

# PEQUEÑAS OSCILACIONES EN SISTEMAS LAGRANGIANOS<sup>1</sup>

M. Santander

*Departamento de Física Teórica, Universidad de Valladolid*

The response to small perturbations depends linearly on the perturbation —this is a principle of natural science which lies at the basis of a vast number of mathematical models. . . . Linear space is an idealization of “arbitrarily large small perturbation”

In classical physics or mathematics, in addition to the original idea that ‘anything’ can be linearized on a small scale, a large role is played by the observation that functions on any set . . . form a vector space, because they can be added to each other and multiplied by numbers.

Yuri I. Manin, *Mathematics and Physics*

## Introducción: El oscilador armónico

En estas notas vamos a estudiar el movimiento de *pequeñas oscilaciones* efectuado por un sistema mecánico *lagrangiano* en las proximidades de una posición de equilibrio estable. Si el sistema es una partícula que se mueve bajo fuerzas que provienen de un potencial, los equilibrios estables de la partícula ocurren en los mínimos del potencial: en este caso se trata de estudiar el movimiento en las cercanías de un mínimo del potencial.

El prototipo de este problema es el *oscilador armónico unidimensional*. Supongamos una partícula de masa  $m > 0$  que se mueve en una línea recta, con posición caracterizada por la coordenada *cartesiana*  $x$ , y sometida a una fuerza atractiva proporcional a la distancia a un punto fijo sobre la línea, que tomaremos como origen de coordenadas. Así las cosas, la fuerza es  $F = -kx$  con  $k > 0$ , y la ecuación del movimiento newtoniana,

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \ddot{x} = -\frac{k}{m}x, \quad (1)$$

es una ecuación diferencial muy sencilla cuya solución *general* (dada por una función trigonométrica de la variable  $t$ , ya que  $-\frac{k}{m} < 0$ ) es:

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi), \quad (2)$$

cuya dependencia con el tiempo es armónica, con una frecuencia  $\omega = \sqrt{k/m}$  que está fijada completamente por los dos datos  $m, k$  del problema. La solución general contiene *dos* constantes arbitrarias: la *amplitud*  $a$  del movimiento (el valor máximo de  $x$ ), y la *fase inicial*,  $\phi$  (que es el valor de la fase de la oscilación en el instante inicial  $t = 0$ ). Debe notarse que esta solución es *exacta*, y que independientemente de las condiciones iniciales, la frecuencia  $\omega$  determinada por las constantes  $m, k$  del problema, es la *única* frecuencia con la que el sistema *puede moverse*.

- COMENTARIO 0.1. Es esencial entender que la frecuencia de cualquiera de los movimientos posibles (diferentes amplitudes, diferentes fases), está determinada por las constantes  $m, k$  del problema *de manera única*.

En la formulación lagrangiana de la mecánica, plantearíamos este problema diciendo que la partícula se encuentra en un potencial  $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ , y la ecuación del movimiento es la ecuación de Euler-Lagrange asociada al lagrangiano

$$L_{\text{osc}} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \quad (3)$$

que presenta una notable simetría entre posición  $x$  y velocidad  $\dot{x}$ .

<sup>1</sup>Se agradecerá sobremanera a los lectores que informen mediante un email a [mariano.santander@uva.es](mailto:mariano.santander@uva.es) de cualquier errata o error que detecten en estas notas.

## 1. Pequeñas oscilaciones en un sistema lagrangiano con un grado de libertad

Vamos ahora a considerar el caso de un sistema mecánico lagrangiano con *un solo* grado de libertad, pero por lo demás general. Usamos una coordenada generalizada  $q$  arbitraria, y planteamos directamente las ecuaciones del movimiento en términos de la mecánica lagrangiana. El lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}\mu(q)\dot{q}^2 - V(q), \quad (4)$$

donde  $\mu(q)$  será en general una función de la coordenada  $q$ , y debe tenerse  $\mu(q) > 0$  pues la energía cinética debe ser definida positiva. La ecuación del movimiento que resulta es (¡cómpruese!):

$$\mu\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dq}\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = 0. \quad (5)$$

- EJERCICIO 0.1. Semiavanzado. De la teoría general sabemos que la forma de la ecuación de Lagrange es independiente de la elección de las coordenadas; esto implica que cuando se cambia la coordenada  $q$  a otra  $\tilde{q}$  mediante funciones  $q(\tilde{q})$  y  $\tilde{q}(q)$  con derivadas  $\frac{dq}{d\tilde{q}}$  y  $\frac{d\tilde{q}}{dq}$  no nulas en ningún punto, la ecuación de movimiento (5) debe conservar la misma forma al pasar a las coordenadas  $\tilde{q}$ .

Esto es, la ecuación de Euler-Lagrange del movimiento debe ser  $\mu\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dq}\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq} = 0$  en las coordenadas  $q$  y  $\tilde{\mu}\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{q}}\dot{\tilde{q}}^2 + \frac{dV}{d\tilde{q}} = 0$  en las  $\tilde{q}$ . Realmente esto podríamos afirmarlo a priori, pues al escribir el lagrangiano no se ha hecho ninguna elección particular de la coordenada, con lo que una ecuación de esa misma forma debería valer para todas las elecciones.

Se pide comprobar que efectivamente eso es así de una manera independiente, *usando las leyes de transformación bajo ese cambio de coordenadas de todos los objetos involucrados*. Para ser un poco más preciso, lo que la teoría general nos dice es que el miembro izquierdo de la ecuación de Lagrange del movimiento se transforma como un covector, esto es, que la relación entre ambos miembros izquierdos *debe ser*

$$\left(\tilde{\mu}\ddot{\tilde{q}} + \frac{1}{2}\frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{q}}\dot{\tilde{q}}^2 + \frac{dV}{d\tilde{q}}\right) = \frac{dq}{d\tilde{q}}\left(\mu\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{d\mu}{dq}\dot{q}^2 + \frac{dV}{dq}\right) \quad (6)$$

lo que garantiza que la forma de las ecuaciones de Lagrange se mantiene invariante bajo el cambio de coordenadas, ya que el factor  $\frac{dq}{d\tilde{q}}$  es diferente de cero y si la expresión entre paréntesis en uno de los dos lados de la relación anterior se anula, debe hacerlo también la del otro lado.

De entrada sabemos que las energías cinética  $T$  y potencial  $V$  son escalares, que la ley de transformación de la velocidad es la de un vector,  $\dot{\tilde{q}} = \frac{dq}{d\tilde{q}}\dot{q}$  y la de los gradientes de  $V$  es la de un covector  $\frac{dV}{d\tilde{q}} = \frac{dq}{d\tilde{q}}\frac{dV}{dq}$ . Nótese que aquí vectores y covectores tienen una sola componente, pero se transforman de maneras diferentes entre sí y de la de los escalares.

A partir de aquí, se pide en este ejercicio obtener las leyes de transformación de los otros dos términos que aparecen en la ecuación de Lagrange. ¿Es  $\mu\ddot{q}$  un covector bajo los cambios de  $q$  a  $\tilde{q}$ ? ¿Es  $\frac{1}{2}\frac{d\mu}{dq}\dot{q}^2$  un covector? Si no lo son, y teniendo en cuenta que  $\frac{dq}{d\tilde{q}}$  sí lo es, ¿cómo es posible que el miembro izquierdo de la ecuación del movimiento se transforme como un covector, que es lo que la teoría general nos dice? Ayuda: Aparte de los cálculos 'rutinarios' que son necesarios, una clave en la resolución de este puzzle resulta de derivar con respecto a  $\tilde{q}$  la identidad  $\frac{dq}{d\tilde{q}}\frac{d\tilde{q}}{dq} = 1$ . El resultado de este cálculo es esencial para efectuar una simplificación algebraica que resuelve el puzzle y que sin su uso no es obvia.

¿Existirá alguna solución de las ecuaciones del movimiento en la cual la partícula permanezca *indefinidamente* en reposo y en equilibrio *estable* en cierto punto  $q_0$ ? Sustituyendo, si queremos que  $t \rightarrow q(t) = q_0$  sea solución de la ecuación, el potencial  $V(q)$  *debe tener un punto crítico en  $q_0$* , esto es  $\left.\frac{dV}{dq}\right|_{q_0} = 0$ , y si queremos que este movimiento sea estable el punto crítico *debe ser un mínimo del potencial*, lo que corresponde a que la segunda derivada de  $V$  con respecto a  $q$  sea *positiva* en ese punto crítico,  $\left.\frac{d^2V}{dq^2}\right|_{q_0} > 0$ .

Nuestro objetivo es el estudio del movimiento del sistema lagrangiano en las cercanías de un *mínimo* del potencial, movimiento que se denomina de *pequeñas oscilaciones*.

Es conveniente reemplazar la coordenada  $q$  por otra en la que el mínimo  $q_0$  del potencial esté situado en la coordenada 0 (por ejemplo reemplazando  $q \rightarrow q - q_0$ ). A partir de ahora supondremos tal elección 'centrada en el punto de equilibrio' de la coordenada  $q$ , en la que el punto crítico  $q_0$  está situado en  $q = 0$ .

La descripción de los movimientos en las cercanías de este punto se obtiene *linealizando* en torno a  $q = 0$ . Para el Lagrangiano ello se consigue:

a) reemplazando la función  $\mu(q)$  por su valor en  $q = 0$ , es decir  $\mu(q) \rightarrow \mu(0)$

b) reemplazando el potencial  $V(q)$  por el término *cuadrático* en  $q$  del desarrollo de  $V(q)$  en serie de potencias alrededor de  $q = 0$ , esto es  $V(q) \rightarrow \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dq^2} \Big|_0 q^2$ .

Es fácil justificar físicamente estas dos sustituciones. Para el potencial (supuesto que depende de  $q$  de manera continua y con suficientes derivadas continuas), si consideramos su expresión en las cercanías de  $q = 0$ , dada por el desarrollo de Taylor en torno ese punto, el término de orden 0 es una constante irrelevante, y el de orden 1 se anula ya que el origen es un punto crítico. Así en las cercanías de  $q = 0$  el primer término relevante es la parte *cuadrática* del potencial, que suponemos no nula, y como  $V$  tiene un mínimo en  $q = 0$ , la constante  $V''(0)$  es positiva, con lo que tras la linealización lo que queda del potencial del sistema es *exactamente* un potencial de oscilador armónico.

- COMENTARIO 0.2. Excepcionalmente, podría ocurrir que el potencial tuviera un mínimo en  $q = 0$  pero que  $V''(0) = 0$ , lo que ocurre por ejemplo si  $V(q) = q^4$ . Estos casos excepcionales no quedan descritos por la teoría que exponemos ahora, que presuponen el caso genérico de mínimo, con  $V''(0) > 0$
- COMENTARIO 0.3. ¿Porqué es irrelevante el término constante en el desarrollo de Taylor del potencial? Físicamente, los potenciales en Mecánica clásica no tienen significado absoluto; solo sus diferencias tienen ese significado. Matemáticamente, está claro que en un cambio  $V(q) \rightarrow V(q) + C$  el término aditivo  $-C$  que aparece en el lagrangiano es la derivada con respecto al tiempo de la función  $-Ct$  y por tanto este término es de tipo gauge en el lagrangiano y puede omitirse.

Para la parte cinética, el valor de la función  $\mu(q)$  en  $q = 0$  es no nulo; si desarrolláramos en serie de Taylor en torno a ese punto, el primer término relevante es precisamente el valor  $\mu(0)$ . Por ello parece razonable aproximar la función  $\mu(q)$  por su valor en  $q = 0$ .

- COMENTARIO 0.4. Como argumento complementario, debe mencionarse que la técnica de linealización de sistemas dinámicos —no discutida aquí— conduce exactamente a esta prescripción para linealizar un sistema lagrangiano. Los siguientes ejercicios presuponen el conocimiento de esta técnica.
- EJERCICIO 0.2. [Solo si se conocen los rudimentos de la teoría de sistemas dinámicos] Reescribiendo la ecuación del movimiento (5) como un sistema dinámico autónomo en las dos variables  $q$  y  $p := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ , y linealizando dicho sistema alrededor de un punto crítico del potencial, se pide comprobar que el sistema lagrangiano (4) tiene solamente puntos críticos de tipo *centro estable* o *silla*. En ambos casos, para la matriz  $A$  del sistema dinámico correspondiente linealizado se tiene siempre  $\text{Tr}A = 0$ , y los dos tipos posibles de puntos críticos que pueden aparecer aquí se distinguen por el signo de  $\det A$ : para un mínimo del potencial (punto crítico del sistema dinámico tipo centro estable) debe ser  $\det A > 0$  y para un máximo del potencial (punto crítico del sistema dinámico tipo silla) debe tenerse  $\det A < 0$ .

Este ejemplo sugiere que en sistemas *lagrangianos* hay menos *tipos* de puntos críticos que los que se dan en sistemas dinámicos generales; efectivamente esto es así.

- EJERCICIO 0.3. [Solo si se conocen los rudimentos de la teoría de sistemas dinámicos] Comprobar que el proceso usual de linealización descrito al estudiar los sistemas dinámicos conduce realmente a la prescripción dada para linealizar un sistema lagrangiano de un grado de libertad. Se trata de escribir la ecuación (5) como un sistema dinámico, como se ha propuesto en el ejercicio anterior. Si ahora se desarrollan  $\mu(q)$  y  $V(q)$  en serie de potencias de  $q$  alrededor de  $q = 0$ , puede comprobarse que la linealización usual de este sistema dinámico corresponde a conservar sólo el término *constante*  $\mu(0)$  en  $\mu(q)$  y el término *cuadrático*  $\frac{1}{2}V''(0)q^2$  en  $V(q)$ .

Así pues, el *lagrangiano linealizado*, denotado por un subíndice 0, es:

$$L_0 = T_0 - V_0 = \frac{1}{2}\mu(0)\dot{q}^2 - \frac{1}{2}V''(0)q^2, \quad (7)$$

que corresponde a energía cinética  $T_0 = \frac{1}{2}\mu(0)\dot{q}^2$  y a energía potencial  $V_0 = \frac{1}{2}V''(0)q^2$ . Este lagrangiano muestra una remarcable simetría entre la coordenada  $q$  y la velocidad  $\dot{q}$  y la ecuación del movimiento que se obtiene de él es:

$$\mu(0)\ddot{q} = -V''(0)q, \quad (8)$$

donde ahora los coeficientes son ya constantes y por tanto permiten la integración explícita, obteniéndose como solución *general* (¡compruebase!)

$$q(t) = a \cos(\omega t + \phi), \quad \omega = \sqrt{V''(0)/\mu(0)}, \quad (9)$$

Esa solución tiene una dependencia *armónica* del tiempo, con *frecuencia*  $\omega$  y como vemos es totalmente análoga a la del oscilador armónico presentado al principio. La cantidad bajo el radicando es siempre *positiva* ya que el punto estable es un mínimo del potencial, donde  $V''(0) > 0$ , y por otro lado  $\mu(0) > 0$ .

El resultado es que en las cercanías de cualquier punto de equilibrio estable de un sistema mecánico (un mínimo de  $V$ , cuya posición se toma como origen de coordenadas), el potencial puede aproximarse por una función *cuadrática* de la coordenada. Por ello *cualitativamente los movimientos en las cercanías de un punto de equilibrio estable se aproximan por movimientos de un oscilador*.

La solución general (9) depende de *dos* constantes arbitrarias: la amplitud  $a$  del movimiento, y la fase  $\phi$  en el instante inicial  $t = 0$ . Esto es lo esperable, ya que la evolución de un sistema mecánico requiere el conocimiento de *dos* datos iniciales por cada grado de libertad (p. ej. posición y velocidad inicial).

Es interesante observar que la expresión (9) es solución *exacta* del sistema linealizado (8), pero con respecto al sistema original (5) solamente es solución aproximada; la aproximación es tanto mejor cuanto menor sea la amplitud de las oscilaciones.

Realmente lo que se ha obtenido es el llamado *principio de isocronismo* de las pequeñas oscilaciones, cuya primera formulación se remonta a Galileo.

- COMENTARIO 0.5. Según una historia muy repetida, un joven Galileo con diecisiete años, estudiante de Medicina en Pisa, se distrajo durante la misa en la catedral de Pisa, observando el movimiento de una lámpara pendiente del techo de la iglesia por una larga cadena. Estimando con su propio pulso el tiempo que invertía la lámpara en ejecutar una oscilación completa, Galileo comprobó, para su sorpresa, que el tiempo invertido era el mismo cuando la amplitud de la oscilación era grande que cuando se estaba ya deteniendo y la amplitud de la oscilación era casi imperceptible. Sea esa historia literalmente cierta o no, lo que está claro es que el joven Galileo era un hombre de recursos. Una referencia reciente sobre esa archirepetida historia: Roger G. Newton en *Galileo's Pendulum*, Harvard University Press 2004.

**Principio de isocronismo de las pequeñas oscilaciones.** Para un sistema mecánico con un grado de libertad descrito por el lagrangiano (4) y con ecuaciones de movimiento (5), siempre que la trayectoria que el sistema efectúa sea una curva suave, el período  $T$  de las oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio estable (digamos con coordenada  $q_0$ ) se aproxima al valor límite  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ , donde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{V''(q_0)}{\mu(q_0)}}$  cuando la amplitud de las oscilaciones decrece.

- COMENTARIO 0.6. Este principio presupone que la trayectoria de las pequeñas oscilaciones sea una curva suave. Si no lo es, el principio no es aplicable. Veremos luego un ejemplo.

Hay un punto interesante que conviene apreciar: la frecuencia  $\omega_0$  está determinada *de manera única y completa* por el problema, y su valor no depende (no *puede* depender!) de la elección de una coordenada particular en el cálculo. Si en vez de  $q$  usáramos cualquier otra coordenada aceptable  $\tilde{q}$ , con  $\frac{d\tilde{q}}{dq} \neq 0$ , entonces la frecuencia calculada usando  $\tilde{q}(q)$ , dada por  $\sqrt{\frac{\tilde{V}''(\tilde{q}_0)}{\tilde{\mu}(\tilde{q}_0)}}$  resulta ser igual a  $\sqrt{\frac{V''(q_0)}{\mu(q_0)}} = \omega_0$ .

- EJERCICIO 0.4. Comprobar que efectivamente la expresión (9) de la frecuencia de las pequeñas oscilaciones resulta independiente de qué coordenada  $q$  se use para describir el movimiento. Para ello basta ver que se verifica la igualdad  $\frac{V''(q_0)}{\mu(q_0)} = \frac{\tilde{V}''(\tilde{q}_0)}{\tilde{\mu}(\tilde{q}_0)}$  donde se usan notaciones obvias (con  $\tilde{\phantom{x}}$  se denotan las cantidades expresadas en función de la nueva coordenada  $\tilde{q}$ ). Ayuda: la relación entre las diferentes cantidades proviene de la *igualdad* de las energías cinética o potencial cuando se expresan en términos de  $q$  y de  $\tilde{q}$ .

Siempre puede aprovecharse esta libertad en la elección de coordenada para simplificar algo los cálculos escogiendo una *coordenada normal*, que en este caso unidimensional es simplemente aquella que hace  $\mu(q_0) = 1$ .

- EJERCICIO 0.5. Se trata de comprobar en un ejemplo concreto que el cálculo de la frecuencia realizado con diferentes coordenadas proporciona el mismo resultado; de paso se introduce en un ejemplo muy sencillo la coordenada *normal*. En el péndulo simple de masa  $m$  y longitud  $l$ , situado en el campo gravitatorio terrestre con aceleración de la gravedad  $g$ , la coordenada más natural es el *ángulo* que forma el péndulo con la vertical,  $\theta$ , que se anula en la posición de equilibrio estable  $\theta_0 = 0$ . La expresión para la frecuencia de las pequeñas oscilaciones es, por supuesto, la conocida expresión de Física General  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$ .

Usando como coordenada  $\eta = \sqrt{ml^2}\theta$ , se pide expresar la energía cinética y potencial del péndulo en términos de  $\eta$ , calcular en términos de esta nueva coordenada  $\eta$  la frecuencia de pequeñas oscilaciones y comprobar que se obtiene, como debía ocurrir, el mismo resultado para omega (en la nueva coordenada el punto de equilibrio estable del péndulo es  $\eta_0 = 0$ .)

- COMENTARIO 0.7. **Un ejemplo de pequeñas oscilaciones sin isocronismo.** No es un truco: si la trayectoria de pequeñas oscilaciones no es suave en el punto de equilibrio (lo que puede ocurrir si la trayectoria tiene un punto singular), entonces los argumentos anteriores no son aplicables y *puede* ocurrir que la frecuencia de las pequeñas oscilaciones dependa de la amplitud de manera esencial incluso para amplitudes pequeñas. Este ejemplo está tomado de *Rock or roll: Non isochronous small oscillations (an example)*, J. M. Lévy-Leblond, Am. J. Phys. 46, 106-107, (1978).

El sistema es una versión extrema del juguete llamado *tentetieso*: Un aro de alambre circular de radio  $R$  y masa despreciable tiene rígidamente unida en un punto de su periferia una masa  $m$  y manteniéndose en un plano vertical rueda sin deslizar sobre una línea base horizontal, en el campo gravitatorio terrestre. La trayectoria de la masa  $m$  es una cicloide, que tiene una *cúspide* en el equilibrio, que es cuando la masa está en la base.

En las situaciones cuya trayectoria es una curva suave sin puntos singulares que hemos estudiado antes, debe esperarse que el periodo dependa de la amplitud  $a$  como  $T(a) = T_0 + O(a^2)$  con  $T_0 \neq 0$ ; esto es lo que realmente ocurre en el péndulo simple. Pero en el ejemplo del *tentetieso* la trayectoria es singular en el punto de equilibrio, y la situación es diferente. El período de las pequeñas oscilaciones resulta depender de la amplitud de la oscilación  $a$  (medida en éste problema por el ángulo que el radio de la masa forma con la vertical en el punto de máxima separación del equilibrio), como

$$T(a) = 4\sqrt{\frac{R}{g}} a + O(a^3) \quad (10)$$

¿Habeis oído alguna vez este fenómeno? [Recuerdo que la notación  $O(a^2)$  se refiere a 'términos que dependen de  $a$  como  $a^2$  o potencias mayores']

## 2. Pequeñas oscilaciones en sistemas lagrangianos de varios grados de libertad

### Dos péndulos acoplados: el ejemplo paradigmático de pequeñas oscilaciones

- EJERCICIO 0.6. Estudiar el siguiente sistema de dos grados de libertad: dos péndulos simples, de longitud  $l$  y masa  $m$ , cada uno descrito por el ángulo que forman sus posiciones instantáneas  $\theta_1, \theta_2$  con la vertical, se mueven en el mismo plano. Las dos masas están unidas por un muelle de resorte cuya energía potencial es mínima para  $\theta_1 = \theta_2$ , y cuyo término cuadrático puede escribirse  $\frac{1}{2}K(\theta_2 - \theta_1)^2$ .

Se pide escribir las ecuaciones del movimiento como un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas en las dos variables  $\theta_1, \theta_2$ . Después se deberán buscar los posibles movimientos en los que *las dos coordenadas* tengan una dependencia armónica con el tiempo, ambas con la misma frecuencia (que serán los modos normales). Solamente son posibles tales movimientos para *dos frecuencias particulares* que deberán encontrarse; para cada una de ellas se pide determinar el movimiento más general con dicha frecuencia.

A continuación deberá estudiarse la evolución que sigue el sistema partiendo de una condición inicial con ambos péndulos en reposo pero solo uno de ellos, el 'primero', desplazado de su posición de equilibrio. Comprobar que la evolución determinada por esta condición inicial presenta (para acoplo débil) el fenómeno de las 'pulsaciones': el movimiento 'se desliza' periódicamente del primer péndulo al segundo, y vuelve al primero, con una frecuencia que deberá determinarse.

Finalmente, se pide encontrar unas coordenadas (ayuda: resultan ser simplemente ciertas combinaciones lineales de  $\theta_1, \theta_2$ ) que desacoplen el sistema de ecuaciones diferenciales, y en términos de las cuales el movimiento general se puede describir sin dificultad. Comprobar que cada modo normal corresponde a una evolución en la que sólo una de estas coordenadas normales varía.

Vamos a discutir ahora el caso de pequeñas oscilaciones en un sistema mecánico lagrangiano con *cualquier* número  $s$  de grados de libertad. El estado del sistema se describe por los valores instantáneos de  $s$  coordenadas generalizadas, que colectivamente denotamos  $q \equiv (q^1, q^2, \dots, q^s)$ . La energía cinética de tal sistema es una forma cuadrática en las velocidades, con coeficientes  $\mu_{ik}(q)$  que pueden depender de las coordenadas  $q^j$ ,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \mu_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k, \quad (11)$$

donde la matriz  $\mu_{ik}(q)$  es *simétrica*, y como la energía cinética es definida positiva, la matriz  $\mu_{ik}(q)$  también debe ser una matriz *definida positiva* (Recuerdo que para una matriz  $A$ , ser definida positiva significa que la contracción  $\sum_{i,k} A_{ik} v^i v^k$  sea positiva para cualquier vector  $v^i$  no nulo). En cuanto a la energía potencial, está descrita por una cierta función de las  $s$  coordenadas  $q$ ,

$$V = V(q^1, q^2, \dots, q^s) \equiv V(q), \quad (12)$$

que tiene un *mínimo* en el punto alrededor del cual vamos a estudiar las pequeñas oscilaciones; supondremos escogidas las coordenadas de manera que la posición del mínimo corresponda a  $(q^1, q^2, \dots, q^s) = (0, 0, \dots, 0)$ .

El lagrangiano *exacto* de este sistema es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s \mu_{ik}(q) \dot{q}^i \dot{q}^k - V(q), \quad (13)$$

cuyas ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen sin gran dificultad (¡hágase!):

$$\sum_{k=1}^s \mu_{ik}(q) \ddot{q}^k + \sum_{i,j=1}^s \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu_{lj}}{\partial q^i} + \frac{\partial \mu_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial q^l} \right) \dot{q}^i \dot{q}^j + \frac{\partial V}{\partial q^i} = 0 \quad (14)$$

- EJERCICIO 0.7. Sugiero comprobar que realmente las ecuaciones anteriores son las de Lagrange del lagrangiano exacto (13) empleando la notación de índices tensoriales y omitiendo los signos explícitos de suma que sin embargo estoy manteniendo en el texto principal; es un buen ejercicio en el renombrado de índices mudos. El resultado es una expresión que el *connoisseur* reconocerá de inmediato; de hecho lagrangianos del mismo tipo que el de este problema aparecen en muchos otros campos de la física, como en la física del estado sólido, la teoría de fuerzas nucleares y la teoría de cuerdas; en esos contextos, estos modelos se conocen genéricamente como *modelos sigma*.

Observemos que estas ecuaciones son análogas a las (5) pero con un nivel adicional de complicación ya que ahora se trata de un *sistema de ecuaciones acopladas, con un total de  $s$  funciones incógnitas*. Cuando hay un solo grado de libertad, es claro que la ecuación (14) se reduce, como debe, a la (5).

- EJERCICIO 0.8. Comprobar ésta última afirmación.
- COMENTARIO 0.8. Es muy frecuente encontrar las ecuaciones de movimiento de las pequeñas oscilaciones en una forma alternativa que por supuesto es equivalente. Si en la derivación de las ecuaciones (14) tenemos en cuenta que la matriz  $\mu_{ik}$  es simétrica, las ecuaciones pueden escribirse como

$$\sum_{k=1}^s \mu_{ik}(q) \ddot{q}^k + \sum_{k,l=1}^s \frac{\partial \mu_{ik}}{\partial q^l} \dot{q}^l \dot{q}^k = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^s \frac{\partial \mu_{jk}}{\partial q^i} \dot{q}^j \dot{q}^k - \frac{\partial V}{\partial q^i}. \quad (15)$$

que es la forma en la que aparecen en muchos textos.

- COMENTARIO 0.9. Avanzado, trabájelo solo si le dice algo Recordemos que bajo un cambio general de coordenadas, las  $s$  ecuaciones de Lagrange se comportan, colectivamente, como un covector. De hecho tenemos esas  $s$  ecuaciones en (14), etiquetadas por el único índice libre  $l$ ; los restantes índices  $i, j, k$  que intervienen son mudos y adoptando el convenio de sumación, cosa que hacemos en lo sucesivo de este comentario, podríamos haber evitado escribir los signos de suma respectivos.

La pregunta es: ¿se lee directamente el carácter de covector en la ecuación (14)? El término  $\frac{\partial V}{\partial q^l}$  es un covector, lo que está sugerido por la presencia del índice inferior  $l$ .

Pero, atención, el término  $\mu_{ik}(q) \ddot{q}^k$  *no es un covector*, debido a que  $\ddot{q}^k$  no es un vector bajo cambios de coordenadas;  $\dot{q}^k$  sí que lo es, pero en la ley de transformación de  $\ddot{q}^k$  al cambiar de coordenadas aparece un término extra que proviene de las derivadas con respecto a las coordenadas de la matriz jacobiana, y por tanto involucra a las derivadas segundas del cambio de coordenadas. Un buen ejercicio es escribir en detalle esta ley de transformación.

Análogamente, el término  $\Gamma_{lij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ , en donde

$$\Gamma_{lij} \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mu_{lj}}{\partial q^i} + \frac{\partial \mu_{il}}{\partial q^j} - \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial q^l} \right)$$

tampoco es un covector. Para comprobarlo, se parte de que  $\mu_{ik}$  es un tensor dos veces covariante, ya que al contraer con el tensor dos veces contravariante  $\dot{q}^i \dot{q}^k$  resulta (el doble de) la energía cinética,

que es un escalar independiente de las coordenadas. Sabiendo la ley de transformación de  $\mu_{ik}$  como un tensor simétrico, dos veces covariante, es un simple ejercicio de cálculo —usando la notación de índices tensoriales— encontrar la ley de transformación del objeto  $\Gamma_{lij}$ , y de ella la de la contracción  $\Gamma_{lij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ . Lo que resulta es que este objeto *tampoco se transforma como un covector*, como podría sugerir al lector poco avisado la posición de su índice libre  $l$ ; resulta que su ley de transformación tiene un término adicional al (único) que tendría si fuera un covector y ese término adicional involucra a las derivadas segundas del cambio de coordenadas.

El milagro es ahora que si en vez de considerar separadamente los términos  $\mu_{ik}(q)\ddot{q}^k$  y  $\Gamma_{lij}\dot{q}^i\dot{q}^j$  consideramos *su suma*, entonces los términos que involucran las derivadas segundas de las coordenadas se cancelan, y lo que queda es que  $\mu_{ik}(q)\ddot{q}^k + \Gamma_{lij}\dot{q}^i\dot{q}^j$  se comporta como un covector bajo cambios de coordenadas, como debía ser.

Si este ejercicio se compara con el análogo que se refería al caso de un grado de libertad, en el que no se usaba la notación de índices tensoriales, las enormes ventajas del uso de tal notación deberán destacar.

Si se pretende estudiar sólo las pequeñas oscilaciones alrededor de una posición de equilibrio estable, situado en el punto con coordenadas  $(q^1, q^2, \dots, q^s) = (0, 0, \dots, 0)$ , deberemos *linealizar* este sistema en torno a dicho punto. El proceso es completamente similar al realizado en el caso de un grado de libertad, y consiste en sustituir en el lagrangiano:

a) Las funciones  $\mu_{ik}(q)$  por sus valores en  $(q^1, q^2, \dots, q^s) = (0, 0, \dots, 0)$ , que denotaremos por  $T_{ik} := \mu_{ik}(0)$  y que pasan a ser constantes, independientes de las coordenadas  $q$ . Esta matriz viene a jugar el papel que  $\mu(0)$  tenía en el caso de un grado de libertad.

b) El potencial  $V(q^1, q^2, \dots, q^s)$  por la parte *cuadrática* en las  $q^i$  de su desarrollo en serie de potencias alrededor de  $(q^1, q^2, \dots, q^s) = (0, 0, \dots, 0)$ , esto es, por  $\frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s V_{ik} q^i q^k$ , donde las constantes  $V_{ik}$  denotan los valores de las *segundas derivadas* del potencial con respecto a las coordenadas  $q^i$  y  $q^k$  evaluadas en el punto de equilibrio,  $V_{ik} := \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q^k \partial q^i} \right|_{q=0}$ . Evidentemente estas constantes juegan el papel que tenía la derivada segunda  $V''(0)$  en el caso de un grado de libertad. Insisto en que este es el primer término relevante para el potencial en las cercanías del punto de equilibrio: el término constante es irrelevante, y los términos lineales se anulan al tener como coeficientes las derivadas primeras del potencial, que en un punto de equilibrio (aquí un mínimo) son nulas.

Se llega así al lagrangiano linealizado en el régimen de pequeñas oscilaciones:

$$L_0 := \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^s T_{ik} \dot{q}^i \dot{q}^k - \sum_{i,k=1}^s V_{ik} q^i q^k \quad (16)$$

cuya dependencia muy simétrica en velocidades y coordenadas es llamativa. De ese lagrangiano se obtienen como ecuaciones de Euler-Lagrange las *ecuaciones de pequeñas oscilaciones* que describen, en la aproximación lineal, el movimiento alrededor del mínimo del potencial:

$$\sum_{k=1}^s T_{ik} \ddot{q}^k = - \sum_{k=1}^s V_{ik} q^k \quad i = 1, 2, \dots, s. \quad (17)$$

• EJERCICIO 0.9. Comprobar

Estas ecuaciones son semejantes (en  $s$  grados de libertad) a la ecuación correspondiente para el caso de un solo grado de libertad. Aquí hay  $s$  coordenadas, que podemos imaginar agrupadas en una única matriz columna, y toda la información sobre el sistema que se necesita para describir (aproximadamente) el movimiento en las cercanías del punto estable está contenida en los coeficientes  $T_{ik}, V_{ik}$  que constituyen dos matrices cuadradas de orden  $s$ , que vamos a denotar  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{V}$ . Ambas matrices son *simétricas* y *definidas positivas*. Para  $\mathbf{T}$  este carácter se deriva de la simetría de la matriz  $\mu_{ik}(0)$  y del carácter *positivo* de la energía cinética para cualquier velocidad. Para  $\mathbf{V}$  la simetría viene del teorema de Schwarz sobre la conmutatividad de las derivadas parciales, y el carácter definido positivo traduce el hecho de que el punto de equilibrio escogido es un *mínimo* del potencial.

- COMENTARIO 0.10. Si se relaja ligeramente la exigencia de que en el punto de equilibrio el potencial sea un mínimo estricto, pero seguimos excluyendo que sea un máximo, entonces la matriz  $\mathbf{V}$  es solo lo que se conoce como semidefinida positiva, también llamada no negativa. Estos puntos se llaman a veces puntos bañera, por motivos evidentes. (Recuerdo que para una matriz  $\mathbf{B}$ , ser semidefinida positiva significa que la contracción  $\sum_{i,k} B_{ik} v^i v^k$  sea no negativa para cualquier vector  $v^i$  no nulo; para ciertos vectores la contracción  $\sum_{i,k} B_{ik} v^i v^k$  puede ser nula, lo que estaría excluido si  $\mathbf{B}$  fuera definida positiva).

Con la notación matricial:

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \\ \vdots \\ q^s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1s} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{s1} & T_{s2} & \dots & T_{ss} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} & \dots & V_{1s} \\ V_{21} & V_{22} & \dots & V_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{s1} & V_{s2} & \dots & V_{ss} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

las ecuaciones (17) se escriben como

$$\mathbf{T} \ddot{\mathbf{Q}} = -\mathbf{V} \mathbf{Q}. \quad (19)$$

Estas ecuaciones constituyen un sistema *lineal* de  $s$  ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden; por ello una solución general deberá incluir  $2s$  constantes arbitrarias, que corresponden a los valores iniciales, arbitrarios, de las  $s$  posiciones  $\mathbf{Q}(0)$  y de las  $s$  velocidades  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$ .

Es posible encontrar la *solución general* a estas ecuaciones de manera relativamente sencilla. Vamos a comenzar buscando soluciones particulares.

### 2.1. Búsqueda de soluciones particulares: los modos normales

Comencemos por investigar si existen soluciones en las que *todas* las coordenadas ( $q^1, q^2, \dots, q^s$ ) tengan una dependencia temporal armónica *con la misma frecuencia*  $\omega$ . Es decir, lo que nos preguntamos es: ¿existen movimientos del sistema de  $s$  grados de libertad que puedan calificarse de armónicos, en los cuales el movimiento sea una 'oscilación con cierta frecuencia'  $\omega$ ?

De otro modo: ¿existe alguna solución de las ecuaciones (17) que sea del tipo:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ \vdots \\ q^s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1 \cos(\omega t + \phi_1) \\ a^2 \cos(\omega t + \phi_2) \\ \vdots \\ a^s \cos(\omega t + \phi_s) \end{pmatrix} \quad (20)$$

en la que *todas* las coordenadas efectuen un movimiento armónico con la misma frecuencia, cada coordenada  $q^j$  individualmente con ciertos valores de amplitud  $a^j$  y fase inicial  $\phi_j$ ?

Para comprobar si se trata realmente de una solución basta derivar dos veces con respecto al tiempo:

$$\ddot{\mathbf{Q}}(t) = \begin{pmatrix} \ddot{q}^1(t) \\ \ddot{q}^2(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}^s(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^1(-\omega^2) \cos(\omega t + \phi_1) \\ a^2(-\omega^2) \cos(\omega t + \phi_2) \\ \vdots \\ a^s(-\omega^2) \cos(\omega t + \phi_s) \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ \vdots \\ q^s(t) \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{Q}(t) \quad (21)$$

y sustituir lo que se obtiene en la ecuación (17), que se reduce a:

$$-\omega^2 \mathbf{T} \mathbf{Q}(t) = -\mathbf{V} \mathbf{Q}(t). \quad (22)$$

Por lo tanto, el candidato (20) es solución si y sólo si en cualquier instante  $t$ , la matriz columna  $\mathbf{Q}(t)$  satisface la ecuación

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) \mathbf{Q}(t) = 0. \quad (23)$$

Para cada valor de  $t$ , éste es un sistema de ecuaciones lineales. Es bien sabido que un tal sistema tiene solución no trivial para  $\mathbf{Q}(t)$  (no trivial significa, solución en la que  $\mathbf{Q}(t) \neq \mathbf{0}$ ) si y sólo si se verifica la condición

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0. \quad (24)$$

Esta ecuación, que es un polinomio de grado  $s$  en la variable  $\omega^2$  se denomina *ecuación característica* del par de matrices  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{T}$  y los valores de las frecuencias  $\omega$  para las cuales se satisface la ecuación anterior son las posibles frecuencias del sistema. La conclusión obtenida es:

Un sistema de varios grados de libertad en régimen de pequeñas oscilaciones alrededor de un punto de equilibrio estable *puede* efectuar movimientos que tengan dependencia armónica de frecuencia  $\omega$  con el tiempo *sólo para ciertas frecuencias*, llamadas *frecuencias características*, *frecuencias propias* o *frecuencias normales* del sistema. Los cuadrados  $\omega^2$  de estas frecuencias posibles son las *raíces* en  $\lambda$  de la ecuación  $\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = 0$ .

Esta ecuación es un polinomio en  $\lambda$ , de grado  $s$  y coeficientes reales, del cual el teorema fundamental del álgebra asegura que si cada raíz se cuenta con su multiplicidad existen exactamente  $s$  raíces. Para un polinomio general de coeficientes reales podría haber raíces complejas (en cuyo caso vendrían necesariamente por pares de raíces complejas mutuamente conjugadas). Pero el polinomio  $\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T})$ , además de ser de coeficientes reales, proviene de dos matrices  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{V}$  que no son matrices genéricas, sino que tienen una propiedad adicional especial: ser simétricas y definidas positivas. En estas condiciones se verifica el siguiente resultado (demostración en cualquier texto de álgebra lineal; más adelante indicamos otra demostración):

Si las dos matrices  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{V}$  son *simétricas* y *definidas positivas*, entonces las  $s$  raíces en  $\lambda$  de la ecuación  $\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = 0$  son todas *reales y positivas*.

- COMENTARIO 0.11. En el problema que estamos presentando no se considera la posibilidad de que  $\mathbf{V}$  sea *semidefinida positiva*. Conviene conocer la versión del resultado anterior que correspondería en tal caso: Si la matriz  $\mathbf{T}$  es *simétrica* y *definida positiva*, y la matriz  $\mathbf{V}$  es *simétrica* y *semidefinida positiva*, entonces las  $s$  raíces en  $\lambda$  de la ecuación  $\det(\mathbf{V} - \lambda \mathbf{T}) = 0$  son todas *reales y no negativas*. En este caso puede haber raíces nulas.

Volviendo al caso de que  $\mathbf{V}$  sea *definida positiva*, vamos a denotar  $\lambda_{(\alpha)}$  a estas raíces, donde el índice  $(\alpha) = 1, 2, \dots, s$  distingue las  $s$  posibles frecuencias normales; este índice se escribe entre paréntesis para destacar que juega un papel diferente a los índices  $i = 1, 2, \dots, s$  que etiquetan los grados de libertad. Ambos tipos de índice pueden tomar en total  $s$  valores  $1, 2, \dots, s$ , debido a que si las raíces múltiples se cuentan adecuadamente con su multiplicidad, hay tantas raíces del polinomio característico como orden del polinomio característico, que a su vez es precisamente el número  $s$  de grados de libertad.

Aún no hemos acabado. Hasta ahora lo único que hemos hecho es seleccionar los valores  $\omega$  para los cuales la ecuación

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) \mathbf{Q}(t) = 0. \quad (25)$$

admite una solución no nula para la matriz columna  $\mathbf{Q}(t)$ . Pero además esa matriz debe satisfacer la ecuación. Veamos a donde nos conduce esta exigencia.

Para discutir este asunto resulta aconsejable utilizar una *notación compleja*, igual que se hace en electromagnetismo. La idea básica es que cada expresión  $a^j \cos(\omega t + \phi_j)$  puede verse como la parte *real*  $\Re(c^j e^{i\omega t})$  del número complejo  $c^j e^{i\omega t}$  donde  $c^j$  debe leerse como una *amplitud compleja*, que engloba como módulo a la amplitud ordinaria  $a^j$  y como argumento a la fase en el instante inicial. Como toda la teoría aquí desarrollada es *lineal*, entonces pueden escribirse todas las ecuaciones en términos de las amplitudes complejas. Denotando como  $\mathbf{C}$  la matriz columna formada por los  $s$  coeficientes (eventualmente

complejos)  $c^j$ , la función de prueba (20) se escribe:

$$\mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} q^1(t) \\ q^2(t) \\ \vdots \\ q^s(t) \end{pmatrix} = \Re \begin{pmatrix} c^1 e^{i\omega t} \\ c^2 e^{i\omega t} \\ \vdots \\ c^s e^{i\omega t} \end{pmatrix} = \Re \{ e^{i\omega t} \mathbf{C} \} \quad \text{con} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ \vdots \\ c^s \end{pmatrix} \quad (26)$$

y sustituyendo en (19), ecuación en la que todos los elementos de las matrices  $\mathbf{V}, \mathbf{T}$  que intervienen son números reales, el factor  $e^{i\omega t}$  de evolución temporal desaparece y queda una única ecuación en la que ya no interviene el tiempo:

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) \mathbf{C} = 0, \quad (27)$$

Así pues hemos obtenido:

Las funciones  $q^j(t) = \Re(c^j e^{i\omega t})$  son solución de las ecuaciones de movimiento de las pequeñas oscilaciones si y sólo si la frecuencia  $\omega$  y las constantes complejas  $c^j$  (agrupadas en la matriz columna  $\mathbf{C}$ ) satisfacen las ecuaciones (23) y (27) que repetimos ahora:

$$\det(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) = 0, \quad (\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) \mathbf{C} = 0. \quad (28)$$

La incógnita en la primera de éstas ecuaciones es *exclusivamente* la frecuencia  $\omega$ . Sólo cuando  $\omega$  satisface esa ecuación, es decir, cuando  $\omega = \omega_{(\alpha)}$  es una de las frecuencias características, la segunda ecuación admite solución no trivial para  $\mathbf{C}$ , que se debe obtener resolviendo el sistema de ecuaciones lineales

$$(\mathbf{V} - \omega_{(\alpha)}^2 \mathbf{T}) \mathbf{C} = 0 \quad (29)$$

En resumen, restringiendo la búsqueda a aquellos movimientos que tengan carácter armónico, *con una sola frecuencia para todas las coordenadas*, hemos ya encontrado *ciertas* soluciones de las ecuaciones del movimiento:

$$\mathbf{Q}(t) = \Re \{ e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C} \} \quad (30)$$

donde  $\omega_{(\alpha)}^2$  es raíz de (24) y  $\mathbf{C}$  satisface (29). Tal solución se denomina *modo normal* de oscilación. A su frecuencia se la denomina *frecuencia normal*, y el vector  $\mathbf{C}$  determina, de la manera que veremos enseguida, la *'forma' del modo normal*.

- COMENTARIO 0.12. Para el caso de un grado de libertad, (27) se reduce a  $(V_{11} - \omega^2 T_{11})C = 0$  que desde luego solamente admite soluciones no triviales ( $C \neq 0$ ) si  $V_{11} - \omega^2 T_{11} = 0$ . La única frecuencia posible debe satisfacer  $\omega^2 = V_{11}/T_{11}$  y  $\omega$  está dada por  $\omega = \sqrt{V_{11}/T_{11}} = \sqrt{V''(0)/\mu(0)}$ .

Siguiendo en el caso de  $s$  grados de libertad, un resultado auxiliar, que puede encontrarse en cualquier texto de álgebra lineal al estudiar la diagonalización de matrices reales simétricas, garantiza que:

Para cada frecuencia característica  $\omega_{(\alpha)}$ , la ecuación (29) admite tantas soluciones linealmente independientes para  $\mathbf{C}$  como multiplicidad  $m$  tiene  $\omega_{(\alpha)}^2$  como raíz de la ecuación característica (24).

Esto significa que siempre, independientemente de que las  $s$  frecuencias normales sean diferentes entre sí (raíces simples del polinomio característico) o pueda haber raíces múltiples, existen en total  $s$  modos normales descritos por  $s$  vectores forma  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  linealmente independientes, cada uno de los cuales está asociado a una frecuencia normal (que, éstas sí, pueden coincidir).

- COMENTARIO 0.13. Conviene conocer un resultado que aparece en la literatura como fórmula o cociente de Rayleigh. La ecuación que determina los vectores forma  $\mathbf{C}$  asociados a un modo normal de frecuencia  $\omega$  pueden escribirse, haciendo aparecer las componentes  $c^i$  del vector  $\mathbf{C}$  como

$$\omega^2 \sum_k T_{ik} c^k = \sum_k V_{ik} c^k \quad (31)$$

Si multiplicamos por  $c^i$  y sumamos en  $i$ , resulta  $\omega^2 \sum_{i,k} T_{ik} c^i c^k = \sum_{i,k} V_{ik} c^i c^k$ . Pero  $\sum_{i,k} T_{ik} c^i c^k$  y  $\sum_{i,k} V_{ik} c^i c^k$  son cantidades escalares. Se denomina fórmula o cociente de Rayleigh a la expresión siguiente que permite recuperar la frecuencia  $\omega$  del modo normal a partir de su vector de forma:

$$\omega^2 = \frac{\sum_{i,k} V_{ik} c^i c^k}{\sum_{i,k} T_{ik} c^i c^k} \quad (32)$$

Esta fórmula está en la base de los llamados métodos variacionales para encontrar los autovalores de energía en Mecánica Cuántica: resulta que si en esa fórmula insertamos no el vector forma exacto de un cierto modo, sino solo un vector que se le aproxime en orden  $O(\epsilon)$ , entonces el  $\omega^2$  que arroja la fórmula resulta ser una aproximación comparativamente mejor mucho (en orden  $O(\epsilon^2)$ ) al valor real exacto de  $\omega^2$  que corresponde a ese modo.

- COMENTARIO 0.14. En las condiciones supuestas ( $T, V$  son *simétricas* y *definidas positivas*), entonces tanto el numerador como el denominador en la fórmula de Rayleigh son positivos, lo que nos proporciona otra demostración de que todos los valores  $\omega^2 \equiv \lambda$  que pueden aparecer en los cocientes de Rayleigh de los diferentes modos son positivos, un resultado que mencionamos antes sin dar su demostración.
- COMENTARIO 0.15. Si se relaja la exigencia de que en el punto de equilibrio el potencial sea un mínimo estricto, pero no se permiten máximos, entonces la matriz  $V$  es solo semidefinida positiva, y en este caso algunos autovalores  $\omega^2$  pueden ser nulos (Un ejemplo muy claro es el movimiento de una partícula en una bañera infinitamente larga, cuyo perfil es una parábola y que tiene como línea de fondos una línea horizontal). Los modos correspondientes a esos autovalores se llaman modos cero. Para ellos las soluciones para las funciones coordenadas no son funciones trigonométricas de  $\omega t$ , sino funciones lineales afines de  $t$ . Frecuentemente, los modos cero corresponden a alguna simetría del sistema (como en el ejemplo de la bañera) y pueden hacerse desaparecer agrupando adecuadamente las coordenadas de manera que algunas coordenadas se separen describiendo exclusivamente los movimientos correspondientes a esos modos.
- COMENTARIO 0.16. Para un sistema lagrangiano como el que estamos discutiendo, el caso de que haya raíces múltiples para las frecuencias normales resulta ser, como hemos visto, muy análogo al caso no degenerado en el que las  $s$  frecuencias son distintas (lo que puede tomarse como un indicio de que los sistemas lagrangianos son muy especiales y bastante más sencillos que los sistemas dinámicos generales).

## 2.2. Solución general en el caso no degenerado: superposición de modos normales

Vamos a discutir primero el caso *genérico* de que las  $s$  frecuencias características sean todas *diferentes*. En este caso, para cada  $(\alpha)$  la frecuencia  $\omega_{(\alpha)}$  aparece sólo en el modo  $(\alpha)$ , y la ecuación (29) admite para  $C$  una solución que, salvo un factor complejo no nulo, está *únicamente determinada*. A partir de ahora vamos a llamar vector *forma del modo*  $(\alpha)$  a un vector particular  $C_{(\alpha)}$  que sea solución de la ecuación (27) para la frecuencia  $\omega_{(\alpha)}$ , de manera que la solución *general*  $C$  de esta ecuación sea simplemente cualquier vector no nulo proporcional a  $C_{(\alpha)}$

$$C = z_{(\alpha)} C_{(\alpha)}, \quad (33)$$

donde  $z_{(\alpha)}$  es un número complejo no nulo.

- COMENTARIO 0.17. Por si hubiera alguna duda. En estas notas, y para evitar posibles malentendidos, no estoy usando el convenio de suma sobre los índices de las coordenadas que aparezcan repetidos en posiciones 'superior' e 'inferior' (contra vs. co) en el mismo monomio. Puede verse que en todas las expresiones en las que hay una suma sobre los índices  $i, j, \dots$ , la he escrito con los signos de sumación pertinentes explícitos (véase por ejemplo (17) o (14)) pero la suma siempre afecta a un índice repetido en posiciones 'contra' y 'co'. Por otra parte, los *índices de modo* los he denotado, de manera totalmente deliberada, con un símbolo  $(\alpha)$  en el que encerrando el índice entre paréntesis se evita su confusión con los índices de las coordenadas. La naturaleza de éstos índices de modo es totalmente diferente, y no deben verse como índices tensoriales; simplemente sirven de identificadores de los diferentes modos. En resumen y a lo que iba: para los índices de modo la posición inferior o superior en la que se coloque el índice  $(\alpha)$  *no tendría ningún significado ni relevancia* por lo que están todos colcados como subíndices; y desde luego no debe pensarse que en la expresión anterior (33) haya una suma en  $(\alpha)$  implicada por la eventual repetición de  $(\alpha)$ ; no la hay.

Los vectores forma  $C_{(\alpha)}$  de los diferentes modos cuyas frecuencias son todas diferentes  $(\alpha) = 1, 2, \dots, s$ , satisfacen las propiedades siguientes:

1- Los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  asociados a modos  $(\alpha)$  diferentes son linealmente independientes.

2- Siempre es posible escoger estos vectores de manera que todas las componentes de la matriz columna  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  sean *reales*.

3- Los vectores forma  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  y  $\mathbf{C}_{(\beta)}$  correspondientes a dos frecuencias normales diferentes son necesariamente *ortogonales* relativamente al ‘producto escalar’ definido en el espacio  $\mathbb{R}^s$  por la energía cinética:  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \rightarrow \sum_{i,k=1}^s T_{ik} v^i w^k$ .

Observese la analogía de estos resultados con los que se suponen conocidos para el problema ordinario de valores propios de una sola matriz simétrica. Esto justifica el que a veces se llame a  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  ‘vector propio’ del par de matrices  $\mathbf{T}, \mathbf{V}$  asociado al ‘valor propio’  $\omega_{(\alpha)}^2$ . La analogía se debe a que siempre podemos escoger coordenadas en las que  $\mathbf{T}$  sea la matriz identidad; entonces el problema que se discute es realmente el de valores y vectores propios de la matriz  $\mathbf{V}$ .

La propiedad de ortogonalidad ordinaria de los vectores propios de una matriz simétrica asociados a valores propios diferentes (que debe suponerse conocida) reaparece ahora, aunque ligeramente modificada por la matriz  $\mathbf{T}$ : para dos vectores forma (‘propios’) de dos modos diferentes se traduce en la condición  $(\mathbf{C}_{(\alpha)})^T \mathbf{T} \mathbf{C}_{(\beta)} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ , que puede interpretarse como *ser ortogonales con el ‘producto escalar’ determinado por la ‘métrica de la energía cinética’*  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{T} \mathbf{w}$ . En general no se supone ni exige que estos vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  estén normalizados (para el producto escalar anterior que es aquí el relevante), aunque tampoco hay nada que impida escoger esa familia de vectores de manera que formen no solo una base ortogonal del espacio sino una base ortonormal. En este último caso la condición que deben satisfacer es  $(\mathbf{C}_{(\alpha)})^T \mathbf{T} \mathbf{C}_{(\beta)} = \delta_{\alpha\beta}$ .

Así pues, en este caso para una frecuencia propia  $\omega_{(\alpha)}$ , el modo propio correspondiente más general es:

$$\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t) = \Re \{ z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C}_{(\alpha)} \} \quad (34)$$

donde el número complejo  $z_{(\alpha)} = a_{(\alpha)} e^{i\phi_{(\alpha)}}$  debe entenderse como la amplitud compleja del movimiento  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t)$  relativa a la elección previa del vector *forma del modo*  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ . Suponiendo que el vector forma del modo  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  se ha escogido real, y observando que  $a_{(\alpha)}$  es una constante real positiva, la expresión anterior queda como:

$$\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t) = \Re \{ a_{(\alpha)} e^{i(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)})} \mathbf{C}_{(\alpha)} \} = a_{(\alpha)} \cos(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) \mathbf{C}_{(\alpha)} \quad (35)$$

de manera que *en el modo propio*  $(\alpha)$  dado por (34), cada una de las coordenadas  $q^j$  efectúa un movimiento armónico cuya amplitud es el módulo de la componente  $j$ -ésima del vector  $a_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$ ; en cualquier instante las fases de las coordenadas  $q^j$  son bien iguales, bien opuestas (según el elemento  $j$ -ésimo del vector  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  sea positivo o negativo).

Conviene insistir en que en un modo normal todas las coordenadas oscilan a la misma frecuencia  $\omega_{(\alpha)}$ . Por tanto, el modo normal (no degenerado)  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t)$  depende *sólo* de dos parámetros libres, que una vez escogidos unos  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  concretos vienen parametrizados por la ‘amplitud’ compleja  $z_{(\alpha)}$ : su módulo  $a_{(\alpha)}$  que físicamente corresponde a la ‘amplitud del modo’ y su fase  $\phi_{(\alpha)}$ . Los demás ingredientes del modo normal están *rígidamente* determinados: la frecuencia debe ser una de las frecuencias características o normales, y para cada frecuencia normal  $\omega_{(\alpha)}$ , el vector *forma del modo*  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  se ha seleccionado previamente entre las soluciones de (29) con la exigencia conveniente de que todas sus componentes sean reales.

- COMENTARIO 0.18. Por supuesto, aunque no impongamos ninguna condición (como por ejemplo la de tener todas sus componentes reales), cualquier solución de (29) sirve como  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ . Como dos posibles elecciones de  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  simplemente difieren en un factor complejo no nulo, el mismo movimiento  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t)$  resultaría descrito mediante el nuevo  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  con una nueva ‘amplitud del modo’  $z_{(\alpha)}$  que difiere de la antigua por el inverso del factor, de manera que el producto  $z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$  no cambie.

Los productos  $z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$  contienen información sobre la posición y la velocidad iniciales en el modo normal  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}$ . En efecto, derivando con respecto a  $t$  en (34):

$$\dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(t) = \Re \{ z_{(\alpha)} i\omega_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C}_{(\alpha)} \}, \quad (36)$$

que junto con (34) evaluadas en  $t = 0$  dan

$$\mathbf{Q}_{(\alpha)}(0) = \Re \{ z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)} \}, \quad \dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(0) = -\omega_{(\alpha)} \Im \{ z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)} \}, \quad (37)$$

(aquí  $\Re\{z\}$ ,  $\Im\{z\}$  denotan la parte real e imaginaria del complejo  $z$ ) de donde se obtiene la relación entre la ‘amplitud’  $z_{(\alpha)}$  y los datos iniciales usuales (posición y velocidad) cuando el movimiento está descrito por el modo normal  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t)$ :

$$z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)} = \mathbf{Q}_{(\alpha)}(0) - \frac{i}{\omega_{(\alpha)}} \dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(0). \quad (38)$$

Esta ecuación muestra que las condiciones iniciales  $\mathbf{Q}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$  que garantizan que la evolución seguirá un modo normal, o como se dice en la jerga, que *excitan* un modo normal, son *muy especiales*. De hecho, si queremos que la evolución que resulta partiendo de las condiciones iniciales  $\mathbf{Q}(0)$ ,  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$  sea una evolución armónica con una de las frecuencias propias  $\omega_{(\alpha)}$ , entonces la combinación  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(0) - \frac{i}{\omega_{(\alpha)}} \dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(0)$  *tiene que ser proporcional al vector forma del modo*  $(\alpha)$ .

Por ejemplo, si consideramos como condición inicial “partir del punto de coordenadas dadas  $\mathbf{Q}(0)$  con velocidad inicial *nula* en cada una de las coordenadas,  $\dot{\mathbf{Q}}(0) = \mathbf{0}$ ”, vemos que el movimiento que resulta de esas condiciones iniciales en general no será ningún modo normal; la evolución será la del modo  $(\alpha)$  solamente si el vector  $\mathbf{Q}(0)$  de las posiciones iniciales es *proporcional* a  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ . Este hecho justifica la denominación del vector  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  como *forma del modo*: sus componentes son proporcionales a las desviaciones, respecto a sus posiciones de equilibrio, que las  $s$  coordenadas  $q^j$  deben tener para que el sistema, *liberado en reposo* a partir de dicha configuración, evolucione según ese modo normal.

Análogamente, si tomamos como condición inicial “partir del punto de equilibrio en el mínimo del potencial,  $\mathbf{Q}(0) = \mathbf{0}$ , con velocidades iniciales dadas por  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$ ”, entonces el movimiento sigue el modo normal  $(\alpha)$  si y sólo si el vector  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$  de las velocidades iniciales es *proporcional* a  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ , lo que suministra otra interpretación alternativa del vector forma del modo: si se lanza el sistema desde su posición de equilibrio, con velocidad en cada coordenada  $q^j$  proporcional a la componente  $j$ -ésima del vector  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ , entonces el sistema evoluciona precisamente según el modo normal  $(\alpha)$ .

Estos dos resultados particulares relativos a la interpretación del vector forma del modo ofrecen otra demostración indirecta del hecho de que los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  siempre pueden escogerse de manera que todas sus componentes sean reales (ya que las componentes de los vectores  $\mathbf{Q}(0)$  o  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$  lo son).

En general, la condición inicial que garantiza que la evolución sigue el modo normal  $(\alpha)$  es que la combinación  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(0) - \frac{i}{\omega_{(\alpha)}} \dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(0)$  sea *proporcional* a  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ , donde ahora el factor de proporcionalidad será en general complejo.

Recapitulando, en un modo normal no degenerado la variación temporal de las coordenadas  $q^j$ , colectivamente, es muy semejante a la familiar del oscilador armónico. Si los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  se escogen con todas sus componentes reales, entonces descomponiendo la amplitud compleja en módulo y fase el movimiento es:

$$\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t) = \Re \{ z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \} \mathbf{C}_{(\alpha)} = a_{(\alpha)} \cos(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) \mathbf{C}_{(\alpha)} \quad (39)$$

y la velocidad es:

$$\dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(t) = -\omega_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \sin(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) \mathbf{C}_{(\alpha)}, \quad (40)$$

donde se ve que en ciertos instantes (cuando  $\sin(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) = 0$  lo que ocurre dos veces por período) el movimiento alcanza su elongación máxima,  $\mathbf{Q}_{\max} = \pm a_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$ , momento en el que *todas* las velocidades se anulan, mientras que en los instantes que corresponden a  $\cos(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) = 0$ , todas las velocidades alcanzan sus valores extremos  $\dot{\mathbf{Q}}_{\max} =$

$\mp \omega_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$ , al tiempo que *todas* las posiciones se anulan, esto es, el movimiento atraviesa el punto de equilibrio con velocidad máxima, en perfecta analogía con el ejemplo del oscilador armónico.

Podemos resumir la interpretación del vector forma del modo diciendo que, en el modo normal no degenerado ( $\alpha$ ), el vector  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  es proporcional:

- al vector que describe las posiciones en el instante en que (todas) las velocidades se anulan.
- al vector que describe las velocidades de las coordenadas en el instante en que el movimiento pasa con velocidad máxima por el mínimo del potencial, esto es, cuando (todas) las coordenadas se anulan.
- a la combinación de vectores posición y velocidad  $\mathbf{Q}_{(\alpha)}(t) - \frac{i}{\omega_{(\alpha)}} \dot{\mathbf{Q}}_{(\alpha)}(t)$  en cualquier instante  $t$ .

### 2.3. La solución general en el caso no degenerado

Ahora viene la magia de la linealidad. Hemos encontrado ya  $s$  soluciones *particulares* del problema del movimiento, los  $s$  modos normales. Cada modo normal (no degenerado) depende de 2 constantes arbitrarias y hay  $s$  de ellos. Como las ecuaciones del movimiento son *lineales*, cualquier combinación lineal de tales soluciones es también solución. Así pues, el movimiento obtenido superponiendo  $s$  modos normales, dado por

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{(\alpha)=1, \dots, s} \Re \{ z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C}_{(\alpha)} \}, \quad (41)$$

es *también* una solución de las ecuaciones del movimiento que depende de  $2s$  constantes arbitrarias, contenidas en los  $s$  números complejos  $z_{(\alpha)}$ .

Nótese que a diferencia de un modo normal, el movimiento (41) *no es en general periódico*, pues su evolución temporal contiene términos de *varias* frecuencias distintas. Este tipo de evolución se conoce como *multiperiódica*.

- COMENTARIO 0.19. Podría ocurrir que todas las frecuencias que intervienen en (41) sean a su vez múltiplos enteros de una sola frecuencia (que no tiene por qué coincidir con ninguna de las  $\omega_{(\alpha)}$ ), lo que solo ocurre si todas las frecuencias  $\omega_{(\alpha)}$  son *commensurables*. En ese caso, excepcionalmente, el movimiento será periódico, pero la frecuencia del movimiento no será ninguna de las frecuencias propias, sino su máximo común divisor.

Si suponemos que los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  se han escogido *reales*, entonces puede escribirse la solución general y su derivada con respecto al tiempo como:

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \cos(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) \mathbf{C}_{(\alpha)}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(t) = - \sum_{(\alpha)} \omega_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \sin(\omega_{(\alpha)} t + \phi_{(\alpha)}) \mathbf{C}_{(\alpha)}. \quad (42)$$

y en consecuencia los valores iniciales en  $t = 0$  de las posiciones y velocidades en esta superposición de modos normales es:

$$\mathbf{Q}(0) = \sum_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \cos \phi_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(0) = - \sum_{(\alpha)} \omega_{(\alpha)} a_{(\alpha)} \sin \phi_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)} \quad (43)$$

Como esta solución depende de  $2s$  constantes, que es el número de condiciones iniciales necesarias para especificar una solución de un sistema lineal de  $s$  ecuaciones diferenciales de segundo orden, se concluye que ésta es la *solución general* del problema.

- EJERCICIO 0.10. Comprobar que para cualquier condición inicial  $\mathbf{Q}(0), \dot{\mathbf{Q}}(0)$  dada arbitrariamente ( $2s$  cantidades en total), las ecuaciones (43) admiten solución (única) para las  $2s$  cantidades  $a_{(\alpha)}, \phi_{(\alpha)}$ . Así se comprueba que realmente (41) es la solución general.

Para ello conviene empezar observando que por ser los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  linealmente independientes, forman necesariamente una base del espacio  $\mathbb{R}^s$ , y los dos vectores  $\mathbf{Q}(0), \dot{\mathbf{Q}}(0)$  pueden descomponerse en términos de la base  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ ,  $(\alpha) = 1, 2, \dots, s$ :

$$\mathbf{Q}(0) = \sum_{(\beta)} x_{(\beta)} \mathbf{C}_{(\beta)}, \quad \dot{\mathbf{Q}}(0) = \sum_{(\beta)} v_{(\beta)} \mathbf{C}_{(\beta)} \quad (44)$$

donde los coeficientes  $x_{(\alpha)}, v_{(\alpha)}$  pueden calcularse multiplicando escalarmente las igualdades anteriores por  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  (producto escalar con matriz  $\mathbf{T}$ ) y usando la ortogonalidad de los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ :

$$x_{(\alpha)} = \frac{(\mathbf{C}_{(\alpha)}, \mathbf{Q}(0))}{(\mathbf{C}_{(\alpha)}, \mathbf{C}_{(\alpha)})}, \quad v_{(\alpha)} = \frac{(\mathbf{C}_{(\alpha)}, \dot{\mathbf{Q}}(0))}{(\mathbf{C}_{(\alpha)}, \mathbf{C}_{(\alpha)})}, \quad \text{donde } (\mathbf{v}, \mathbf{w}) := \sum_{i,k=1}^s T_{ik} v^i w^k = \mathbf{v}^T \mathbf{T} \mathbf{w} \quad (45)$$

De la comparación de los coeficientes de tales desarrollos con (43) se encuentran las expresiones buscadas para  $a_{(\alpha)}, \phi_{(\alpha)}$ , que son  $a_{(\alpha)} = \sqrt{x_{(\alpha)}^2 + (v_{(\alpha)}/\omega_{(\alpha)})^2}$  y  $\tan \phi_{(\alpha)} = -\frac{v_{(\alpha)}}{\omega_{(\alpha)} x_{(\alpha)}}$ .

Así pues, en el caso más general, los modos normales que unas condiciones iniciales arbitrarias  $\mathbf{Q}(0), \dot{\mathbf{Q}}(0)$  excitan son los que aparecen en el desarrollo de alguno de los dos vectores  $\mathbf{Q}(0), \dot{\mathbf{Q}}(0)$  en la base  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ . Ya se ha discutido antes cómo deben ser las condiciones iniciales que exciten un sólo modo. Para las demás circunstancias, el movimiento involucra *varios* modos normales (tantos como vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  intervengan realmente al expresar  $\mathbf{Q}(0)$  y  $\dot{\mathbf{Q}}(0)$  como combinación lineal de los  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ ). Una condición inicial arbitraria excita (genéricamente) todos los modos normales. Solo condiciones iniciales cada vez más específicas consiguen excitar menos modos, hasta el caso muy especial discutido antes en el que, al ser la posición inicial y la velocidad inicial proporcional a un  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ , se excita sólo el modo  $(\alpha)$  y el movimiento es simplemente periódico con la frecuencia  $\omega_{(\alpha)}$ ; en los demás casos es multiperódico, con  $2, 3, \dots, s$  frecuencias, aunque si se da la circunstancia de que todas estas frecuencias sean conmensurables, el movimiento final podría resultar ser periódico con una frecuencia que será el máximo común divisor de todas las frecuencias conmensurables  $\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \dots, \omega_{(s)}$ .

#### 2.4. La solución general del caso degenerado

¿Qué ocurre cuando la ecuación característica tiene raíces múltiples? Como vamos a ver, para los sistemas lagrangianos que estamos estudiando el caso “degenerado” en el que hay frecuencias normales múltiples es *esencialmente semejante* al caso no degenerado en el que las  $s$  frecuencias son diferentes. Vamos sólo a comentar lo que ocurre en el caso degenerado, en paralelo con la discusión previa, señalando especialmente las diferencias (relativamente menores) entre ambos casos.

- COMENTARIO 0.20. Conviene señalar que en los *sistemas dinámicos generales* (que no estudiaremos aquí) la situación en el caso de que la ecuación característica de la matriz del sistema tenga raíces múltiples *puede ser bastante diferente* a lo que ocurre en el caso no degenerado.

Seguiremos denotando a las  $s$  frecuencias características como  $\omega_{(\alpha)}$ , donde el índice  $(\alpha) = 1, 2, \dots, s$ ; lo que es nuevo es que ahora algunas de estas frecuencias *pueden* coincidir. Para concretar, supongamos que las frecuencias  $\omega_{(1)} = \omega_{(2)} = \dots = \omega_{(m)}$  son iguales entre sí; en este caso la frecuencia  $\omega = \omega_{(1)} = \omega_{(2)} = \dots = \omega_{(m)}$  tiene una multiplicidad  $m$ .

- COMENTARIO 0.21. Si hay más frecuencias repetidas las agruparemos de manera semejante; las multiplicidades deben satisfacer evidentemente  $m_1 + m_2 + \dots = s$ , y el caso no degenerado corresponde a  $m_1 = m_2 = \dots = 1$ .

Para esa frecuencia normal  $\omega$  que tenga multiplicidad  $m$  como raíz de la ecuación característica, entonces las soluciones para  $\mathbf{C}$  de la ecuación

$$(\mathbf{V} - \omega^2 \mathbf{T}) \mathbf{C} = 0 \quad (46)$$

(que en el caso no degenerado formaban un subespacio unidimensional), determinan ahora un subespacio de dimensión  $m$  del espacio  $\mathbb{C}^s$  o  $\mathbb{R}^s$ . Dentro de este subespacio es posible escoger exactamente  $m$  vectores,  $\mathbf{C}_{(1)}, \mathbf{C}_{(2)}, \dots, \mathbf{C}_{(m)}$  necesariamente diferentes (todos ellos están asociados a la misma frecuencia  $\omega = \omega_{(1)} = \omega_{(2)} = \dots = \omega_{(m)}$ ) en (46) de manera que:

- 1- La solución general de la ecuación (46) es  $\mathbf{C} = \sum_{(\alpha)=1}^m z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$  donde intervienen como coeficientes  $m$  números complejos  $z_{(\alpha)} = a_{(\alpha)} e^{i\phi_{(\alpha)}}$
- 2- Los vectores  $\mathbf{C}_{(1)}, \mathbf{C}_{(2)}, \dots, \mathbf{C}_{(m)}$  son linealmente independientes.
- 3- Todas las componentes de los vectores columna  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  sean *reales*.

4- Las  $m$  soluciones  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  así escogidas (correspondientes a la frecuencia característica  $\omega_{(\alpha)}$  que es  $m$ -veces degenerada) son *ortogonales* entre sí relativamente al producto escalar definido en el espacio  $\mathbb{R}^s$  por la energía cinética.

5- Cualquier vector  $\mathbf{C}_{(\beta)}$  correspondiente a otro modo con frecuencia distinta (posiblemente también degenerada) es ortogonal (relativamente al mismo producto escalar), a los  $m$  vectores  $\mathbf{C}_{(1)}, \mathbf{C}_{(2)}, \dots, \mathbf{C}_{(m)}$ .

En este caso cualquier vector en el subespacio solución de (46) es una combinación lineal de los  $m$  vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  con  $m$  coeficientes arbitrarios  $z_{(\alpha)}$ , y por tanto cualquier vector en este subespacio aparece como ‘vector propio’ del par de matrices  $\mathbf{T}, \mathbf{V}$  asociados al ‘valor propio’  $m$  veces degenerado  $\omega$ . Insistimos en que en este caso la elección de un juego de  $m$  vectores mutuamente ortogonales  $\mathbf{C}_{(1)}, \mathbf{C}_{(2)}, \dots, \mathbf{C}_{(m)}$  tiene mucha más libertad que en el caso no degenerado (en el cual la única libertad era de un factor no nulo para el único vector).

El modo normal más general de frecuencia  $\omega = \omega_{(1)} = \omega_{(2)} = \dots = \omega_{(m)}$  es ahora:

$$\mathbf{Q}_{\omega}(t) = \Re \left\{ \sum_{(\alpha)=1}^m z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C}_{(\alpha)} \right\} = \Re \left\{ e^{i\omega t} \sum_{(\alpha)=1}^m z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)} \right\} \quad (47)$$

y depende de  $2m$  parámetros reales, contenidos en las  $m$  cantidades complejas  $z_{(\alpha)}$ ,  $(\alpha) = 1, 2, \dots, m$ .

- **COMENTARIO 0.22.** En términos de una colección concreta de vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ ,  $(\alpha) = 1, 2, \dots, m$ , entonces cada modo normal de esta frecuencia degenerada se describe por los coeficientes  $z_{(\alpha)}$ ,  $(\alpha) = 1, 2, \dots, m$ . Si ahora se modifica la elección de los  $m$  vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  sustituyéndoles por otra base (ortogonal) del subespacio propio correspondiente a la frecuencia  $\omega$ , entonces en la misma solución  $\mathbf{Q}_{\omega}(t)$  las correspondientes amplitudes  $z_{(\alpha)}$  aparecen sustituidas por otras, de manera que la combinación  $\mathbf{C} = \sum_{(\alpha)=1}^m z_{(\alpha)} \mathbf{C}_{(\alpha)}$  no cambie.

Una vez visto esto, debe resultar claro que también en el caso de frecuencias múltiples, la forma de la solución general de las ecuaciones de pequeñas oscilaciones está dada por una expresión análoga a la anterior, pero en la que se suma sobre todos los modos normales, asociados a frecuencias simples o múltiples:

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{(\alpha)=1, \dots, s} \Re \left\{ z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C}_{(\alpha)} \right\} \quad (48)$$

que depende de  $2s$  constantes arbitrarias, contenidas en los  $s$  números complejos  $z_{(\alpha)}$ . Formalmente la expresión es la *misma* que en el caso no degenerado, y la única diferencia es que en la suma habrá grupos de frecuencias iguales; para cada uno de estos grupos los diferentes vectores individuales  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  pueden escogerse dentro de un subespacio de dimensión  $m$  con la condición de ser mutuamente ortogonales entre sí con la métrica del producto escalar; esos vectores ya no son únicos salvo un factor y todos ellos intervienen en la expresión general (48) asociados a la misma frecuencia. Todos los demás comentarios realizados para el caso no degenerado se extienden de manera semejante.

- **EJERCICIO 0.11.** Estudiar las pequeñas oscilaciones de algún sistema en tres grados de libertad que tenga una frecuencia doble en detalle suficiente para comprobar cómo funciona la parafernalia del caso degenerado (frecuencias múltiples, ‘vectores propios’ no únicamente determinados, etc).

Un ejemplo sencillo es el *péndulo trifilar*: una plataforma con forma de triángulo equilátero (de lado  $d$  con cierta masa  $M$  y momento de inercia  $I$  alrededor de su centro) suspendida simétricamente (en el campo gravitatorio terrestre, supuesto uniforme) en sus tres vértices por tres hilos, de la misma longitud  $l$  inextensibles y sin masa, de tres puntos que forman otro triángulo equilátero de lado  $f$  situado en un plano horizontal (digamos el techo). Evidentemente el mínimo del potencial corresponde a la plataforma horizontal, en reposo. De los tres modos, dos corresponden a movimientos tipo ‘péndulo simple’ en las dos direcciones  $x, y$ . El tercer modo involucra un movimiento de rotación oscilante de la plataforma alrededor del eje vertical  $z$ .

## 2.5. Coordenadas más adaptadas: coordenadas normales

### ¿Qué son las coordenadas normales?

Aunque hasta ahora hemos usado coordenadas arbitrarias, para simplificar el análisis práctico de un problema concreto resulta conveniente y muy preferible trabajar con coordenadas que satisfagan alguna propiedad adicional que facilite la discusión o los cálculos. Vamos a comentar ahora cómo pueden escogerse ciertas coordenadas especialmente adaptadas, llamadas *coordenadas normales*. En primer lugar describo el marco teórico que asegura que tales coordenadas siempre existen, y luego daré un método práctico para encontrarlas.

El análisis teórico tiene dos pasos. El primero consiste en escoger coordenadas llamadas ‘adaptadas’ en las que la matriz  $\mathbf{T}$  de la energía cinética linealizada sea la matriz identidad. En el caso del péndulo simple unidimensional el ángulo  $\theta$  no es una coordenada adaptada, mientras que la coordenada  $\eta = \sqrt{ml^2}\theta$  sí lo es. La idea es que en el paso de un sistema de coordenadas inicial arbitrario a otro más ‘adaptado’, los antiguos coeficientes  $T_{ik}$  se ‘absorban’ en las nuevas coordenadas, de manera que los nuevos  $T_{ik}$  sean la matriz identidad. Estas coordenadas adaptadas, que en la literatura a veces se llaman ‘reducidas’ simplifican algunas expresiones; por ejemplo:

- la ecuación característica es una ecuación *ordinaria* de valores propios para una sola matriz  $\mathbf{V}$ . Las frecuencias normales se determinan *directamente* como las raíces cuadradas de los autovalores de esta matriz  $\mathbf{V}$ .
- los vectores que determinan la forma de los modos normales,  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  son ortogonales para el producto escalar *canónico* ordinario en el espacio  $\mathbb{R}^s$ .

¿Cómo se llega, partiendo de coordenadas arbitrarias, a un juego de coordenadas *adaptadas* en las que la matriz  $\mathbf{T}$  sea la matriz identidad? Primero se buscan coordenadas que reduzcan la matriz  $\mathbf{T}$  a forma *diagonal*. Esto siempre es posible, ya que cualquier matriz simétrica es diagonalizable. Los autovalores de  $\mathbf{T}$ , que aparecerán en la diagonal de la nueva matriz  $\mathbf{T}$ , son todos *positivos*, ya que la matriz es definida positiva. Ahora modificando cada coordenada con un factor de escala adecuado (la raíz cuadrada de cada uno de los autovalores de  $\mathbf{T}$ ), reducimos la matriz  $\mathbf{T}$  con elementos positivos sobre la diagonal a una matriz diagonal en la que todos los elementos diagonales son iguales a 1, esto es, a la matriz identidad. Llegamos así a un sistema de coordenadas en el que la expresión de  $\mathbf{T}$  es lo más simple posible. Geométricamente, el sistema reducido corresponde a llevar la métrica determinada por la energía cinética, que es un producto escalar euclídeo definido positivo, a la forma canónica familiar, en la que la matriz del producto escalar es la identidad.

- EJERCICIO 0.12. Si en un sistema arbitrario de coordenadas  $q^j$  las matrices que describen el sistema linealizado de pequeñas oscilaciones son  $\mathbf{T}, \mathbf{V}$ , se pide ver que en cualesquiera otras coordenadas  $\tilde{q}^j$  las matrices  $\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{V}}$  se obtienen de las anteriores mediante una transformación que sólo involucra a la matriz jacobiana evaluada en el punto crítico del cambio de coordenadas  $\tilde{q}^j(q^k)$ . Por ello, para llegar a unas coordenadas reducidas o ‘adaptadas’ basta estudiar cambios de coordenadas *lineales*  $\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{A}\mathbf{Q}$  que corresponden a una transformación lineal de coordenadas, con matriz  $\mathbf{A}$ . Se pide escribir las expresiones que relacionan  $\mathbf{T}, \mathbf{V}$  con  $\tilde{\mathbf{T}}, \tilde{\mathbf{V}}$  usando la matriz  $\mathbf{A}$ . ¿‘Explica’ esa ley de transformación la posición en la que hemos escrito los índices de las matrices  $\mathbf{T}, \mathbf{V}$ ?

Aún no hemos hecho nada directamente con la matriz de  $\mathbf{V}$ , que por supuesto en las nuevas coordenadas diferirá de la inicial. Es evidente que hay infinitos sistemas de coordenadas de este tipo adaptado; entre ellos hay algunos sistemas *especialmente bien adaptados* que son los que se denominan sistemas de *coordenadas normales*. Ver cómo se llega a estas coordenadas ‘normales’ es el segundo paso.

Para llegar a coordenadas normales, comencemos con un juego de coordenadas adaptado, en el que la matriz  $\mathbf{T}$  sea ya la matriz identidad. Nótese para empezar que cualquier cambio *lineal* de coordenadas cuya matriz de cambio sea una matriz *ortogonal* mantiene la propiedad de ser adaptado y que tras un cambio lineal de este tipo la matriz  $\mathbf{T}$  sigue

siendo igual a la matriz identidad. Podemos efectuar desde las coordenadas adaptadas iniciales una transformación lineal de coordenadas dada por una matriz *ortogonal*, escogida de manera que esa transformación diagonalice la matriz  $\mathbf{V}$ . Ello siempre es posible, ya que una matriz simétrica siempre puede diagonalizarse mediante una transformación ortogonal. Tal transformación no altera la matriz  $\mathbf{T}$  que sigue siendo igual a la identidad, pero en las nuevas coordenadas la matriz  $\mathbf{V}$  tiene ya solamente elementos no nulos en la diagonal, y tales elementos son directamente sus autovalores, o lo que es lo mismo, los cuadrados de las frecuencias características.

Como las coordenadas normales están asociadas a los modos, las denotaremos por  $\eta^{(\alpha)}$ . Debe ser evidente que esas coordenadas corresponden geoméricamente a la elección en la que los ‘vectores propios’  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  forman la base canónica en el espacio  $\mathbb{R}^s$ ; en efecto, para el caso genérico de un sistema con todas las frecuencias normales distintas, las expresiones de los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  en *coordenadas normales* son:

$$\mathbf{C}_{(1)\alpha} \propto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{(2)\alpha} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad \mathbf{C}_{(s)\alpha} \propto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

de manera que en coordenadas normales cada modo normal ( $j$ ) corresponde a un movimiento en el que sólo la coordenada normal  $\eta^{(j)}$  cambia con el tiempo, mientras que en ese modo normal las demás coordenadas son idéntica y permanentemente nulas:

$$\eta^{(j)}(t) = a_{(j)} \cos(\omega_{(j)}t + \phi_{(j)}), \quad \eta^{(k)}(t) = 0 \text{ para } k \neq j \quad (50)$$

Las coordenadas normales corresponden geoméricamente a la reducción simultánea del par de matrices simétricas positivas  $\mathbf{T}, \mathbf{V}$  a una situación en la que  $\mathbf{T}$  es la matriz identidad y  $\mathbf{V}$  es una matriz diagonal. En la literatura, este fenómeno se describe como la posibilidad de diagonalización simultánea de un par de formas cuadráticas, lo que siempre es posible cuando al menos una de ellas ( $\mathbf{T}$ ) sea definida positiva.

- EJERCICIO 0.13. Supongamos que el problema abordado no hubiera sido el estudio de las pequeñas oscilaciones en las cercanías de un mínimo del potencial, sino el del estudio del movimiento en las cercanías de un *máximo* del potencial. Se pide analizar porqué, aunque todas las técnicas desarrolladas en este tema funcionan inicialmente de manera semejante, a la postre resultarían completamente inútiles a efectos de la predicción efectiva del movimiento del sistema a largo plazo.

En el caso de que existan frecuencias múltiples las coordenadas normales están menos determinadas (al igual que ocurre en ese caso con los vectores forma individuales): a cada frecuencia con multiplicidad  $m$  le corresponde un subespacio de dimensión  $m$ , y partiendo de un juego de coordenadas normales, aún es posible modificar las coordenadas manteniendo el que sean normales, siempre que los cambios efectuados sean cambios lineales dados por una submatriz ortogonal dentro de cada grupo de coordenadas normales asociados a la misma frecuencia. Claramente, esto encaja con que en el caso degenerado, los vectores  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  correspondientes aún pueden escogerse de varias maneras.

### ¿Cómo se encuentran las coordenadas normales?

Lo anterior es la descripción teórica que asegura que siempre es posible encontrar coordenadas normales. Para encontrarlas no es necesario llevar a cabo las etapas (tediosas habitualmente) de cambios sucesivos de coordenadas que reducirán  $\mathbf{T}$  a la matriz identidad y  $\mathbf{V}$  a una forma diagonal. Realmente, si en coordenadas iniciales, escogidas por la razón que sea, se ha estudiado el problema y se conocen las frecuencias propias y los vectores forma de los modos normales  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ , que deben constituir una base ortogonal del espacio  $\mathbb{R}^s$ ,  $(\mathbf{C}_{(\alpha)})^T \mathbf{T} \mathbf{C}_{(\beta)} = 0$  si  $\alpha \neq \beta$ , entonces es posible dar una ‘receta’ muy simple y de aplicación directa, que expresa las coordenadas normales del sistema,  $\eta^{(\beta)}$  en términos de las coordenadas iniciales  $q^j$ . Veámosla:

Partimos de la solución general, que en los casos no degenerado y degenerado se expresa en términos de las frecuencias normales y de un juego de vectores forma mediante una expresión que es idéntica en ambos casos

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{(\alpha)=1, \dots, s} \Re \{ z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} \mathbf{C}_{(\alpha)} \}, \quad (51)$$

(la única diferencia es que en el caso degenerado habrá frecuencias repetidas, pero lo esencial es que dos vectores forma diferentes  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$ ,  $\mathbf{C}_{(\beta)}$  son siempre ortogonales en la métrica dada por la matriz  $\mathbf{T}$  y esto es así en los casos no degenerado y degenerado). Si premultiplicamos la expresión anterior por la matriz  $(\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T}$ , resulta

$$(\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{Q}(t) = \sum_{(\alpha)=1, \dots, s} \Re \{ z_{(\alpha)} e^{i\omega_{(\alpha)} t} ((\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{C}_{(\alpha)}) \} \quad (52)$$

y como los  $\mathbf{C}_{(\alpha)}$  son mutuamente ortogonales, resulta que excepto uno, los restantes términos de la suma anterior se anulan, y solo sobrevive el término con índice de suma  $\beta$ :

$$(\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{Q}(t) = \Re \{ ((\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{C}_{(\beta)}) z_{(\beta)} e^{i\omega_{(\beta)} t} \} \quad (53)$$

Comparemos ahora esta ecuación con (51). La ecuación (51) nos estaba diciendo que en la solución general cada coordenada  $q^k(t)$  resulta ser una función multiperiodica del tiempo, en cuya evolución en general intervienen todas las frecuencias normales. En contraste, la ecuación (53) lo que nos dice es que en la misma evolución temporal, la de la solución general, la cantidad  $(\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$  tiene una dependencia con el tiempo que involucra exclusivamente a la frecuencia normal  $\omega_{(\beta)}$ . Lo que eso significa es que  $(\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{Q}$  es precisamente la coordenada normal  $\eta^{(\beta)}$ ; nótese que como debíamos esperar, cada coordenada normal es una combinación lineal de las coordenadas iniciales, y lo que la expresión recién obtenida tiene de nuevo es que nos da directamente la expresión de cada una de esas coordenadas sin necesidad de llevar a cabo el tedioso proceso de la reducción de  $\mathbf{T}$  y de  $\mathbf{V}$  a sus formas más simples (identidad y matriz diagonal, respectivamente) s

$$\eta^{(\beta)} = (\mathbf{C}_{(\beta)})^T \mathbf{T} \mathbf{Q} \quad (54)$$

Deben notarse que en el caso no degenerado las coordenadas normales tienen libertad de un factor no nulo arbitrario en cada coordenada, lo que hace innecesario normalizar los vectores forma del modo a la hora de aplicar la fórmula (54). Si hay modos degenerados, la libertad es algo mayor en cada bloque, lo que corresponde a la libertad en escoger los vectores forma dentro del subespacio correspondiente en ese caso.

- EJERCICIO 0.14. Expresar el lagrangiano de las pequeñas oscilaciones en coordenadas normales  $\eta^{(i)}$ . Encontrar las ecuaciones del movimiento que corresponden. Comprobar que las ecuaciones que se obtienen están completamente desacopladas, esto es, que en cada ecuación interviene solamente una de las coordenadas normales. Ayuda: téngase en cuenta cómo son las matrices  $\mathbf{T}$  y  $\mathbf{V}$  en coordenadas normales. ¿Encaja esto con las ecuaciones (50) que dan la evolución en cada modo normal?

### Simetría, dualidad y estabilidad

La relación entre simetría y estabilidad se conoce desde la antigüedad. El excelente libro *Simetría* de H. Weyl, contiene varios ejemplos que muestran que todas las representaciones icónicas y simbólicas de la divinidad tienen al menos simetría bilateral. En la antigüedad y en la Edad Media la divinidad ha sido siempre sinónimo de estabilidad.

En los sistemas en pequeñas oscilaciones aparece un ejemplo más profundo de simetría bilateral, que puede llamarse *dualidad* y que corresponde al papel simétrico que juegan coordenadas y velocidades. El comportamiento *estable* y oscilatorio que exhiben los sistemas gobernados por esas ecuaciones aparece en una variedad inmensa de situaciones. Aparte de la interpretación puramente mecánica, presupuesta en la redacción de las notas, en general podemos pensar que los coeficientes  $\mathbf{T}$  corresponden a la *inercia* del sistema, y los  $\mathbf{V}$  a su *elasticidad*. En un circuito eléctrico las ecuaciones que dan la evolución temporal de las corrientes y cargas son totalmente semejantes; entonces los  $T_{ik}$  son las impedancias (análogo eléctrico de la inercia) y los  $V_{ik}$  las capacidades. El significado físico de la estabilidad en tales sistemas consiste en la acumulación de energía en forma potencial (de carga en los condensadores, en el sistema eléctrico) que se libera poniendo el sistema en movimiento y pasa a ser energía cinética (corrientes eléctricas), seguido por el regreso de la energía a forma potencial.

Este patrón de comportamiento, con un balance permanente entre energía cinética y energía potencial parece ser universal en los sistemas estables: se da en los átomos, en las células (un núcleo capaz de intercambiar energía e información con el exterior), etc.

### Comentarios sobre la notación

No hay notaciones ‘perfectas’. He procurado emplear de manera consistente y lo más cuidadosa posible la notación de índices tensoriales para los objetos que tengan una ley de transformación tensorial cuando cambian las coordenadas, colocando los índices en posición superior o inferior que correspondan a las convenciones para las leyes vectorial y covectorial. Ejemplos de tensores son  $q^i$ ,  $\frac{\partial V}{\partial q^i}$ ,  $\mu_{ik}$ , y en todos estos casos he sido consistente en la escritura.

Pero hay otros objetos que aparecen en la discusión, que no son tensores y que sin embargo están especificados por uno o varios índices que distinguen sus componentes. La tradición y la conveniencia aconsejan mantener la notación usando índices colocados por una u otra razón en posiciones superior o inferior pero que no prejuzgan que se trate de tensores; en estos casos, que el lector debe conocer e identificar, se deja a su cuidado la responsabilidad de reconocer que aunque se use una escritura que parecería sugerir que esos objetos fueran tensores, realmente no lo son. Ejemplos: 1) las propias coordenadas  $q^i$  o las aceleraciones  $\ddot{q}^i$ , pese a tener un índice superior *no son vectores*; 2) los símbolos de Christoffel de primera especie  $\Gamma_{ij}$ , que hacen un cameo en el texto y que pese a escribirse como  $\Gamma_{ij}$  con tres índices inferiores, no son un tensor tres veces covariante. Nadie ha diseñado ninguna otra notación que sea tan práctica y conveniente como la de los índices tensoriales y que a la vez deje claro que algunos objetos que llevan índices, como  $q^i$ ,  $\ddot{q}^i$ ,  $\Gamma_{ij}$  no son tensores del tipo sugerido por la posición de los índices.

Para los modos el hecho de que el rango de los índices de las coordenadas y los de modos sea el mismo,  $1, 2, \dots, s$  puede oscurecer el significado de muchas expresiones si ambos roles no se distinguen adecuadamente. He pretendido que la notación reflejara lo más nítidamente posible que los índices de modo no son índices tensoriales sino simples etiquetas identificadoras de los  $s$  modos, y la notación concreta ( $\alpha$ ) utilizada para los modos no es universal pero sí es la empleada en algunos textos modernos.

Finalmente, si uno quisiera ser extremadamente cuidadoso con la nomenclatura, debería distinguirse entre frecuencia  $\nu$  de un movimiento armónico simple (cuya relación con el periodo es  $\nu = \frac{1}{T}$ , medida en ciclos por segundo) y su pulsación  $\omega$ , (cuya relación con el periodo es  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , medida en radianes por segundo). Para muchos propósitos conviene ser cuidadoso en la distinción entre  $\nu$  y  $\omega$ , pero aquí (como en la mayor parte de las exposiciones sobre esta materia) no he hecho esa distinción fina y desde el comienzo hablo de  $\omega$  como la frecuencia; téngase en cuenta.

### Problemas adicionales propuestos.

Ambos ejercicios son interesantes, especialmente el de las tres partículas iguales.

- EJERCICIO 0.15. Encontrar los modos normales (frecuencias y vectores forma) de un sistema de masas y muelles que es un modelo tosco de una molécula de dióxido de carbono, limitando el análisis a las vibraciones del sistema que ocurren en una dimensión. El sistema es una partícula central de masa  $M$  unida a otras dos iguales, de masa  $m$ , una a cada lado de la masa central, por muelles de constante elástica  $k$  y de la misma longitud propia  $l$ .
- EJERCICIO 0.16. Tres partículas idénticas de masa  $m$  están conectadas entre sí por tres muelles idénticos, de longitud  $l$  y constante elástica  $k$  y se pueden mover en el mismo plano. La posición de equilibrio es un triángulo equilátero. Usando coordenadas cartesianas para describir la configuración del sistema, se pide encontrar los modos normales (frecuencias y vectores forma) del sistema. Ayuda: El problema se podría hacer encontrando las frecuencias normales a partir de las raíces de la ecuación característica que es un polinomio de grado 6, pero sería inhumano pretender calcular a mano las raíces y hacerlo con ayuda de un ordenador no nos dice nada sobre la física subyacente. Es posible hacer una serie de 'educated guesses' que permiten llegar a los vectores forma y a las frecuencias normales con argumentos físicos, de los cuales se aprende realmente; esto es lo que debe intentarse.

### Bibliografía.

La física de las pequeñas oscilaciones es un capítulo clásico en los textos de Mecánica. Una buena exposición es la de Goldstein. El texto de Arnol'd, más avanzado, contiene un capítulo excelente con multitud de ejemplos, algunos de los cuales se discutirán en las clases prácticas. Finalmente, la *Mecánica* de Landau-Lifschitz contiene un capítulo breve pero que condensa lo esencial.

El capítulo sobre pequeñas oscilaciones del texto de *Dinámica de Lagrange* de la colección 'Schaum' no entra apenas en los aspectos más teóricos pero desde un punto de vista práctico contiene muchos ejemplos propuestos y comentados e incluso sugiere construir algún sistema y observar experimentalmente su comportamiento.

Los comentarios sobre simetría y estabilidad están tomados del estimulante (pero marginal para esta asignatura) libro de B. A. Rosenfel'd, *A History of Non-Euclidean Geometry: Evolution of the concept of a geometric space*, Springer, New-York, 1988.

### 2.6. Referencias

- Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 1980  
 Arnol'd, V.I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag 1978  
 Landau, L.D., Lifschitz, I.M., *Mecánica*, Reverté  
 Fernández Rañada, A., *Dinámica Clásica*, Alianza Universidad Textos, 133, 1990  
 Wells, D.A., *Dinámica de Lagrange*, MacGraw Hill, 1974