# DE PRISMAS Y POLIEDROS. A LA BÚSQUEDA DEL CUBOIDE PERFECTO

**De poliedros**

En el espacio euclídeo tridimensional podemos resumir algunas nociones básicas de geometría clásica

Un **poliedro** es la zona espacial tridimensional limitada por un número finito de caras que son polígonos planos encerrando un volumen no nulo. Se compone, por consiguiente, de caras planas, aristas y vértices.

Un poliedro es *convexo* si el plano que contiene a cualquiera de sus caras deja al poliedro en un mismo semiespacio, y es *cóncavo* si existe alguna cara cuyo plano contenedor atraviesa el poliedro, es decir, deja una parte del poliedro en un semiespacio y otra parte en el otro.

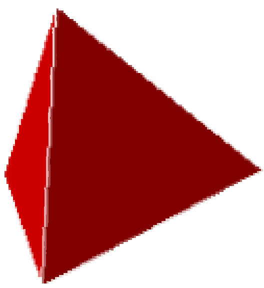
Un poliedro que no tiene agujeros u orificios, se dice que es un *poliedro simple*. Se verifica en los poliedros simples la Regla de Euler:

$$\textit{caras}+\textit{vértices}=\textit{aristas}+2$$

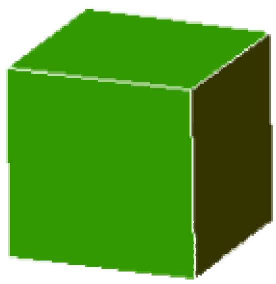
Un **polidedro regular** es un poliedro cuyas caras son polígonos regulares y en cada uno de los vértices confluyen el mismo número de caras. Es decir, sus caras son polígonos que tienen los lados iguales y los ángulos iguales.

En general consideramos que existen nueve poliedros regulares diferentes, que se pueden dividir en dos familias:

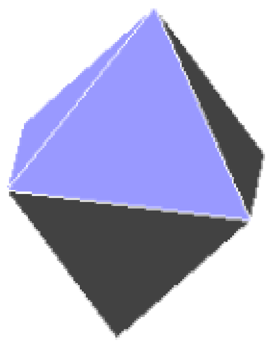
a) Los cinco poliedros regulares de Euler (o cinco sólidos regulares de Platón):



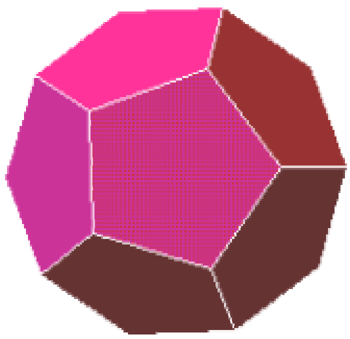
**Tetraedr0**



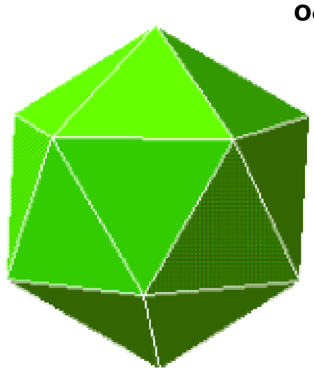
**Cubo**



**Octaedro**



**Dodecaedro**



**Icosaedro**

Los valores correspondientes a estos cinco poliedros (sólidos regulares de Platón) son:

| | caras (c) | vértices (v) | lados (l) | aristas (a) | aristas en vértice (av) |
|---|---|---|---|---|---|
| TETRAEDRO | 4 | 4 | 3 | 6 | 3 |
| CUBO | 6 | 8 | 4 | 12 | 3 |
| OCTAEDRO | 8 | 6 | 4 | 12 | 3 |
| DODECAEDRO | 12 | 20 | 5 | 30 | 3 |
| ICOSAEDRO | 20 | 12 | 3 | 30 | 5 |

Euler, en su tratado de 1750, había indicado ya que los poliedros regulares son cinco: tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro y daba algunas relaciones que se habrían de cumplir en la mayoría de tales poliedros (aparte de la anteriormente indicada Regla, que se cumple en todos ellos):

1) $\frac{1}{l}=\frac{1}{a}+\frac{1}{6}$ (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro)

2) $\frac{1}{a_v}=\frac{1}{a}+\frac{1}{6}$ (tetraedro, icosaedro)

3) $l.c=2.a$ (tetraedro, cubo, dodecaedro, icosaedro)

4) $a_v.v=2.a$ (tetraedro, cubo, dodecaedro, icosaedro)

5) $\frac{2.a}{a_v}-a+\frac{2.a}{l}=2$ (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro)

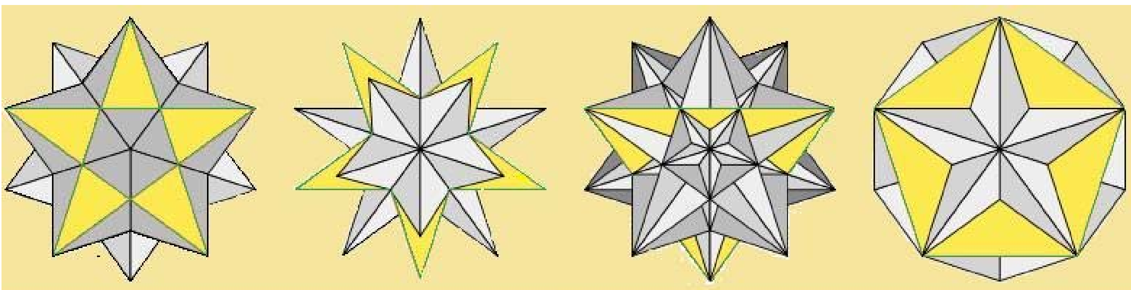
6) $\frac{1}{l}+\frac{1}{a_v}=\frac{1}{2}+\frac{1}{a}$ (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro, icosaedro)

donde es:

c: número de caras,
v: número de vértices,
l: número de lados del polígono regular,
a: número de aristas,
$a_v$: número de caras que concurren en un vértice.

b) Los cuatro poliedros de Kepler-Poinsot

Son poliedros regulares no convexos, cuyas caras son todas polígonos regulares, teniendo en todos sus vértices el mismo número de caras:



Pequeño Dodecaedro Estrellado    Gran Dodecaedro Estrellado    Gran Icosaedro    Gran Dodecaedro
Fuente: Wikipedia, enciclopedia libre

**Prismas**

Un **prisma** es un poliedro que tiene dos de sus caras formadas por polígonos iguales y contenidas en planos paralelos, que se acostumbran a denominar *bases del prisma*. Las restantes caras del prisma se denominan *caras laterales*. Los prismas pueden ser triangulares, rectangulares, pentagonales, etc., según sea el polígono definido por sus bases.

Esto quiere decir que las caras laterales del prisma son paralelogramos, o sea, cuadriláteros cuyos lados son paralelos dos a dos.

Si un prisma se secciona mediante un plano que corte a todas las aristas laterales, se obtienen dos poliedros que se denominan **troncos de prisma.**

En un prisma se puede definir la altura, como distancia entre los dos planos que contienen a sus bases.

El volumen de un prisma es el área de una de las bases por la altura.

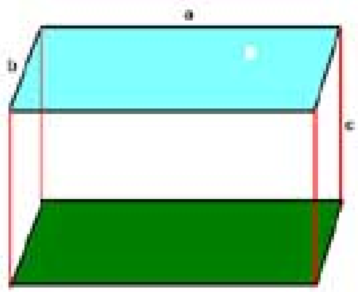
La superficie total de un prisma es la suma de las superficies de sus caras, esto es, el área lateral más el área de sus bases.

Se llama **prisma recto** a un prisma cuyas caras laterales son perpendiculares a sus bases. En otro caso se diría que es un **prisma oblicuo.**

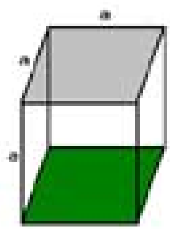
Un **paralelepípedo** es un prisma cuyas bases son paralelogramos. Obviamente, las seis caras de un paralelepípedo son paralelogramos.

En un paralelepípedo el volumen es el área de una de las caras por su distancia a la cara paralela y su superficie lateral es la suma de las superficies de sus caras.

Un paralelepípedo en donde todos los ángulos diedros son rectos, se denomina un **cuboide** u *ortoedro.*



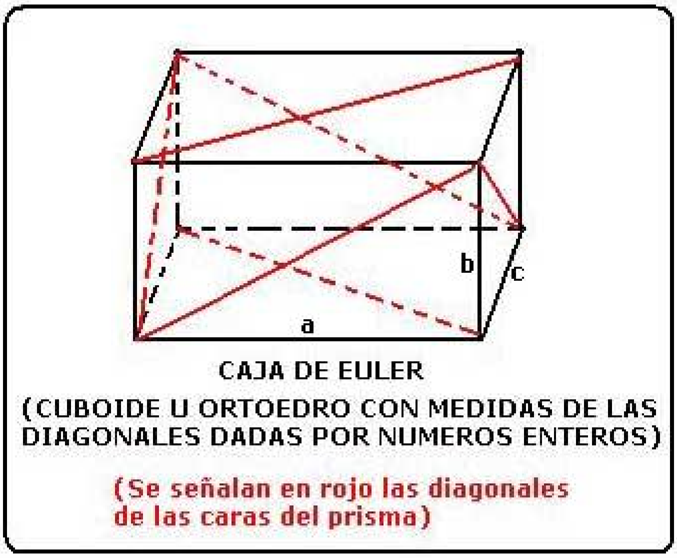

CUBOIDE U ORTOEDRO
DE LADOS a, b, c
(prisma recto de base rectangular
o paralelepípedo recto)




CUBO
(cuboide u ortoedro
de base cuadrada y caras
laterales cuadradas)

**La caja de Euler:**

Se denomina *caja de Euler* a un cuboide, es decir, un paralelepípedo de ángulos rectos, en donde las medidas de los tres lados y de las tres diagonales de sus caras son números enteros. Han sido obtenidas diferentes cajas de Euler.




Dimensiones (han de ser números enteros):

$$a \in Z, \ b \in Z, \ c \in Z$$

Superficie y volumen:

$$S = 2(ab + ac + bc), \quad V = a.b.c.$$

Diagonales de las caras (han de ser números enteros)

$$d_1 = (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} \in Z, \quad d_2 = (a^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \in Z, \quad d_3 = (b^2 + c^2)^{\frac{1}{2}} \in Z$$

Se pretende encontrar una ley recurrente que nos de todas las cajas posibles de Euler. En realidad la caja de Euler más pequeña que se conoce fue descubierta en el año 1719. Las longitudes de sus tres lados son a= 240, b= 117, c=44, y las tres diagonales de sus caras son ab=267, ac=244, bc=125.

Se han encontrado otras cajas de Euler posteriormente:

(275, 252, 240), (693, 480, 140), (720, 132, 85), (792, 231, 160)

***El cuboide perfecto o caja de Euler perfecta:***

Se llama así una a una caja de Euler que cumpla que la diagonal principal es también un número entero.

| |
|---|
| **Cuboide perfecto** $\rightarrow$ **Caja de Euler y** $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}} \in Z$ |

El anterior ejemplo de caja de Euler no es un cuboide perfecto, pues la diagonal principal, esto es, $\left(a^2 + b^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(240^2 + 117^2 + 44^2\right)^{\frac{1}{2}} = 270.6011826...$, que no es un número entero.

En la actualidad no ha sido encontrada todavía ninguna caja de Euler perfecta, ningún cuboide perfecto, ni tampoco ha sido probado que no existan. Este problema, el problema de la búsqueda del cuboide perfecto no ha sido aún resuelto por la matemática.

Han sido encontrado casos en los que la diagonal principal, la diagonal espacial, es entera, pero solo son enteras dos de las tres diagonales de las caras. Por ejemplo, el caso de $(672,153,104)$ .

Asimismo, se han encontrado casos en donde las cuatro diagonales, esto es, las tres diagonales de las caras más la diagonal espacial, son todas números enteros, pero una de las tres aristas de la caja no lo sería, por ejemplo, el caso de $\left(18720, \sqrt{211773121}, 7800\right)$

Mediante el uso de programas de ordenador, se ha rastreado la posibilidad de obtener una caja de Euler perfecta, deduciéndose que, caso de existir, la longitud de sus lados habría de sobrepasar magnitudes del orden de 4000000.

Documentación:
Eric W. Weisstein, *Euler Brick* at MathWorld.
Eric W. Weisstein, *Perfect Cuboid* at MathWorld.
J. Leech "The Rational Cuboid Revisited." American Mathematical Monthly 84, 518-533, 1977
Modelos de papel de poliedros: http://www.korthalsaltes.com/es/index.html
Wikipedia: Sólidos platónicos o de Euler.
Wikipedia: Solidos de Kepler-Poinsot.
Cnice: El Mundo de los Poliedros

**Carlos S. Chinea**
**casanchi@terra.es**