i} - \beta_s \Gamma^s_{ki}$$

$$\boxed{\frac{D\beta_k}{d\alpha^i} = \frac{\partial \beta_k}{\partial \alpha^i} - \beta_s \Gamma^s_{ki}}$$

08.2. Derivada covariante absoluta de las componentes de un tensor:

Para hallar de forma general la diferencial y derivada absoluta de las componentes de un tensor de cualquier orden podemos emplear el llamado procedimiento del campo uniforme, que consiste en derivar un producto del tensor por tantas funciones 1-contravariantes como orden de contravarianza tenga el tensor y tantas funciones 1-covariantes como orden de covarianza tenga el tensor, suponiendo elegidas estas funciones de forma que la correspondiente diferencial absoluta covariante de cada una sea nula. Usando las expresiones halladas en el párrafo anterior hacemos una identificación que nos permitirá obtener la correspondiente diferencial absoluta del tensor.

Vamos a usar el procedimiento en primer lugar para obtener la diferencial y derivada absoluta de un tensor 1-contravariante y también de un tensor 1-covariante, con lo que podemos comprobar que se obtiene el mismo resultado que hemos obtenido para el caso de las componentes contravariantes y covariantes de un vector.

- Diferencial y derivada covariante de un tensor de primer orden 1-covariante, usando el procedimiento del campo uniforme.

  Tensor: T_k

  Campos uniformes: $u^k = u^k(x^j),\ k = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,n$

  Función auxiliar: $f = u^k T_k$

  $Du^k = du^k + u^s \Gamma^k_{sj} dx^j = 0 \rightarrow du^k = -u^s \Gamma^k_{sj} dx^j$

  $df = d(u^k T_k) = du^k T_k + u^k dT_k = \left(-u^s \Gamma^k_{sj} dx^j\right) T_k + u^k dT_k =$

  $= u^k dT_k - u^s T_k \Gamma^k_{sj} dx^j$

  $d\left(u^k T_k\right) = Du^k T_k + u^k DT_k = u^k DT_k$, pues $Du^k = 0$.

  Identificamos:

$$u^k D\mathrm{T}_k = u^k d\mathrm{T}_k - u^s \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k dx^j \rightarrow u^s D\mathrm{T}_s = u^s d\mathrm{T}_s - u^s \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k dx^j \rightarrow$$

$$\rightarrow D\mathrm{T}_s = d\mathrm{T}_s - \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k dx^j$$

Derivada:

$$\frac{D\mathrm{T}_s}{dx^j} = \frac{\partial \mathrm{T}_s}{\partial x^j} - \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k$$

Diferencial covariante absoluta:

$$D\mathrm{T}_s = d\mathrm{T}_s - \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k dx^j$$

Derivada covariante absoluta:

$$\frac{D\mathrm{T}_s}{dx^j} = \frac{\partial \mathrm{T}_s}{\partial x^j} - \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k \quad o\ bien \quad D_j T_s = \partial_j T_s - \mathrm{T}_k \Gamma_{sj}^k \qquad [08.2\_1]$$

- Diferencial y derivada covariante de un tensor de primer orden 1-contravariante, usando el procedimiento del campo uniforme.

Tensor: T^k

Campos uniformes: $u_k = u_k(x^j),\ k = 1,...,n;\ j = 1,...,n$

Función auxiliar: $f = u_k \mathrm{T}^k$

$$Du_k = du_k - u_s \Gamma_{sj}^s dx^j = 0 \rightarrow du_k = u_s \Gamma_{kj}^s dx^j$$

$$d f = d(u_k \mathrm{T}^k) = du_k \mathrm{T}^k + u_k d\mathrm{T}^k = \left(u_s \Gamma_{kj}^s dx^j\right) \mathrm{T}^k + u_k d\mathrm{T}^k =$$

$$= u_k d\mathrm{T}^k + u_s \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s dx^j$$

$$d\left(u_k \mathrm{T}^k\right) = Du_k \mathrm{T}^k + u_k D\mathrm{T}^k = u_k D\mathrm{T}^k \text{, pues } Du_k = 0$$

Identificamos:

$$u_k D\mathrm{T}^k = u_k d\mathrm{T}^k + u_s \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s dx^j \rightarrow u_s D\mathrm{T}^s = u_s d\mathrm{T}^s + u_s \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s dx^j \rightarrow$$

$$\rightarrow D\mathrm{T}^s = d\mathrm{T}^s + \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s dx^j$$

Diferencial covariante absoluta:

$$D\mathrm{T}^s = d\mathrm{T}^s + \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s dx^j$$

Derivada covariante absoluta:

$$\frac{D\mathrm{T}^s}{dx^j} = \frac{\partial T^s}{\partial x^j} + \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s \quad o\ bien \quad D_j T^s = \partial_j T^s + \mathrm{T}^k \Gamma_{kj}^s \qquad [08.2\_2]$$

- Diferencial y derivada covariante de un tensor de segundo orden 2-covariante, usando el procedimiento del campo uniforme.

$$f = u^i v^j t_{ij} \qquad\qquad d f = u^i v^j Dt_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&Du^i = du^i + u^r \Gamma^i_{rk} dx^k = 0 \rightarrow du^i = -u^r \Gamma^i_{rk} dx^k \\
&Dv^j = dv^j + v^r \Gamma^j_{rk} dx^k = 0 \rightarrow dv^j = -v^r \Gamma^j_{rk} dx^k \\
&d\,f = d\left(u^i v^j t_{ij}\right) = u^i v^j dt_{ij} + du^i v^j t_{ij} + u^i dv^j t_{ij} = u^i v^j dt_{ij} + \\
&\quad + \left(-u^r \Gamma^i_{rk} dx^k\right) v^j t_{ij} + u^i \left(-v^r \Gamma^j_{rk} dx^k\right) t_{ij} = u^i v^j dt_{ij} - u^r v^j t_{ij} \Gamma^i_{rk} dx^k - \\
&\quad - u^i v^r t_{ij} \Gamma^j_{rk} dx^k = u^p v^q dt_{pq} - u^p v^q t_{iq} \Gamma^i_{pk} dx^k - u^p v^q t_{pj} \Gamma^j_{qk} dx^k
\end{aligned}
$$

identificando:

$$u^p v^q Dt_{pq} = u^p v^q (dt_{pq} - t_{iq} \Gamma^i_{pk} dx^k - t_{pj} \Gamma^j_{qk} dx^k)$$

de donde obtenemos la diferencial:

$$Dt_{pq} = dt_{pq} - t_{iq} \Gamma^i_{pk} dx^k - t_{pj} \Gamma^j_{qk} dx^k$$

y la derivada:

$$\frac{Dt_{pq}}{dx^k} = \frac{\partial t_{pq}}{\partial x^k} - t_{iq} \Gamma^i_{pk} - t_{pj} \Gamma^j_{qk}$$

Diferencial covariante absoluta:

$$Dt_{pq} = dt_{pq} - t_{iq} \Gamma^i_{pk} dx^k - t_{pj} \Gamma^j_{qk} dx^k$$

Derivada covariante absoluta:

$$\frac{Dt_{pq}}{dx^k} = \frac{\partial t_{pq}}{\partial x^k} - t_{iq} \Gamma^i_{pk} - t_{pj} \Gamma^j_{qk} \quad o\ bien \quad D_k t_{pq} = \partial_k t_{pq} - t_{iq} \Gamma^i_{pk} - t_{pj} \Gamma^j_{qk} \qquad [08.2\_3]$$

- Diferencial y derivada de un tensor de segundo orden 2-contravariante, usando el procedimiento del campo uniforme.

$$f = u_i v_j t^{ij} \qquad d\,f = u_i v_j Dt^{ij}$$

$$
\begin{aligned}
&Du_i = du_i - u_r \Gamma^r_{ik} dx^k = 0 \rightarrow du_i = u_r \Gamma^r_{ik} dx^k \\
&Dv_j = dv_j - v_r \Gamma^r_{ik} dx^k = 0 \rightarrow dv_j = v_r \Gamma^r_{jk} dx^k
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&d\,f = d\left(u_i v_j t^{ij}\right) = u_i v_j dt^{ij} + du_i v_j t^{ij} + u_i dv_j t^{ij} = u_i v_j dt^{ij} + \\
&+\left(u_r \Gamma^r_{ik} dx^k\right) v_j t^{ij} + u_i \left(v_r \Gamma^r_{jk} dx^k\right) t^{ij} = u_i v_j dt^{ij} + u_r v_j t^{ij} \Gamma^r_{ik} dx^k + \\
&+ u_i v_r t^{ij} \Gamma^r_{jk} dx^k = u_p v_q dt^{pq} + u_p v_q t^{iq} \Gamma^p_{ik} dx^k + u_p v_q t^{pj} \Gamma^q_{jk} dx^k
\end{aligned}
$$

identificando:

$$u_p v_q Dt^{pq} = u_p v_q (dt^{pq} + t^{iq} \Gamma^p_{ik} dx^k + t^{pj} \Gamma^q_{jk} dx^k)$$

de donde obtenemos la diferencial:

$$Dt^{pq} = dt^{pq} + t^{iq}\Gamma^p_{ik}dx^k + t^{pj}\Gamma^q_{jk}dx^k$$

y la derivada:

$$\frac{Dt^{pq}}{dx^k} = \frac{\partial t^{pq}}{\partial x^k} + t^{iq}\Gamma^p_{ik} + t^{pj}\Gamma^q_{jk}$$

Diferencial covariante absoluta:

$$Dt^{pq} = dt^{pq} + t^{iq}\Gamma^p_{ik}dx^k + t^{pj}\Gamma^q_{jk}dx^k$$

Derivada covariante absoluta:

$$\frac{Dt^{pq}}{dx^k} = \frac{\partial t^{pq}}{\partial x^k} + t^{iq}\Gamma^p_{ik} + t^{pj}\Gamma^q_{jk} \text{ o bien } D_k t^{pq} = \partial_k t^{pq} + t^{iq}\Gamma^p_{ik} + t^{pj}\Gamma^q_{jk} \qquad [08.2\_4]$$

- Diferencial y derivada de un tensor de segundo orden mixto, 1-covariante, 1-contravariante, usando el procedimiento del campo uniforme.

$$f = u_i v^j t^i_j \qquad d\,f = u_i v^j Dt^i_j$$

$$Du_i = du_i - u_r\Gamma^r_{ik}dx^k = 0 \rightarrow du_i = u_r\Gamma^r_{ik}dx^k$$

$$Dv^j = dv^j + v^r\Gamma^j_{rk}dx^k = 0 \rightarrow dv^j = -v^r\Gamma^j_{rk}dx^k$$

$$d\,f = d\left(u_i v^j t^i_j\right) = u_i v^j dt^i_j + du_i v^j t^i_j + u_i dv^j t^i_j = u_i v^j dt^i_j +$$

$$+\left(u_r\Gamma^r_{ik}dx^k\right)v^j t^i_j + u_i\left(-v^r\Gamma^j_{rk}dx^k\right)t^i_j = u_i v^j dt^i_j + u_r v^j t^i_j \Gamma^r_{ik}dx^k -$$

$$-u_i v^r t^i_j \Gamma^j_{rk}dx^k = u_p v^q dt^p_q + u_p v^q t^i_q \Gamma^r_{ik}dx^k - u_p v^q t^p_j \Gamma^j_{qk}dx^k$$

identificando:

$$u_p v^q Dt^p_q = u_p v^q (dt^p_q + t^i_q\Gamma^r_{ik}dx^k - t^p_j\Gamma^j_{qk}dx^k)$$

de donde obtenemos la diferencial:

$$Dt^p_q = dt^p_q + t^i_q\Gamma^r_{ik}dx^k - t^p_j\Gamma^j_{qk}dx^k$$

y la derivada:

$$\frac{Dt^p_q}{dx^k} = \frac{\partial t^q_p}{\partial x^k} + t^i_q\Gamma^r_{ik} - t^p_j\Gamma^j_{qk}$$

Diferencial covariante absoluta:

$$Dt^p_q = dt^p_q + t^i_q\Gamma^r_{ik}dx^k - t^p_j\Gamma^j_{qk}dx^k$$

Derivada covariante absoluta:

$$\frac{Dt^p_q}{dx^k} = \frac{\partial t^q_p}{\partial x^k} + t^i_q\Gamma^r_{ik} - t^p_j\Gamma^j_{qk} \text{ o bien } D_k t^p_q = \partial_k t^p_q + t^i_q\Gamma^r_{ik} - t^p_j\Gamma^j_{qk} \qquad [08.2\_5]$$

8.3. El Teorema de Ricci:

La derivada absoluta covariante del tensor de Gramm es nula.

$$\frac{Dg_{ij}}{dx^k}=0$$

Demostración:

Aplicamos la regla de derivación covariante absoluta de un tensor de segundo orden covariante:

$$\frac{Dt_{pq}}{dx^k}=\frac{\partial t_{pq}}{\partial x^k}-t_{iq}\Gamma^i_{pk}-t_{pj}\Gamma^j_{qk}$$

en el caso del tensor de Gramm: $\dfrac{Dg_{ij}}{dx^k}=\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-g_{sj}\Gamma^s_{ik}-g_{is}\Gamma^s_{jk}$

Si tenemos en cuenta la definición de los símbolos de Christöffel de primer órden:

$$g_{si}\Gamma^s_{jk}=(jk,i) \qquad g_{sj}\Gamma^s_{ik}=(ik,j)$$

quedará:

$$\frac{Dg_{ij}}{dx^k}=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}-(ik,j)-(jk,i)$$

y por la identidad de Ricci [6.1]:

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}=(ik,j)+(jk,i)$$

por tanto, al sustituir:

$$\frac{Dg_{ij}}{dx^k}=(ik,j)+(jk,i)-(ik,j)-(jk,i)=0$$

8.4. El símbolo de Christöffel de 2ª especie reducido:

El Símbolo de 2ª especie de Christöffel reducido, esto es con el índice superior coincidiendo con uno de los índices inferiores, se puede expresar en función del determinante de la matriz métrica de Gramm mediante la siguiente relación:

$$\Gamma^i_{ki}=\partial_k L\sqrt{g}$$

(L es el logaritmo neperiano)

En efecto:

Veámoslo en detalle para el caso de un espacio de dos dimensiones:

$$g=\left|g_{ij}\right|=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}$$

Se tiene, llamando G_{ij} al adjunto del elemento g_{ij} :

$$\partial_k g=\partial_k(g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21})=g_{11}\partial_k g_{22}+g_{22}\partial_k g_{11}-g_{12}\partial_k g_{21}-g_{21}\partial_k g_{12}$$

y siendo $G_{11}=g_{22}, G_{12}=-g_{21}, G_{21}=-g_{12}, G_{22}=g_{11}$ será:

$$\partial_k g = G_{22}\partial_k g_{22} + G_{11}\partial_k g_{11} + G_{12}\partial_k g_{21} + G_{12}\partial_k g_{12} = G_{ij}\partial_k g_{ij} = g.g^{ij}\partial_k g_{ij}$$

y, teniendo en cuenta la identidad de Ricci (6.1]: $\partial_k g_{ij} = \Gamma^h_{ik} g_{jh} - \Gamma^m_{jk} g_{im}$:

$\partial_k g = g.g^{ij}\partial_k g_{ij} = g.g^{ij}\left(\Gamma^h_{ik} g_{jh} - \Gamma^m_{jk} g_{im}\right)$, y haciendo *h=i, m=j*:

$$\partial_k g = g.g^{ij}\left(\Gamma^i_{ik} g_{ji} - \Gamma^j_{jk} g_{ij}\right) = g.g^{ij} g_{ij} 2.\Gamma^i_{ik} = 2g\Gamma^i_{ik} \to$$

$$\to \Gamma^i_{ik} = \frac{1}{2g}\partial_k g = \partial_k L\sqrt{g}$$

Para espacios euclidianos de mayor número de dimensiones la expresión se generaliza sin dificultad.

8.5. La derivada covariante absoluta de 2º orden de un tensor:

Definición de derivada covariante absoluta de 2º orden:

Se define como la derivada covariante absoluta de la derivada covariante absoluta del tensor:

$$D_{jk} t^{h_1 \ldots h_p}_{m_1 \ldots m_q} = D_j\left(D_k t^{h_1 \ldots h_p}_{m_1 \ldots m_q}\right)$$

Ejemplo:

Derivación covariante absoluta de 2º orden de un tensor 1-contravariante:

De [08.2_2]:

$$D_k v^s = \partial_k v^s + v^h \Gamma^s_{hk}$$

y llamando $t^s_k = D_k v^s = \partial_k v^s + v^h \Gamma^s_{hk}$ será: $D_{jk} v^s = D_j\left(D_k v^s\right) = D_j t^s_k$

De [08.2_5]:

$$D_j t^s_k = \partial_j t^s_k + t^m_k \Gamma^k_{mj} - t^s_m \Gamma^m_{kj}$$

por tanto:

$$D_{jk} v^s = D_j t^s_k = \partial_j\left(\partial_k v^s + v^h \Gamma^s_{hk}\right) + \left(\partial_k v^m + v^h \Gamma^m_{hk}\right)\Gamma^k_{mj} - \left(\partial_m v^s + v^r \Gamma^s_{rm}\right)\Gamma^m_{kj} =$$

$$= \partial_{jk} v^s + \partial_j v^h \Gamma^s_{hk} + v^h \partial_j \Gamma^s_{hk} + \partial_k v^m \Gamma^k_{mj} + v^h \Gamma^m_{hk}\Gamma^k_{mj} - \partial_m v^s \Gamma^m_{kj} - v^r \Gamma^s_{rm}\Gamma^m_{kj} =$$

$$= \left[\partial_j \Gamma^s_{hk} + \Gamma^m_{hk}\Gamma^k_{mj}\right] v^h + \varphi_{jk}$$

donde es $\varphi_{jk} = \partial_{jk} v^s + \partial_j v^h \Gamma^s_{hk} + \partial_k v^m \Gamma^k_{mj} - \partial_m v^s \Gamma^m_{kj} - v^r \Gamma^s_{rm}\Gamma^m_{kj}$, que conmuta en el orden de derivación, es decir, $\varphi_{jk} = \varphi_{kj}$.

8.6. Curvatura en un punto. El teorema de Riemann-Christöffel:

Definición de curvatura en un punto:

La curvatura C(p) en el punto $p \in E$ se define como la diferencia entre las derivadas covariantes absolutas de segundo orden de las coordenadas contravariantes del punto:

$$C(p) = D_{kj}v^s(p) - D_{jk}v^s(p)$$

El teorema de Riemann-Christöffel:
La curvatura C(p) del espacio euclidiano E en el punto $p \in E$ de coordenadas contravariantes $v^s = v^s(p), s = 1,\dots,n$ viene dada por la expresión

$$C(p) = R^r_{s,jk}v^s$$

donde el tensor de cuatro índices $R^r_{s,jk}$ es $R^r_{s,jk} = \partial_j \Gamma^s_{hk} - \partial_k \Gamma^s_{hj} + \Gamma^m_{hk}\Gamma^k_{mj} - \Gamma^m_{hj}\Gamma^j_{mk}$, que se denomina Tensor de Riemann-Christöffel o Tensor de Curvatura del espacio.
Demostración:
De la definición de curvatura en $p \in E$ se tiene:

$$C(p) = D_{kj}v^s - D_{jk}v^s = D_j t^s_k - D_k t^s_j = \left[\partial_j \Gamma^s_{hk} + \Gamma^m_{hk}\Gamma^k_{mj}\right]v^h + \varphi_{jk} - \left[\partial_k \Gamma^s_{hj} + \Gamma^m_{hj}\Gamma^j_{mk}\right]v^h - \varphi_{kj} =$$

$$= \left[\partial_j \Gamma^s_{hk} + \Gamma^m_{hk}\Gamma^k_{mj}\right]v^h - \left[\partial_k \Gamma^s_{hj} + \Gamma^m_{hj}\Gamma^j_{mk}\right]v^h = \left[\partial_j \Gamma^s_{hk} - \partial_k \Gamma^s_{hj} + \Gamma^m_{hk}\Gamma^k_{mj} - \Gamma^m_{hj}\Gamma^j_{mk}\right]v^h = R^r_{s,jk}v^h$$

Bibliografía:

1. Lichnerowicz, A.: Elementos de cálculo tensorial, Aguilar (1972). A pesar de su relativa antigüedad sigue considerándose como la base imprescindible del cálculo tensorial. Lo cierto es que el cálculo tensorial no ha variado mucho, a nivel docente, desde el pasado siglo.
2. Levi-Civita, T.: Der absolute Diferentialkak¸l, Springer (1928). Libro histórico para los adeptos e iniciados.
3. Cartan, E.: Lesons sur la géometrie des espaces de Riemann, Gauthier Villars (1946). Es otro libro histórico, bastante claro e interesante.
4. Lawden, D.F.: An introduction to tensor calculus, relativity and cosmology, Wiley (1986). Aunque más moderno que los anteriores está enfocado a la relatividad general.
5. Anderson, J. L.: Principles of relativity physics, Academic Press (1967). Al igual que el anterior, se centra en la relatividad general.
6. González de Posada, F.: Problemas de análisis tensorial, Copygraph (1972. Contiene una rica colección de problemas con sus soluciones.