Potencial electroestático

José Jesús MENA DELGADILLO

Una propiedad muy importante de todo campo electroestático, corresponde al hecho de que el campo eléctrico es conservativo, es decir, existe una función escalar que depende de un punto en el espacio llamada potencial. El concepto de potencial constituye una herramienta poderosa la cual permite analizar con mayor facilidad los problemas de electrostática.

A continuación se mostrará el hecho que si el campo eléctrico $\vec{E}$ es conservativo; entonces: $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ y $\vec{E} = -\nabla V$, en donde V es llamado el potencial electroestático.

Demostración:

Si el campo eléctrico $\vec{E}$ es conservativo, se satisface que:

$$\oint \vec{E} \cdot d\,\vec{l} = 0 \qquad (1)$$

para una trayectoria l cerrada; es decir, el valor de la integral (1) entre dos puntos arbitrarios debe de ser independiente de la trayectoria que se elija. Ahora, utilizando el teorema de Stokes, se establece la relación:

$$\oint \vec{E} \cdot d\,\vec{l} = \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\,\vec{S} \qquad (2)$$

En donde S es la superficie encerrada por la trayectoria cerrada l a lo largo de la cual se considera la circulación de $\vec{E}$.

Como la ecuación (1) es valida para cualquier trayectoria, y de la ecuación (2) el segundo miembro indica que se cumple para cualquier superficie; entonces:

$$\oint \vec{E} \cdot d\,\vec{l} \;\Leftrightarrow\; \int_S \left(\nabla \times \vec{E}\right) \cdot d\,\vec{S}$$

Ahora si $\nabla \times \vec{E} = 0$ entonces $\vec{E} = -\nabla V$. Escribiendo explícitamente el valor de $\nabla \times \vec{E}$ para el caso tridimensional, resulta:

$$\nabla \times \vec{E} = \hat{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)$$

Dado que $\nabla \times \vec{E} = 0$, entonces:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \;;\; \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \;;\; \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \qquad (3)$$

Si definimos una función continua V (x, y, z) tal que:

$$E_x = \frac{\partial V}{\partial x} \;\; ; \;\; E_y = \frac{\partial V}{\partial y} \;\; ; \;\; E_z = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{4}$$

De las relaciones (3) y (4) se satisface:

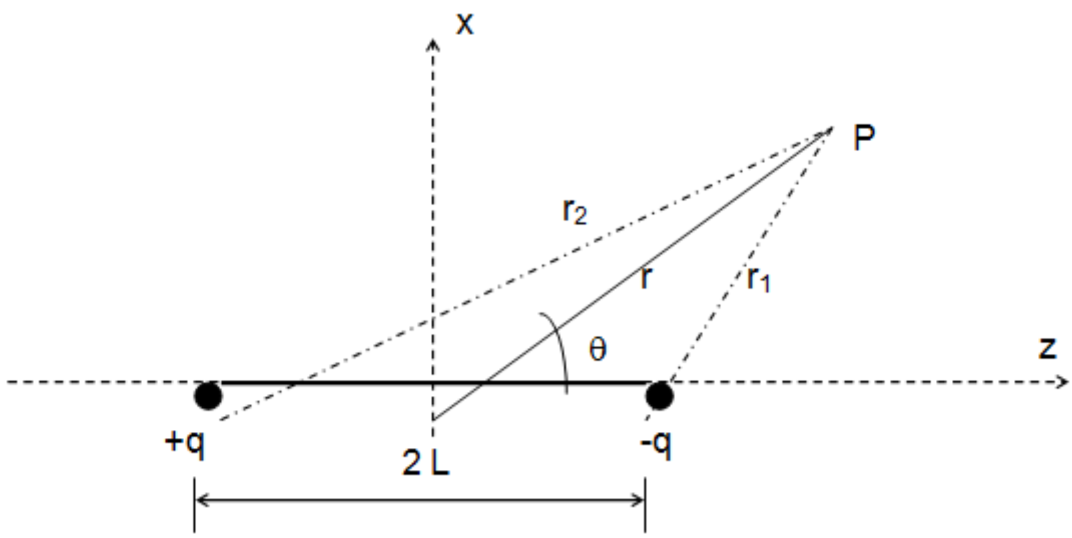
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial y} \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 V}{\partial z \, \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial z} \;\; ; \;\; \frac{\partial^2 V}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \, \partial x}$$

Entonces:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

1. Una aplicación interesante corresponde al calculo del potencial eléctrico de un dipolo de longitud 2 L en cualquier punto.

Considerando el siguiente esquema:



El principio de superposición nos permite escribir el potencial eléctrico en el punto P de la forma:

$$V = \frac{q}{4 \Pi \varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \tag{5}$$

En donde:

$$r_1 = \sqrt{r^2 + L^2 - 2 \, r \, L \cos(\pi - \theta)} = \sqrt{r^2 + L^2 + 2 \, r \, L \cos \pi}$$

$$r_2 = \sqrt{r^2 + L^2 - 2 \, r \, L \cos \theta} \tag{6}$$

Sustituyendo las relaciones (6) en la ecuación (5), resulta:

$$V\left(r,\theta\right)=\frac{q}{4\,\Pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+L^2+2\,r\,L\cos\theta}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+L^2-2\,r\,L\cos\theta}}\right)\quad(7)$$

Observe que la ecuación (7) esta dada en coordenadas polares.

Considerando la ecuación (7), el potencial eléctrico en un punto sobre la línea definida por las cargas q_1 y q_2 esta dada por:

$$V\left(r\,,\theta=0\right)=\frac{q}{4\,\Pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r+L}-\frac{1}{r-L}\right)=-\frac{2\,L\,q}{4\,\Pi\,\varepsilon_0\left(r^2-L^2\right)}\qquad(8)$$

Análogamente para puntos sobre la recta que bisecta al dipolo perpendicularmente:

$$V\left(r\,,\theta=\frac{\pi}{2}\right)=\frac{q}{4\,\Pi\,\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+L^2+2\,r\,L\cos 0^0}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+L^2-2\,r\,L\cos 0^o}}\right)=0\quad(9)$$

2. Una segunda aplicación consiste en una distribución esférica de carga que tiene una densidad de carga volumétrica que es función solo de la distancia, r al centro de la distribución. Es decir, ρ = ρ (r).

En donde la distribución de la densidad de carga, esta dada por :

$$\rho=\frac{A}{r},\quad A=cons\tan te\quad y\quad 0\le r\le R\qquad(10)$$

$$\rho=0,\quad para\quad R\angle r\qquad(11)$$

Es interesante determinar el Campo eléctrico como función de r, y posteriormente integrar el resultado para obtener la expresión del potencial eléctrico.

Para conocer el campo eléctrico en una distribución esférica es útil aplicar la ley de Gauss gracias a la simetría del problema, de modo que para los puntos interiores a la distribución esférica.

Partiendo de la expresión:

$$d\,q=\rho\,d\,V\qquad(12)$$

Dado que:

$$d\,V=\left(4\,\pi\,r^2\right)d\,r\qquad(13)$$

Combinando las relaciones (10), (12) y (13) resulta:

$$d\,q=\frac{A}{r}\left(4\,\pi\,r^2\right)d\,r$$

Integrando la relación anterior, resulta:

$$\int_0^q d\,q = \int_0^r 4\,A\,\pi\,r\,d\,r = 4\,\pi\,A\int_0^r r\,d\,r$$

Resolviendo la integral anterior, resulta:

$$q = 2\,A\,\pi\,r^2 \qquad (14)$$

Utilizando la expresión de la ley de Gauss:

$$\varepsilon_o\,\vec{E}\oint_S d\,\vec{S} = q$$

En donde:

ε_o; es llamada constante de permisividad eléctrica y depende su valor del medio donde se encuentren las cargas eléctricas.
q: es la carga eléctrica total encerrada en una superficie S.

En este caso para una esfera simétrica cargada de radio R, resulta:

$$\varepsilon_o\,E\left(4\,\pi\,r^2\right) = q$$

Sustituyendo la relación (14) en la ecuación anterior se obtiene:

$$\varepsilon_o\,E\left(4\,\pi\,r^2\right) = 2\,A\,\pi\,r^2$$

Simplificando la relación anterior y escribiendo la característica vectorial del campo eléctrico en los puntos interiores de la esfera cargada de radio R, resulta:

$$\vec{E} = \frac{A}{2\,\varepsilon_o}\,\hat{r} \qquad para \qquad r \le R \qquad (15)$$

Para los puntos fuera de la distribución de cargas, el campo eléctrico esta dado:

A partir de la ley de Gauss pera una distribución de carga en una esfera simétrica de radio R, se obtiene la relación:

$$\varepsilon_o\,E\left(4\,\pi\,r^2\right) = q \qquad (16)$$

En el caso ($r \ge R$), entonces:

$$q = 2\,A\,\pi\,R^2 \qquad (17)$$

De las ecuaciones (16) y (17), resulta:

$$\varepsilon_o\,E\left(4\,\pi\,r^2\right) = 2\,A\,\pi\,R^2$$

De la ecuación anterior finalmente resulta:

$$\vec{E} = \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o\,r^2}\,\hat{r} \qquad para \quad r \geq R \tag{18}$$

Para puntos dentro de la esfera, el potencial electroestático será tal que debemos traer la carga eléctrica desde el infinito, hasta el punto interior de la esfera, es decir con el valor del Campo eléctrico determinado por la Ley de Gauss fuera de la esfera se determinara la expresión del potencial eléctrico trayendo la carga eléctrica de infinito a R.

Partiendo de la definición de potencial eléctrico, V:

$$V = -\int \vec{E} \cdot d\,\vec{l}$$

De modo que en el presente caso:

$$V(r \geq R) = -\int \vec{E}\,(r \geq R) \cdot d\,\vec{l} = -\int_{\infty} \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o\,r^2}\,d\,r$$

Resolviendo la integral de la expresión anterior, resulta finalmente:

$$V\,(r \geq R) = \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o\,r} \tag{19}$$

Para puntos dentro de la esfera, el potencial será tal que debemos traer la carga desde el infinito, hasta el punto interior, es decir con el valor del Campo eléctrico fuera se calculara el potencial eléctrico trayendo la carga eléctrica de infinito a R y además traer con el Campo eléctrico la carga eléctrica de R a r, es decir .

$$V(r \leq R) = -\int_{\infty}^{R} \vec{E}\,(r \geq R) \cdot d\,\vec{l} - \int_{R}^{r} \vec{E}\,(r \leq R) \cdot d\,\vec{l} \tag{20}$$

Resolviendo la primera integral de la ecuación anterior:

$$\int_{\infty}^{R} \vec{E}\,(r \geq R) \cdot d\,\vec{l} = \int_{\infty}^{R} \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o\,r^2}\,d\,r = \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o} \int_{\infty}^{R} \frac{d\,r}{r^2} = \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{R}\right) \tag{21}$$

Dado que la expresión: $\frac{1}{\infty} \rightarrow 0$, entonces se dice que el termino es insignificante, de manera tal que, la expresión (21) se escribe de la forma:

$$\int_{\infty}^{R} \vec{E}\,(r \geq R) \cdot d\,\vec{l} = \frac{A\,R^2}{2\,\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{R}\right) = -\frac{A\,R}{2\,\varepsilon_o}$$

Ahora resolviendo la segunda integral de la expresión (20), resulta:

$$\int_{R}^{r} \vec{E}\,(r \leq R) \cdot d\,\vec{l} = \int_{R}^{r} \frac{A}{2\,\varepsilon_o}\,d\,r = \frac{A}{2\,\varepsilon_o} \int_{R}^{r} d\,r = \frac{A}{2\,\varepsilon_o}\,(r - R) \tag{22}$$

-

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (20), las relaciones (21) y (22), resulta:

$$V(r \leq R) = -\left(-\frac{A\,R}{2\,\varepsilon_o}\right) - \left(\frac{A\,(r-R)}{2\,\varepsilon_o}\right) = \frac{A\,R}{2\,\varepsilon_o} - \frac{A\,r}{2\,\varepsilon_o} + \frac{A\,R}{2\,\varepsilon_o}$$

Simplificando:

$$V(r \leq R) = \frac{A\,R}{\varepsilon_o} - \frac{A\,r}{2\,\varepsilon_o}$$

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso M y Finn E Física Vol II Campos y Ondas, Edit. Addison- Wesley Iberoamericana (1970)

- Resnick R., Holliday D., Física vol. II, CECSA, (1993)

José Jesús Mena Delgadillo
menajess@gmail.com