SOBRE LA FORMULACION LAGRANGIANA DE LA MECÁNICA. APLICANDO EL PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.

1. COORDENADAS GENERALIZADAS Y ESPACIO DE CONFIGURACIÓN.
2. DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES.
3. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES.
4. EL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT.
5. ENERGÍA CINÉTICA.
6. ECUACIONES DE LAGRANGE.

1. COORDENADAS GENERALIZADAS Y ESPACIO DE CONFIGURACIÓN:

Si consideramos un sistema de *N* partículas, m_j, *j=1,...N,* entendemos que al tener cada una de ellas un vector de posición de 3 componentes, todo el sistema tendrá, en ausencia de restricciones o ligaduras, un total de *3N* componentes independientes o dimensiones.

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(x_1, y_1, z_1, ..., x_N, y_N, z_N, t), \quad j = 1, ..., N$$

Si el sistema tiene k ligaduras holónomas, esto es, expresables mediante ecuaciones, ya sean reónomas (dependientes del tiempo) o no, el total de grados de libertad viene definido por la diferencia entre el número total de dimensiones y ese número *k* de ligaduras:

$$\begin{array}{c} \phi_1(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \phi_k(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \end{array}$$

$$\boxed{n = 3.N - k}$$

Si llamamos $q_1, ..., q_n$ a las n variables independientes, los *N* vectores de posición correspondientes a las *N* partículas del sistema se pueden expresar por

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(q_1, ..., q_n, t), \ \dots, \ \vec{r}_N = \vec{r}_N(q_1, ...q_n, t)$$

En general, pues, siempre se pueden tomar n parámetros arbitrarios, $q_1, ..., q_n$, ya sean longitudes, ángulos, etc., de modo que en función de estos parámetros puedan expresarse unívocamente los vectores de posición de las partículas del sistema. Estos parámetros independientes, $q_1,...,q_n$, se denominan *coordenadas generalizadas del sistema.*

De forma abreviada, podemos escribir:

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_i, t) \quad \begin{cases} j = 1,...N \ (N \, partículas) \\ i = 1,...,n \ (n \ gr. \, de \, libertad) \end{cases}$$

(q_i son las coordenadas generalizadas, tales como longitudes, momentos, ángulos, o cualquier otra magnitud)

Espacio de configuración:

El espacio de configuración es un hiperespacio curvilíneo de n dimensiones (tantas como grados de libertad del sistema). Cada uno de sus puntos $(q_1,...,q_n)$ corresponde a una posición del sistema, posición definida por

$$\vec{r}_j = \vec{r}_j(q_1,...,q_n,t) \quad j = 1,...,N$$

y la velocidad en este espacio viene definida por:

$$\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + ... + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_1}\dot{q}_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_n}\dot{q}_n.$$

de lo que se deduce que

$$\frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_i} \qquad i = 1,...,n, \quad j = 1,...,N$$

2. DESPLAZAMIENTOS VIRTUALES:

D'Alembert fue el primero en proponer la consideración de un desplazamiento infinitesimal del radio vector de cada partícula, compatible con las fuerzas aplicadas y con las fuerzas de ligadura, como un desplazamiento puramente geométrico para el cual el tiempo no transcurre, en torno a cada estado cinemático del sistema, sin romper en modo alguno las ligaduras, que podemos considerar esclerónomas ya que la variación del radio vector con respecto al tiempo es nula:

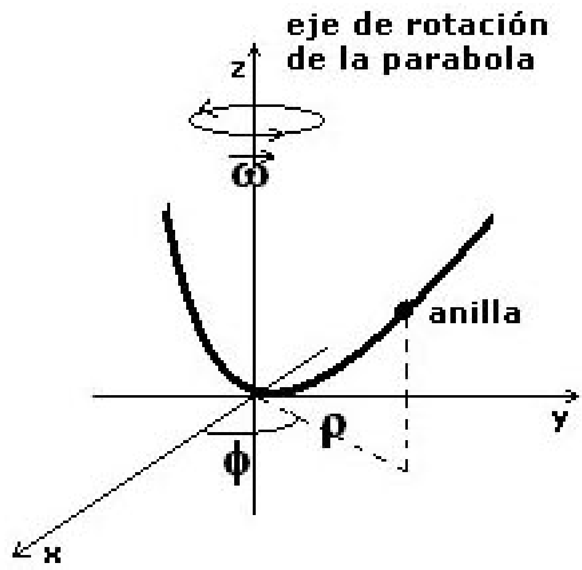
$$\frac{\partial r_j}{\partial t} = 0$$

Representaremos el desplazamiento virtual del vector de posición $\vec{r}_j$ por $\delta\vec{r}_j$:

$$\boxed{\delta\vec{r}_j = \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_1}\delta q_1 + ... + \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_n}\delta q_n}$$

Ejemplo de determinación de los desplazamientos virtuales:

Sea una estructura en forma parabólica que gira alrededor de su eje de simetría con velocidad angular constante ω, y una anilla de masa m que se desplaza por ella. Se tiene:



Las ligaduras que sufre la anilla son holónomas (se describen mediante ecuaciones) y esclerónomas (no dependen del tiempo). El radio vector de la anilla, a la vista de la figura es:

$$\vec{r} = \left(\rho.\cos\omega t, \rho.sen\omega t, \rho^2\right)$$

$$d\vec{r} = (d\rho.\cos\omega t - \rho\omega sen\omega t.dt,$$
$$d\rho.sen\omega t + \rho\omega\cos\omega t.dt, 2\rho.d\rho)$$

Desplazamiento virtual (*dt=0):*

$$d\vec{r} = (d\rho.\cos\omega t, \quad d\rho.sen\omega t, \ 2\rho.d\rho)$$

que representa un desplazamiento infinitesimal de la anilla a lo largo de la parábola supuesta ésta inmóvil.

$$\delta x = d\rho.\cos\omega t, \quad \delta y = d\rho.sen\omega t, \quad \delta z = 2\rho.d\rho$$

3. PRINCIPIO DE LOS TRABAJOS VIRTUALES:

El principio de los Trabajos Virtuales afirma la ortogonalidad del desplazamiento virtual con la dirección de la fuerza de ligadura actuante sobre cada partícula:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^l.\delta\vec{r}_j = 0}$$

Teorema: Si un sistema está en equilibrio se verifica que el trabajo virtual realizado por las fuerzas aplicadas es nulo.

En efecto:

Si el sistema está en equilibrio, la fuerza total actuante sobre cada partícula (suma de la fuerza aplicada y la fuerza de ligadura) ha de ser cero:

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j^a + \vec{F}_j^l = 0$$

en un desplazamiento virtual $\delta \vec{r}_j$:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{F}_j^a + \vec{F}_j^l \right) \delta \vec{r}_j = 0$$

y como, por hipótesis, es $\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^l . \delta \vec{r}_j = 0$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a . \delta \vec{r}_j = 0$$

Expresión en coordenadas generalizadas q_i:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a . \delta \vec{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a . \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_j^a . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \delta q_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) . \delta q_i = \sum_{i=1}^{n} Q_i . \delta q_i = 0$$

Habiendo llamado *Fuerza Generalizada según la coordenada q_i* a la expresión:

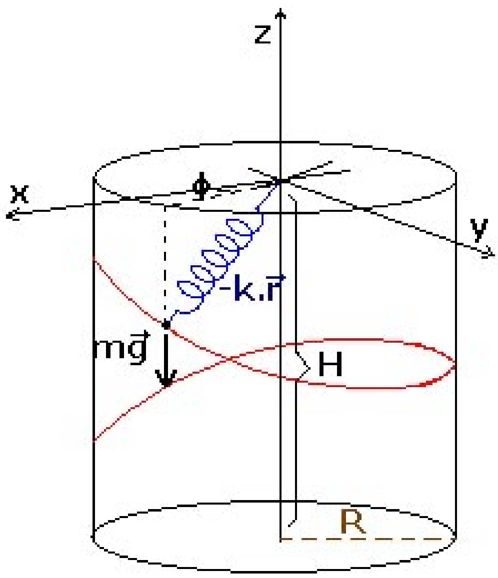
$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N} \left(F_{jx}^a \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + F_{jy}^a \frac{\partial y_j}{\partial q_i} + F_{jz}^a \frac{\partial z_j}{\partial q_i} \right)$$

las dimensiones de Q_i pueden ser variadas, dependiendo de las dimensiones de las coordenadas generalizadas q_i. Por ejemplo:

- si q_i es una longitud, entonces Q_i es una fuerza.
- Si q_i es un ángulo, entonces Q_i es un momento dinámico.
- Si q_i es una superficie, entonces Q_i es una tensión.
- Si q_i es un volumen, entonces Q_i es una presión.

Ejemplo de aplicación del Principio de los Trabajos Virtuales:

Sea una bolita de masa m que se desplaza sobre una hélice circular de eje vertical y unida elásticamente al origen O en un campo gravitatorio g. El punto O está en el eje del cilindro y la fuerza elástica es $-k.\vec{r}$



Ecuación de la hélice:

$$x = r.\cos\phi$$
$$y = r.sen\phi$$
$$z = \frac{H}{2\pi}.\phi$$
$$\vec{r} = \left(R.\cos\phi, R.sen\phi, \frac{\phi}{2\pi} H \right)$$

El radio vector de posición:

$$\vec{r} = R\cos\phi.\vec{i} + R.sen\phi.\vec{j} - \frac{\phi}{2\pi}H.\vec{k} \Rightarrow \delta\vec{r} = \left(-R.sen\phi.\vec{i} + R\cos\phi.\vec{j} - \frac{H}{2\pi}\vec{k}\right).\delta\phi$$

Y la fuerza aplicada:

$$\vec{F}^{a} = -k.\vec{r} - m.\vec{g} = -kR\cos\phi.\vec{i} - kRsen\phi.\vec{j} + \frac{k\phi H}{2\pi} - mg.\vec{k}$$

Por tanto:

$$\delta W = \vec{F}^{a}.\delta\vec{r} = k.R^2.sen\phi.\cos\phi.\delta\phi - kR^2.\cos\phi.sen\phi.\delta\phi - \left(\frac{k\phi H}{2\pi} - mg\right).\frac{H}{2\pi}.\delta\phi = 0$$

$$\frac{k\phi H}{2\pi} - mg = 0 \Rightarrow \phi = \frac{2\pi mg}{kH}$$

4. EL PRINCIPIO DE D'ALEMBERT:

D'Alembert generalizó el Principio de los Trabajos Virtuales a sistemas en movimiento fuera de las condiciones de equilibrio.

La fuerza de inercia actuante sobre cada partícula es la suma de la fuerza aplicada y la fuerza de ligadura

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j^{a} + \vec{F}_j^{l} = m_j\vec{a}_j = \dot{\vec{p}}_j$$

En cada instante el estado mecánico puede considerarse formalmente equivalente a un estado de equilibrio entre las fuerzas aplicadas, $\vec{F}_j^{a}$, las fuerzas de ligadura, $\vec{F}_j^{l}$, y las fuerzas de inercia, $\dot{\vec{p}}_j$ y se le puede aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales. Si suponemos un desplazamiento virtual, $\delta\vec{r}_j$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_j^{a} + \vec{F}_j^{l} - \dot{\vec{p}}_j\right).\delta\vec{r}_j = 0$$

y siendo:

$$\sum_{j=1}^{N}\vec{F}_j^{l}.\delta\vec{r}_j = 0$$

será:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_j^{a} - \dot{\vec{p}}_j\right).\delta\vec{r}_j = 0$$

o bien:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{N}\left(\vec{F}_j^{a} - m_j.\frac{d\vec{v}_j}{dt}\right).\delta\vec{r}_j = 0}$$

(Principio de D'Alembert)

Al aplicar el Principio de D'Alembert, que no contiene en su expresión a las restrictivas fuerzas de ligadura, es necesario entender que los $\delta\vec{r}_j$ no son arbitrarios, por lo que la suma nula anterior no implica que todos los sumandos han de ser nulos. En general, es:

$$\vec{F}_j^a - m_j.\frac{d\vec{v}_j}{dt} = -\vec{F}_j^l$$

5. ENERGÍA CINÉTICA:

La energía cinética del sistema es la suma de la energía cinética de todas las partículas del sistema:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\vec{v}_j^2$$

Teorema: La energía cinética Γ del sistema de partículas se puede expresar en función de las coordenadas y velocidades generalizadas por

$$\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma_1 + \Gamma_2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i.\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}\dot{q}_i\dot{q}_k$$

siendo:

$$\alpha = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\left(\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}\right)^2, \quad \alpha_i = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}, \quad \alpha_{ik} = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_k}$$

en efecto:

siendo $\vec{v}_j = \frac{d\vec{r}_j}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}.\dot{q}_i + \frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}$, se tiene:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\vec{v}_j^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\left(\frac{d\vec{r}_j}{dt}\right)^2 = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}.\dot{q}_i + \frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}\right]^2$$

o sea:

$$\Gamma = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\left(\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial t}\right).\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2}m_j\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_i}\frac{\partial\vec{r}_j}{\partial q_k}\right).\dot{q}_i.\dot{q}_k$$

Teorema: Se verifica, para la energía cinética Γ de un sistema de partículas, que, para cada coordenada generalizada q_i, es:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N} m_j . \frac{d\vec{v}_j}{dt} . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \qquad i = 1,...,n$$

En efecto:

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i}\left(\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j . \vec{v}_j^{\,2} \right) = \sum_{j=1}^{N} m_j . \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial \dot{q}_i} . \vec{v}_j = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_j} . \frac{d\vec{r}_j}{dt}$$

derivando con respecto al tiempo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(m_j \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}_j}{dt} \right) . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt} . \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) \right) = \sum_{j=1}^{N} \left(m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + m_j \vec{v}_j . \frac{\partial \vec{v}_j}{\partial q_i} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2} m_j \frac{\partial}{\partial q_i} \vec{v}_j^{\,2} = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{1}{2} m_j \vec{v}_j^{\,2} \right) = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}$$

por consiguiente:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N} m_j . \frac{d\vec{v}_j}{dt} . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \qquad i = 1,...,n$$

6. ECUACIONES DE LAGRANGE:

Utilizando las anteriores relaciones entre las derivadas de la energía cinética se obtienen fácilmente desde el Principio de D'Alembert un conjunto fundamental de ecuaciones que describen el movimiento del sistema y que se conoce como Ecuaciones de Lagrange, que pueden simplificarse para el caso de que las fuerzas aplicadas sean conservativas, esto es, dependientes de una función potencial.

Sea un sistema de N partículas de masas m_j, j=1, ..., N, con k ligaduras holónomas y, por consiguiente, con n=3N-k grados de libertad.

Del Principio de D'Alembert:

$$0 = \sum_{j=1}^{N} \left(\vec{F}_j^a - m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \right) . \delta\vec{r}_j = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_j^a \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} - \sum_{i=1}^{n} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) . \delta q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) . \delta q_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \right) . \delta q_i$$

y siendo:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad \text{(Fuerza generalizada)}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N} m_j \frac{d\vec{v}_j}{dt}\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} \quad \text{(Teorema anterior)}$$

se tiene, al sustituir:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} \right) . \delta q_i$$

obteniéndose n ecuaciones de Lagrange (tantas como grados de libertad):

$$\boxed{Q_i - \frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n}$$

Ecuaciones de Lagrange para sistemas sometidos a fuerzas conservativas:

Cuando las partículas del sistema están sometidas exclusivamente a fuerzas conservativas, es decir, a fuerzas $\vec{F}_j^a$ que dependen de un potencial V_j, o sea de una función de las coordenadas generalizadas exclusivamente, se tiene:

$$\vec{F}_j^a = -\vec{\nabla} V_j \ , \quad \frac{\partial V_j}{\partial \dot{q}_i} = 0 \ , \quad V = \sum_{j=1}^{N} V_j$$

y la fuerza generalizada:

$$Q_i^c = \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_j^a . \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N} \left(-\vec{\nabla} V_j \right) \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial V_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}$$

Por lo cual, sustituyendo en las Ecuaciones de Lagrange anteriores:

$$Q_i^c = -\frac{\partial V}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

o bien:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (\Gamma - V)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (\Gamma - V)}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

Llamando $L = \Gamma - V$ (Función de Lagrange):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad i = 1,\dots,n$$

(Ecuaciones de Lagrange para campos conservativos)

Ecuaciones generales de Lagrange:

En el caso de un sistema de particulas sometido tanto a fuerzas conservativas $\vec{F}_j^{ac}$ como no conservativas $\vec{F}_j^{a'}$, se tendría, para la fuerza generalizada:

$$Q_i = \sum_{j=1}^{N} (\vec{F}_j^{ac} + \vec{F}_j^{a'}).\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{N} \left(-\vec{\nabla} V_j\right)\frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} + \sum_{J=1}^{n} \vec{F}_j^{a'} \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial V_j}{\partial q_i} + Q_i^{'} = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i^{'}$$

por tanto:

$$-\frac{\partial V}{\partial q_i} + Q'_i = \frac{d}{dt}\frac{\partial \Gamma}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial \Gamma}{\partial q_i}$$

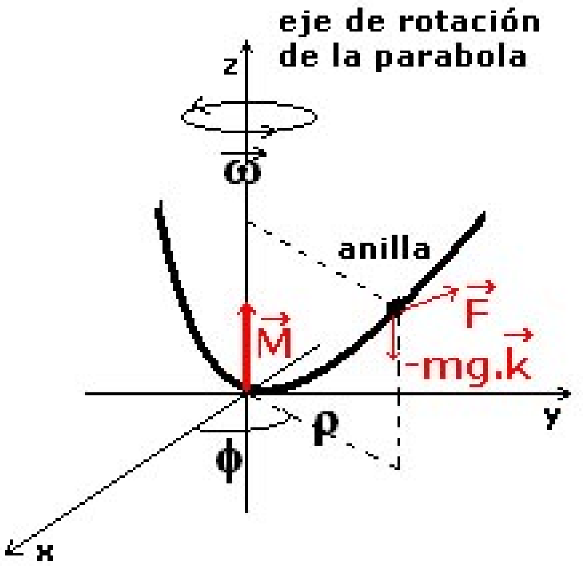
y, en definitiva:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^{'} \qquad i = 1,\ldots,n}$$

(Ecuaciones generales de Lagrange)

Ejemplo de obtención de las ecuaciones del movimiento:

Consideremos el ejemplo mostrado ya antes de la anilla m que se desplaza ensartada en una estructura parabólica rígida que a su vez rota entorno a su eje de simetría con un momento dinámico $\vec{M}$.



Las coordenadas generalizadas, esto es, los grados de libertad de la anilla son dos: una, la dirección $\vec{\rho}$ perpendicular al eje z de rotación de la parábola, y la otra, es el ángulo $\vec{\phi}$ de variación en la rotación de la parábola.

Determinaremos el vector de posición, la velocidad, el cuadrado de la velocidad, la variación parcial del radio vector con respecto a cada una de las dos coordenadas generalizadas, la fuerza aplicada, las fuerzas generalizadas, la energía cinética y sus derivadas parciales, a fin de poder escribir las ecuaciones de Lagrange.

Vector de posición y velocidad:

$$\vec{r} = (\rho\cos\phi,\ \rho sen\phi,\ \rho^2) \qquad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\cos\phi.\dot{\rho} - \rho sen\phi.\dot{\phi},\ \dot{\rho} sen\phi + \rho\cos\phi.\dot{\phi},\ 2\rho.\dot{\rho}\right)$$

Cuadrado de la velocidad:

$$\vec{v}^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + 4\rho^2\dot{\rho}^2\right)$$

Fuerza aplicada y momento dinámico:

Fuerza sobre la estructura parabólica: $\vec{F} = \left(-\left|\vec{F}\right|.sen\phi, \left|\vec{F}\right|.\cos\phi, 0\right)$

Momento de la fuerza sobre la estructura parabólica: $\vec{M} = M.\vec{k} = \rho.\left|\vec{F}\right|.\vec{k}$

Fuerza aplicada sobre la anilla: $\vec{F}^{a} = \vec{F} - mg.\vec{k} = \left(-\left|\vec{F}\right|sen\phi, \left|\vec{F}\right|\cos\phi, -mg\right)$

Derivadas parciales del radio vector con respecto a las dos coordenadas generalizadas:

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \left(\cos\phi, sen\phi, 2\rho\right) \qquad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \left(-\rho sen\phi, \rho\cos\phi, 0\right)$$

Fuerzas generalizadas:

$$Q_{\rho} = \vec{F}^{a}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = -\left|\vec{F}\right|sen\phi.\cos\phi + \left|\vec{F}\right|\cos\phi.sen\phi - mg.2\rho = -2mg\rho$$

$$Q_{\phi} = \vec{F}^{a}.\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi} = \rho\left|\vec{F}\right|.sen^{2}\phi + \rho\left|\vec{F}\right|.\cos^{2}\phi + 0 = \rho\left|\vec{F}\right| = M$$

Energía Cinética y sus derivadas parciales:

$$\Gamma = \frac{1}{2}m.\vec{v}^{2} = \frac{1}{2}m\left(\dot{\rho}^{2} + \rho^{2}\dot{\phi}^{2} + 4\rho^{2}\dot{\rho}^{2}\right)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{\rho}} = m\left(\dot{\rho} + 4\rho^{2}\dot{\rho}\right) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{\rho}} = m\left(\ddot{\rho} + 8\rho\dot{\rho}^{2} + 4\rho^{2}\ddot{\rho}\right) \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} = m\left(\rho\dot{\phi}^{2} + 4\rho\dot{\rho}^{2}\right)$$

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{\phi}} = m\left(\rho^{2}\dot{\phi}\right) \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{\phi}} = m\left(\rho^{2}\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\right) \qquad \frac{\partial\Gamma}{\partial\phi} = 0$$

Las ecuaciones del movimiento:

$$Q_{\rho} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{\rho}} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\rho} \Rightarrow -2mg\rho = m\left(\ddot{\rho} + 8\rho\dot{\rho}^{2} + 4\rho^{2}\ddot{\rho}\right) - m\left(\rho\dot{\phi}^{2} + 4\rho\dot{\rho}^{2}\right)$$

$$Q_{\phi} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\Gamma}{\partial\dot{\phi}} + \frac{\partial\Gamma}{\partial\phi} \Rightarrow M = m\left(\rho^{2}\ddot{\phi} + 2\rho\dot{\rho}\dot{\phi}\right) - 0$$

Resultan:

$$\begin{cases} (1+4\rho^{2}).\ddot{\rho} + 4\rho^{2}\dot{\rho}^{2} + 2g\rho = 0 \\ m\rho^{2}\ddot{\phi} + 2m\rho\dot{\rho}.\dot{\phi} - M = 0 \end{cases}$$

REFERENCIAS:

Rychlik, Marek: "Mecánica Lagrangiana y Hamiltoniana. Una breve introducción": http://alamos.math.arizona.edu/~rychlik/557-dir/mechanics/

MecFunNet: Apuntes Universidad Politécnica de Madrid, "Mecánica Lagrangiana", http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/Xitami/webpages/teoria/lag1.pdf

Goldstein, H.: "Mecánica clásica", Ed. Reverté, 1994.

Landau, L; Lifchitz, E.: "Mecánica", Tomo 1 del Curso de Física Teórica, Ed. Reverté, 1980.