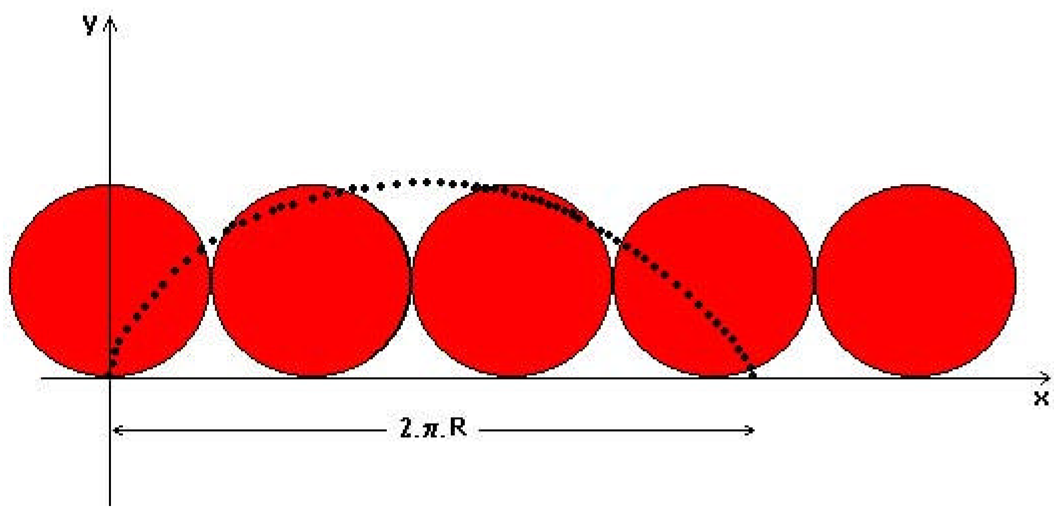
LA CICLOIDE
UNA CURVA DE MUCHO EMPAQUE

0. Una breve introducción:

La Cicloide puede ser definida como la curva plana que es descrita físicamente por la trayectoria de un punto de una circunferencia que, sin deslizarse, rueda sobre una recta horizontal.

Es inmediato que si pensamos en el punto de contacto de la circunferencia con la recta en el instante inicial del comienzo del rodamiento, este punto describe un arco hasta volver a tocar de nuevo la recta horizontal sobre la cual se produce la rodadura de la circunferencia. Este arco, pues, estará encerrando un área plana sobre dicha recta horizontal en el intervalo [0, 2pR].



Aun cuando parece ser que fue Galileo Galilei (1564-1642) el primero en estudiar esta curiosa curva, sin embargo, la historia de la Cicloide como objeto del quehacer fisicomatemático en Europa arranca desde 1637, unos pocos años antes de la muerte de este gran científico.

Marín Mersenne (1588-1648), el monje amigo de Descartes, publicó en 1637, en su "Armonía Universal", el trabajo de Gilles P. Roberval (Senlis, 1602-

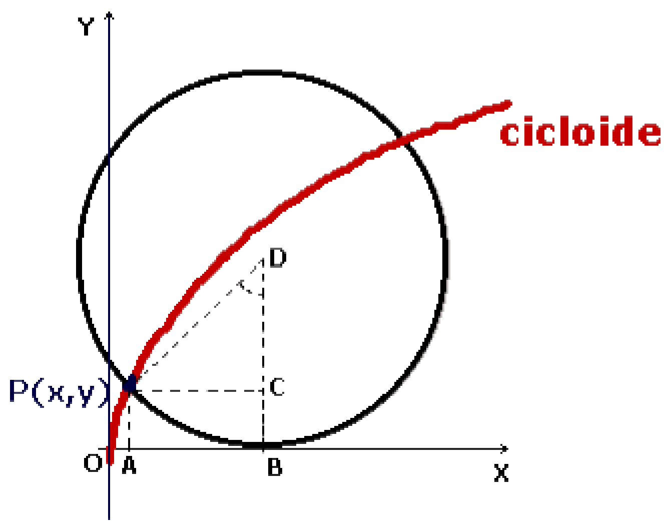
París, 1675), en el que se había logrado, entre otras cosas, el cálculo exacto del área barrida sobre la recta horizontal por un arco de Cicloide.

René Descartes obtuvo, de una forma efectiva y elegante, la recta tangente en un punto del arco de cicloide con una técnica que ha sido seguida después por el desarrollo de la geometría diferencial.

Ya en 1658 fue cuando Blas Pascal (1632-1662), en un famoso desafío a los científicos europeos de la época, proponía determinar la longitud de un arco de la Cicloide y también su centro de gravedad, así como la superficie del volumen de revolución que engendra el área plana que barre el arco de cicloide al girar ya sea entorno al eje x, o entorno al eje y, o bien, entorno al eje de simetría del arco de Cicloide.

Fueron, en definitiva, muchos los esfuerzos realizados en el siglo XVII para tratar de comprender esta curva y sus propiedades, tanto geométricas como físicas, que han permitido desarrollar, después, un gran número de aplicaciones.

1. Ecuaciones paramétricas:



Para obtener las ecuaciones paramétricas de la Cicloide bastará tener en cuenta en la figura que, puesto que la circunferencia no se desliza, sino que rueda, el arco PB y la distancia rectilínea OB coinciden: OB = arco(PB).

Así, pues, para un punto genérico cualquiera P(x,y) de la Cicloide, se tiene, llamando R al radio de la circunferencia y α al ángulo en el centro:

$$x = OA = OB - AB = arco(PB) - PD.sen\alpha = R.\alpha - R.sen\alpha = R.(\alpha - sen\alpha)$$
$$y = PA = DB - DC = DB - PD.\cos\alpha = R - R.\cos\alpha = R.(1 - \cos\alpha)$$

En definitiva, las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{cases} x = R.(\alpha - sen\alpha) \\ y = R.(1 - \cos\alpha) \end{cases}$$

2. La tangente y la normal en un punto:

La recta tangente a una curva plana cualquiera y = f(x), en el punto P(x_0, y_0) es de la forma

$$y - y_0 = \frac{dy}{dx}(x - x_0)$$

Y la ecuación de la normal en dicho punto:

$$y - y_0 = -\frac{1}{dy/dx}(x - x_0)$$

En el caso de la Cicloide, se tiene:

$$\frac{dx}{d\alpha} = R(1 - \cos\alpha), \quad \frac{dy}{d\alpha} = R.sen\alpha \ \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{sen\ \alpha}{(1 - \cos\ \alpha)}$$

En definitiva, al sustituir:

Tangente a la Cicloide en P(x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{1 - \cos\alpha}{sen\alpha}.(x - x_0) \rightarrow y - R.(1 - \cos\alpha) = \frac{sen\ \alpha}{(1 - \cos\ \alpha)}.(x - R.(\alpha - sen\alpha))$$

quitando denominadores y simplificando:

$$\boxed{sen\ \alpha.x + (\cos\ \alpha - 1).y + .R.(2 - \alpha.sen\alpha - 2.\cos\ \alpha) = 0}$$

Normal a la Cicloide en P(x_0, y_0):

$$y - y_0 = \frac{sen\alpha}{\cos\alpha - 1}.(x - x_0) \rightarrow y - R.(1 - \cos\alpha) = \frac{\cos\ \alpha - 1}{sen\ \alpha}.(x - R.(\alpha - sen\alpha))$$

quitando denominadores y simplificando:

$$\boxed{(\cos\ \alpha - 1).x - sen\ \alpha.y + \alpha.R.(1 - \cos\ \alpha) = 0}$$

Estas son, por consiguiente, las ecuaciones del haz de tangentes y del haz de normales a la Cicloide. Hay, evidentemente, una tangente y una normal para cada valor del parámetro α del haz.

3. Longitud de un arco:

La longitud de un arco de curva entre dos puntos, A y B, se puede calcular mediante la integral definida

$$L_{AB} = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_A^B \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}\,.d\alpha$$

Por tanto, en el caso de la Cicloide, el arco entre los puntos (0,0) y (2πR,0) es:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2.(1-\cos\alpha)^2 + R^2.sen^2\alpha}\,.d\alpha = \int_0^{2\pi} \sqrt{2R^2(1-\cos\alpha)}\,.d\alpha = R\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos\alpha}\,.d\alpha$$

y, de la fórmula del ángulo mitad:

$$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

por tanto:

$$L = R.\sqrt{2}\sqrt{2}\int_0^{2\pi} sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha = 2.R.\left(-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\Big|_0^{2\pi} = 2.R.\left(-2.\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + 2.\cos\left(\frac{0}{2}\right)\right) =$$

$$= 2.R.(-2.(-1) + 2.1) = 2.R.(2+2) = 8.R$$

En definitiva, la longitud de un arco de Cicloide resulta ser 8 veces la longitud del radio del círculo generador.

4. El área que barre un arco:

El área barrida por un arco y = f(x) en el intervalo real (0, 2π) viene dado por la integral definida:

$$A = \int_0^{2\pi R} y.dx = \int_0^{2\pi} R.(1-\cos\alpha).R.(1-\cos\alpha).d\alpha = R^2\int_0^{2\pi}(1-\cos\alpha)^2.d\alpha =$$

$$= R^2.\int_0^{2\pi}\left(1-2.\cos\alpha+\cos^2\alpha\right).d\alpha = R^2(2\pi-2.0+\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos\alpha}{2}.d\alpha) = R^2\left(2\pi-2.0+\pi\right) = 3\pi.R^2$$

Es decir, el área barrida por un arco de Cicloide resulta ser tres veces el área del círculo que la genera.

5. Las curiosas propiedades de la Cicloide:

La Cicloide presenta algunas propiedades que no se encuentran en la generalidad de las curvas planas. Vamos a ver con cierto detalle una propiedad geométrica, la propiedad de la evoluta o envolvente del haz las normales, y, muy someramente, dos propiedades físicas que han contribuido grandemente a la fama de esta curva: la tautocronía y la braquistocronía.

5.1. La envolvente de las normales:

La envolvente de un haz de curvas definido por un parámetro α se obtiene eliminando el parámetro entre el sistema de ecuaciones con dos incógnitas formado por la ecuación de la expresión del haz y su derivada con respecto a al parámetro. En realidad, las ecuaciones paramétricas de dicha envolvente son dicho sistema de dos ecuaciones, que podemos explicitar despejando las variables x e y en función del parámetro α.

La envolvente del haz de las normales a una curva se llama "evoluta" de dicha curva. La evoluta de la Cicloide se podría determinar, pues, eliminando el parámetro α entre la ecuación de haz de las normales y su derivada con respecto al parámetro, o bien, explicitando sus ecuaciones paramétricas en función de α

Puesto que la ecuación del haz de normales es de la forma:

$$(\cos\alpha-1).x - sen\,\alpha.y + \alpha.R.(1-\cos\alpha) = 0$$

su derivada con respecto al parámetro:

$$sen\,\alpha.x + \cos\alpha, y + R.(\cos\alpha - \alpha.sen\,\alpha - 1) = 0$$

Si eliminamos la y entre ambas ecuaciones mediante una simple reducción, multiplicando por ejemplo la primera por un coseno y la segunda por un seno, se obtiene, al simplificar:

$$x = \alpha.R + R.sen\,\alpha$$

y, al sustituir esta expresión, se puede despejar la y:

$$y = -R + R.\cos\alpha$$

Se obtiene así, para las ecuaciones paramétricas de la evoluta:

$$\begin{cases} x = & a.R + R.sen\ a \\ y = & -R + R\cos\ a \end{cases}$$

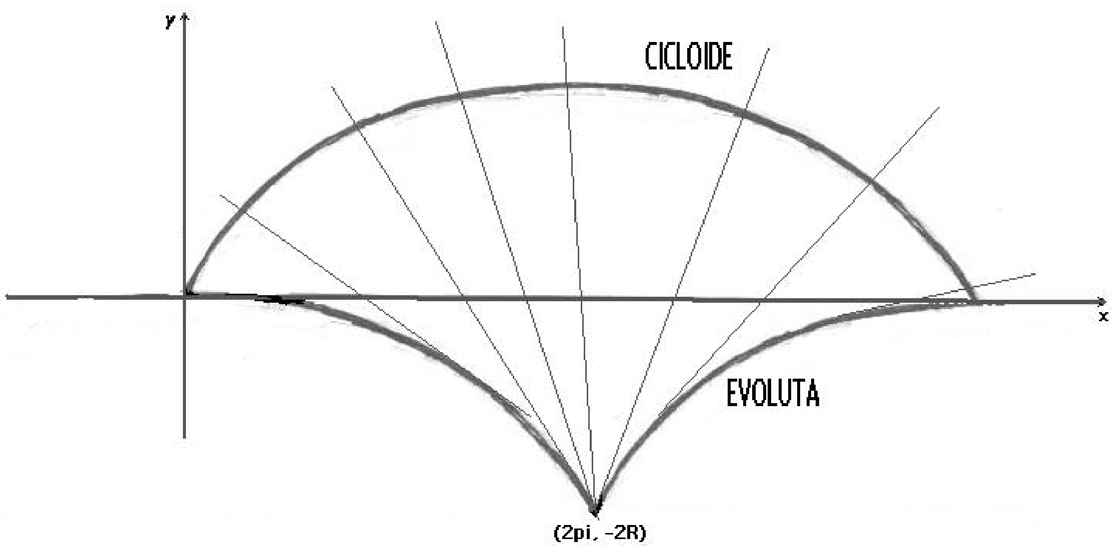
Lo curioso es que esta evoluta es, también, una Cicloide. Las ecuaciones obtenidas corresponden a una Cicloide cuando el origen se encuentra en el punto del plano $(p.R,-2R)$. Efectivamente, si en las ecuaciones paramétricas de la Cicloide, trasladamos el origen a dicho punto, se tiene:

$$\begin{cases} x = & x + pR = R.a - R.sen\,a + p.R = R(a+p) - R.sen\,a = R.(a+p) + R.sen(a+p) \\ y = & y - 2.R = R - R.\cos a - 2.R = -R - R.\cos a = -R + R.\cos(a+p) \end{cases}$$

Y llamando, $a' = a + p$, se tienen las ecuaciones de la evoluta:

$$\begin{cases} x = & a'.R + R.sen\ a' \\ y = & -R + R\cos\ a' \end{cases}$$

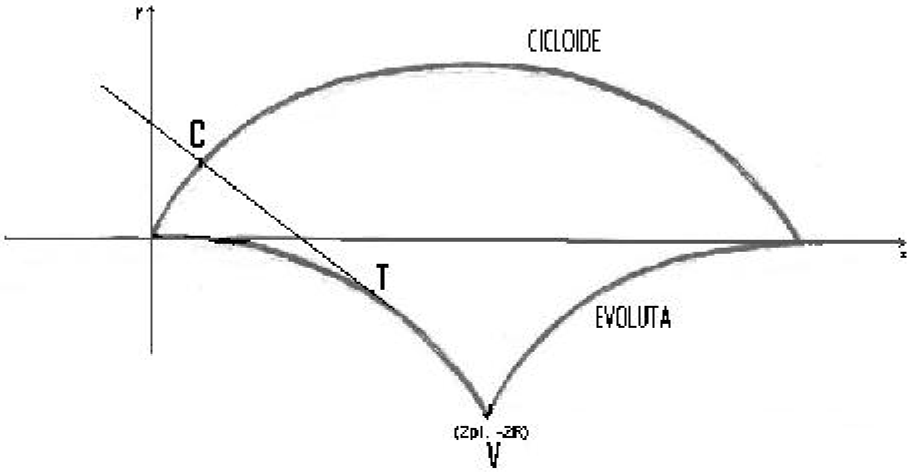
En definitiva, si se representa gráficamente la cicloide y su evoluta se tendría:



Existe un inesperado resultado en lo que respecta a las normales de la Cicloide: es constante, e igual a 4.R, la suma de la longitud del segmento de normal desde la curva hasta el punto de tangencia con la evoluta más el arco de evoluta que va desde dicho punto de tangencia hasta su vértice.

Esto es, en la figura siguiente se verifica la relación

$$CT + arco(TV) = 4.R$$



Veamos el cálculo:

a) **Cálculo de CT:**

$$C(R.\alpha - R.sen\alpha,\ R - R.\cos\alpha), \qquad T(R.\alpha + R.sen\alpha,\ -R + R.\cos\alpha)$$

$$CT = \sqrt{(x_C - x_T)^2 + (y_C - y_T)^2} = \sqrt{(2.R.sen\alpha)^2 + (2.R - 2.R.\cos\alpha)^2} = \sqrt{8.R^2.(1-\cos\alpha)} =$$
$$= \sqrt{16.R^2}.\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = 4.R.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

b) **Cálculo de arco(TV):**

$$\begin{cases} x = & R.\alpha + R.sen\alpha \\ y = & -R + R.\cos\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dx}{d\alpha} = & R + R.\cos\alpha \\ \dfrac{dy}{d\alpha} = & -R.sen\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{dx}{d\alpha}\right)^2 = & R^2 + 2.R^2.\cos\alpha + R^2.\cos^2\alpha \\ \left(\dfrac{dy}{d\alpha}\right)^2 = & R^2.sen^2\alpha \end{cases}$$

Por tanto, es $\left(\dfrac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{d\alpha}\right) = 2.R^2 + 2.R^2.\cos\alpha = 2.R^2(1+\cos\alpha)$

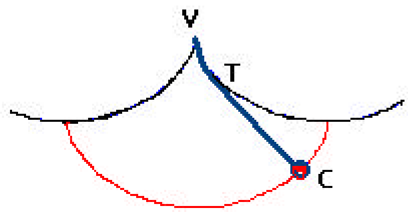
Entonces:

$$arco(TV) = \int_\alpha^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}.d\alpha = \int_\alpha^\pi \sqrt{2.R^2.(1+\cos\alpha)}.d\alpha =$$
$$= \int_\alpha^\pi \sqrt{4.R^2.\frac{(1+\cos\alpha)}{2}}.d\alpha = 2.R\int_\alpha^\pi \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha = 4.R.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Bigg|_\alpha^\pi = 4.R(sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)) =$$
$$= 4.R - 4.R.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

c) Suma total:

$$CT + arco(TV) = 4.R.sen\left(\frac{a}{2}\right) + 4.R - 4.R.sen\left(\frac{a}{2}\right) = 4.R$$

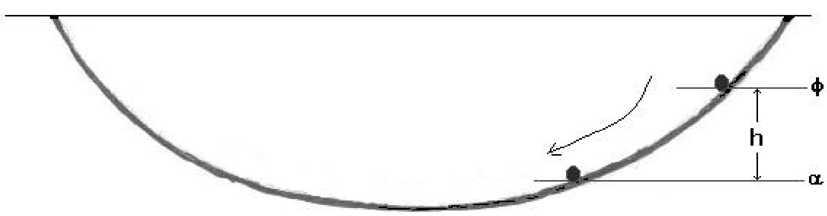
Esto quiere decir que la longitud anterior es siempre constante, esto es, que si pensamos físicamente en un cordel, de longitud 4.R, que esté sujeto al punto V de la figura y que se desplaza a modo de péndulo, apoyándose tangencialmente en los arcos de la evoluta, el extremo del cordel describe, siempre, una Cicloide.



5.2. La propiedad de ser tautócrona:

En el año 1673, Christian Huygens (La Haya, 1629-1695), matemático, físico y astrónomo, estudioso durante toda su vida de diferentes curvas, descubrió un hecho que le pareció extraordinario en la Cicloide: si un punto se desplaza a lo largo de la curva invertida, en caída libre, llegará al punto mínimo de la Cicloide en un tiempo que no depende del punto desde donde comenzó a caer.

El cálculo de ese tiempo t no es complicado.



Ecuaciones paramétricas: $x = R.(a - sen\,a), \quad y = R.(\cos a - 1)$

La velocidad del desplazamiento del punto es la variación de arco de Cicloide con respecto al tiempo:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Y también se puede expresar, por ser el movimiento en caída libre:

$$v = \sqrt{2gh}$$

Por tanto, el tiempo se puede despejar resolviendo una integral:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}} \rightarrow t = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{2gh}}$$

Calculemos, por consiguiente, *ds* y *h*, a fin de resolver la integral:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2}.d\alpha = \sqrt{2.R^2(1-\cos\alpha)}.d\alpha = \sqrt{4.R^2\frac{1-\cos\alpha}{2}}.d\alpha =$$

$$= \sqrt{4.R^2.sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.d\alpha = 2.R.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha$$

$$h = y(\varphi) - y(\alpha) = R.(\cos\varphi - 1) - R.(\cos\alpha - 1) = R.(\cos\varphi - \cos\alpha) =$$

$$= R.(2\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - 1 - 2.\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + 1) = 2.R(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))$$

Por consiguiente, se tiene, integrando desde $\alpha = \varphi$ **hasta** $\alpha = \pi$:

$$t = \int_{\varphi}^{\pi} \frac{2.R.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha}{\sqrt{2.gh}} = \int_{\varphi}^{\pi} \frac{2.R.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha}{\sqrt{4.g\left(R.(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))\right)}} = \sqrt{\frac{R}{g}}\int_{\varphi}^{\pi} \frac{sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)d\alpha}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}} =$$

$$= -2\sqrt{\frac{R}{g}}.\int_{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}^{0} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - x^2}} = 2.\sqrt{\frac{R}{g}}\int_{0}^{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \frac{dx}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - x^2}} = 2.\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

donde hemos hecho: $x = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \rightarrow dx = -\frac{1}{2}.sen\left(\frac{\alpha}{2}\right).d\alpha$ **.**

5.3. La propiedad de ser braquistócrona:

La Cicloide tiene, además, la propiedad de ser la curva de descenso más rápido. Esto quiere decir que si un punto se desplaza en caída libre desde un punto más alto, A, hasta otro más bajo, B, la curva por la llega antes al punto B es, precisamente, la Cicloide.

Este descubrimiento se hizo también en el siglo XVII, al haber planteado Johann Bernouilli el entonces llamado "Problema de la braquistócrona".

Se encontró la solución al problema por diferentes matemáticos de la época, entre los que estaban Newton y Huygens.

6. Documentación:

- **Por su buen nivel y amena exposición, recomendamos vivamente la lectura del trabajo "Ecuaciones y demostraciones de las propiedades de la cicloide", del profesor Miguel de Guzman Osamiz, en la dirección de internet**

  http://usuarios.bitmailer.com/edeguzman/GeometLab/ecua.htm

  (El presente artículo está basado en algunos de sus resultados)

- **También es muy interesante: "La Cicloide", breve trabajo en Gacetilla Matemática. Dirección:**

  http://www.arrakis.es/~mcj/notas002.htm

- **Otra trabajo de lectura obligada: "La Helena de la Geometría", en**

  http://ciencianet.com/helena.html

- **Todas las páginas siguientes aportan ideas, información y métodos de tratamiento geométrico relacionado con la Cicloide y sus fabulosas propiedades:**

  http://masoneriavm.web.com.mx/foro/cientificos.htm

  http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html

  http://www.geocities.com/CapeCanaveral/galaxy/5426/5/vinculos/anecc.htm#cicloide

  http://perso.libertysurf.fr/tournier.robert/mathtous/brachy1.html

  http://www.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/visita/cicloide2.htm

  http://www.math.unifi.it/archimede/archimede/curve/visita/pendolocicloidale.htm

  http://www.biwako.ne.jp/~hidekazu/materials/cycloide.htm

  http://galileo.imss.firenze.it/multi/torricel/icicloid.html

  http://www.xtec.es/~fgonzal2/curio_batiburrillo.html

  http://www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/projetos2/zeluiz/cicloide.htm

  http://www.mjc-andre.org/pages/amej/docu/0106cycl/01pacycl.html