Notas para un Curso de Electricidad

Introducción.

El presente trabajo corresponde a una parte de las notas preparadas para un curso de Electricidad, impartido en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México.

Prof. José Jesús Mena Delgadillo.

Índice

5.1 definición de corriente eléctrica y resistencia eléctrica.

5.2 Resistencia, resistividad y conductividad.

5.3 Intercambio de energía en un circuito eléctrico.

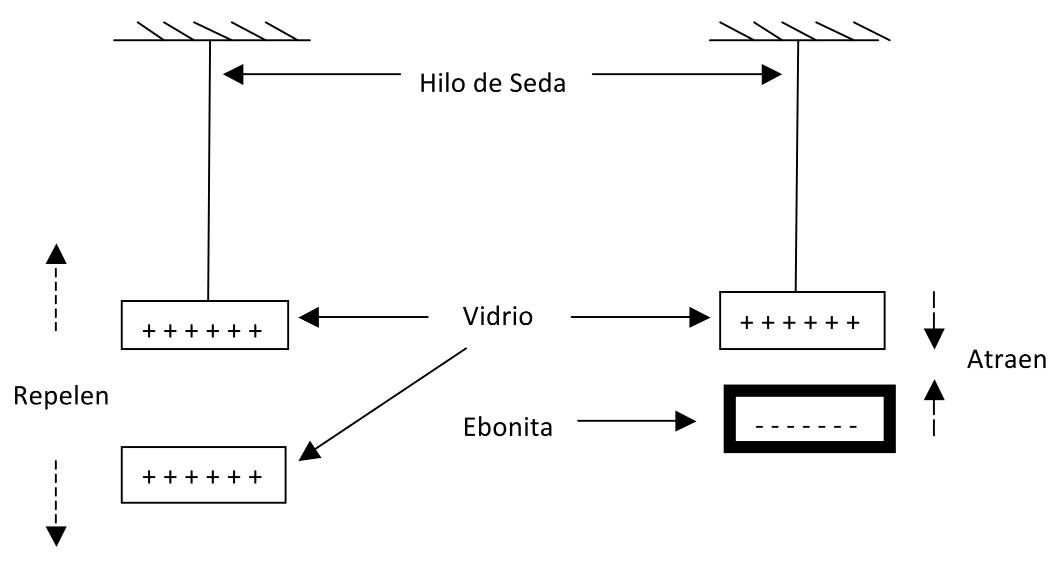
5.4 Fuerza electromotriz (fem).

Unidad 1: Carga eléctrica

1.1 Definición de Carga eléctrica.

La ciencia de la electricidad inicio con la observación desde la antigüedad: Cuando Tales de Mileto (600 AC) frotaba Piezas de ámbar que atraía pedazos de paja. El magnetismo se remonta a la observación de "piedras" que se encuentran en la Naturaleza (Región de Magnetita, Asía Menor) que atraen al Hierro.

Benjamín Franklin (1706-1790) determino la convención de polaridad (carga eléctrica inducida en una superficie por rozamiento). Dicha convección se ilustra en la figura 1.1.



La Ebonita se frota con Piel.

El vidrio se frota con seda.

Figura 1.1: Muestra formas de Electrificación.

1.2 Conservación de carga eléctrica.

Como se muestra en la Figura 1.1 Cuando se frota una Barra de vidrio con seda, aparecen en su superficie cargas eléctricas negativas, las observaciones también muestran que en el proceso de frotamiento aparece en la seda una carga negativa de igual magnitud. Este hecho hace pensar que en el proceso de frotamiento NO se crea carga eléctrica sino solamente la transporta a otro objeto alternando ligeramente la Neutralidad eléctrica de ambos.

La propiedad de Conservación de carga eléctrica se aplica en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1.1 El proceso de aniquilación de partículas, cuando un electrón con carga: - e ($e = -1.6022\ X\ 10^{-19}\ C$) y un positrón con carga + e se ubican muy cerca (toda su masa se convierte en energía por medio de la expresión: $E = m\,c^2$)

Ejemplo 1. 2

La Reacción nuclear:

$$C_a^{\ 44} + p \rightarrow S_e^{\ 44} + n$$

La suma de los números atómicos antes de la reacción: Z_a = 20 protones + 1 protón = 21 protones.

La suma de los números atómicos después de la reacción: Z_d = 21 protones + 0 protones = 21 protones.

1.3 Conductores y aislantes.

Se consideran conductores de carga eléctrica, si las cargas se pueden mover libremente en la superficie de un material, es decir. Los electrones exteriores del átomo ya no quedan unidos a otros átomos vecinos, dichos materiales son por ejemplo los metales, el cuerpo humano y la Tierra. En algunos conductores tales como los electrolitos se pueden mover tanto las cargas positivas como negativas.

En el caso de materiales aislantes (También llamados dieléctricos), los electrones no puede moverse libremente en la superficie de los materiales, se encuentran atrapados en la estructura atómica, los ejemplos de estos materiales son: El vidrio, plásticos, madera, etc.

1.4 Ley de Coulomb.

Charles A. de Coulomb (1736 – 1806). En 1785, midió por primera ocasión cuantitativamente las atracciones y repulsiones eléctricas y dedujo la ley que las rigen. El modelo esta dado por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = \frac{K\, q_1\, q_2}{r^2}\,\hat{r} \qquad (1.1)$$

Si la carga q_1 y q_2 están situadas en puntos del espacio, en donde $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ son sus correspondientes vectores de posición, entonces la relación (1) se puede expresar de la forma:

$$\vec{F} = \frac{K\, q_1\, q_2}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) \qquad (1.2)$$

En donde:

K: es llamada la constante dieléctrica, que depende su valor del medio en donde se encuentre las cargas q_1 y q_2.

r: es la distancia entre q_1 y q_2.

$\vec{F}$: es la fuerza eléctrica que actúa sobre q_1 y q_2, tendrá un valor negativo, si es de tipo atractivo y un valor positivo si es de tipo repulsivo.

La ley de Coulomb tiene la misma estructura que la ley de Gravitación Universal de Newton.

A continuación se presentan algunos ejemplos de los temas presentados:

Ejemplo 1.3

Una moneda tiene una masa de 3.1 gr. Como es eléctricamente neutra, contiene cantidades iguales de cargas eléctricas positivas y negativas. Un átomo de Cobre tiene una carga positiva de 4.6 X 10^{-19} c y una carga negativa de igual magnitud. ¿Cuál es la magnitud de Q en estas cargas en la moneda?

Solución.

El número de átomos en la moneda de cobre, está dada por la relación:

$$\frac{N}{N_o} = \frac{m}{M}$$

En donde:

N: número de átomos de cobre.

m: la masa de la moneda.

N_o: numero de Avogrado.

M: el peso molecular del cobre.

De la relación anterior para N, resulta:

$$N = \frac{m\ N_o}{M}$$

Sustituyendo, resulta:

$$N = \frac{(3.1\ gr)(6.0\ X\ 10^{23}\ \acute{a}tomos/mol)}{(64\ gr/mol)} = 2.9\ X\ 10^{22}\ \acute{a}tomos.$$

Por lo tanto Q, está dada por:

$$Q = q\ N = (4.6\ X\ 10^{-18}\ coulomb/\acute{a}tomo)\ (2.9\ X\ 10^{22}\ \acute{a}tomos) = 1.3\ X\ 10^{5}\ c$$

Ejemplo 1.4

La distancia entre un electrón y un protón en el átomo de Hidrogeno es de 5.3 X 10^{-11} m. ¿Cuál es la magnitud de la fuerza eléctrica?

Solución.

$$F_e = \frac{K\ q_e\ q_P}{r^2} = \frac{(9\ X\ 10^9\ \frac{N\ m^2}{c^2})\ (-1.6\ X\ 10^{-19}\ c)(1.6\ X\ 10^{-19}\ c)}{(5.3\ X\ 10^{-11}\ m)^2} = \frac{23.04\ X\ 10^{-29}\ N}{28.09\ X\ 10^{-22}}$$

Es decir:

$$F_e = -\ 0.82\ X\ 10^{-7}\ N$$

Es decir:

$$|F_e| = 0.82\ X\ 10^{-7}\ N$$

Ejercicios propuestos

1. Los protones de los rayos cósmicos llegan a la atmosfera superior de la Tierra a razón de 0.15 protones / cm^2 seg, promediando toda la superficie. ¿Qué cantidad total de corriente recibe la Tierra de fuera de su atmosfera en forma de protones de radiación cósmica incidente? (Considere el radio de la Tierra de 6.4 X 10^6 m).

2. Dos bolas similares de masa m se cuelgan de hilos de seda de longitud l y llevan cargas similares q como se muestra en la Figura 1.2.supongase que θ es tan pequeña que tan θ puede reemplazarse por sen θ .Haciendo esta aproximación, demostrar que:

$$x = \left(\frac{q^2\ l}{2\,\pi\,\varepsilon_o\ m\ g} \right)^{\frac{1}{3}}$$

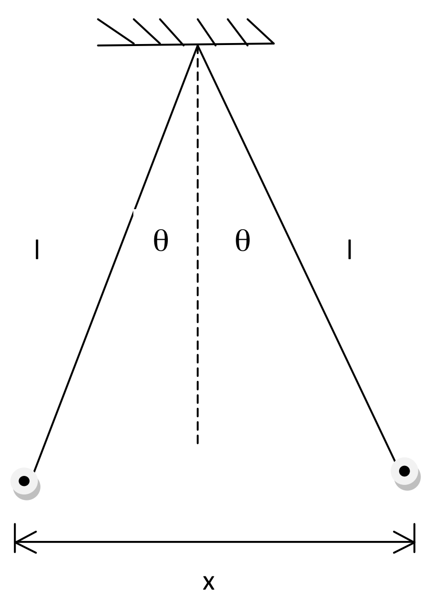


Figura 1.2 Muestra un péndulo con dos bolas de masa m y carga eléctrica q.

3 En la Figura 1.3. ¿Cuál es la fuerza eléctrica resultante sobre la carga eléctrica colocada en el vértice inferior izquierdo del cuadrado?. Considere $q = 1.0X10^{-7}$ c y a = 5.0 cm.

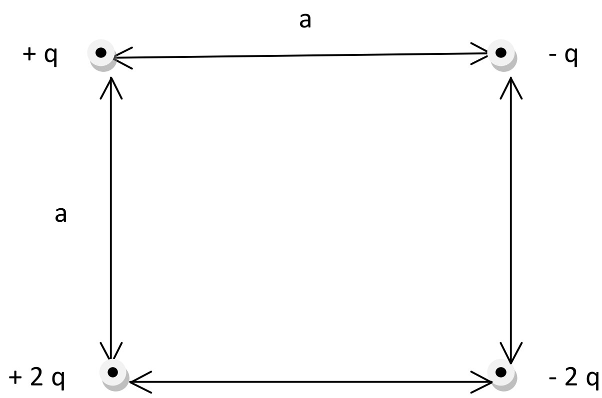


Figura 1.3 Muestra la disposición de 4 cargas eléctricas ubicadas en las aristas de un cuadado.

1.5 El principio de Superposición.

El principio de Superposición se satisface para la fuerza eléctrica total, es de la forma:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n$$

Unidad 2: Campo electroestático y Ley de Gauss

2.1 Definición de Campo eléctrico para una carga eléctrica puntual.

Una carga puntual Q produce un campo eléctrico en el espacio que lo rodea. El campo eléctrico generado por la carga Q se representa por: $\vec{E}$ .La definición operacional del Campo eléctrico se considera una carga prueba q_o (carga positiva y muy pequeña) en un punto del espacio, como se ilustra en la Figura 2.1.

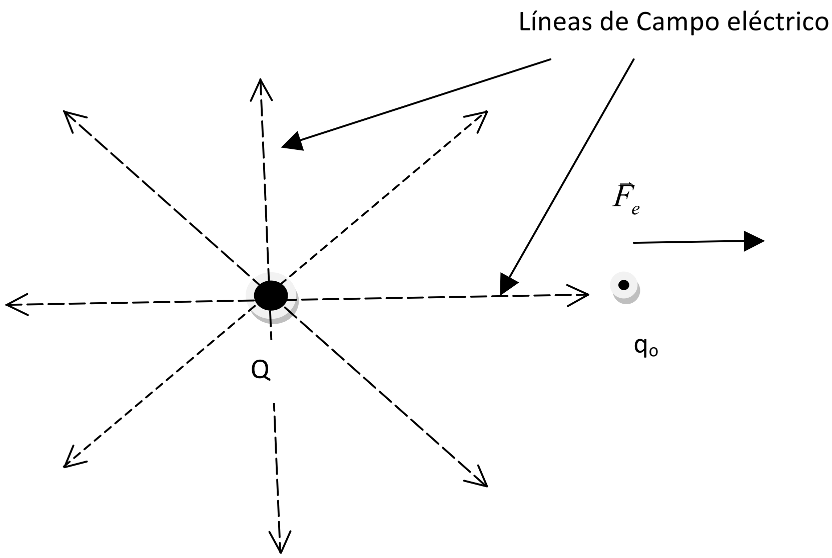


Figura 2.1. Se ilustra el efecto del Campo eléctrico $\vec{E}$ producido por la carga Q (positiva), sobre una carga prueba q_o (Observe que $\vec{E}$ tiene la misma dirección que $\vec{F}_e$)

La definición formal del Campo eléctrico debido a una carga Q, sobre una carga prueba q_o está dada por la expresión:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q_0} \qquad (2.1)$$

En donde, en el Sistema internacional las unidades de campo eléctrico es: $[E] = \frac{N}{c}$

Cuando se menciona la intensidad del Campo eléctrico, entonces se considera:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}_e|}{q_0} \qquad (2.2)$$

En el caso de que Q sea negativa se observan líneas de campo eléctrico como se ilustra en la Figura 2.2

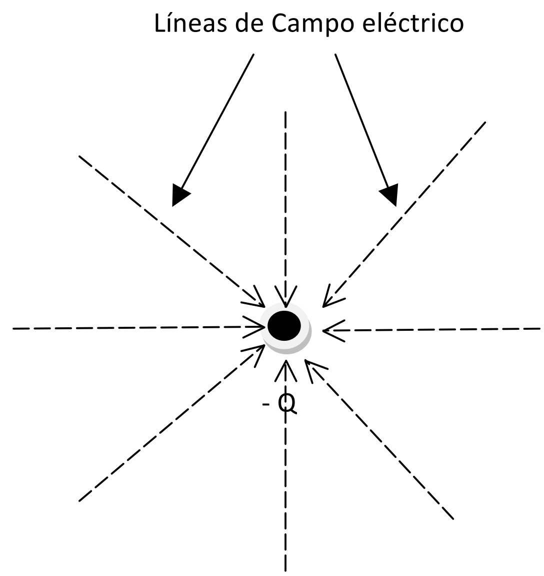


Figura 2.2. Se ilustra el Campo eléctrico $\vec{E}$ producido por la carga Q (negativa), a partir de las líneas de Campo eléctrico.

Si consideramos una carga prueba q_o, colocada a una distancia r de una carga puntual Q. La magnitud de la fuerza eléctrica que actúa sobre q_o, está dada por:

$$F_e = \frac{K\,Q\,q_o}{r^2} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{Q\,q_o}{r^2} \qquad (2.3)$$

En donde: ϵ_o se denomina la permitividad eléctrica y depende del medio en donde se encuentran las cargas eléctricas.

A partir de las expresiones (2) y (3), resulta:

$$E = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{Q}{r^2} \qquad (2.4)$$

Para encontrar la intensidad del campo eléctrico total generado por n cargas puntuales, se aplica el principio de superposición:

$$E = \sum_{i=1}^{n} E_i = E_1 + E_2 + E_3 + ... + E_n \qquad (2.5)$$

2.2 Dipolo eléctrico debido a cargas eléctricas puntuales.

Considere como se muestra en la Figura 2.3, una carga +q puntual y una carga puntual - q de igual magnitud, separadas una distancia 2a; este grupo de dos partículas se denomina: dipolo eléctrico. Aprovechando la Figura 2.3, se utilizara para calcular el Campo eléctrico $\vec{E}$ debido a que las cargas se encuentran a una distancia r del punto P, como se muestra en la Figura. Suponga que $r \succ\succ a.$

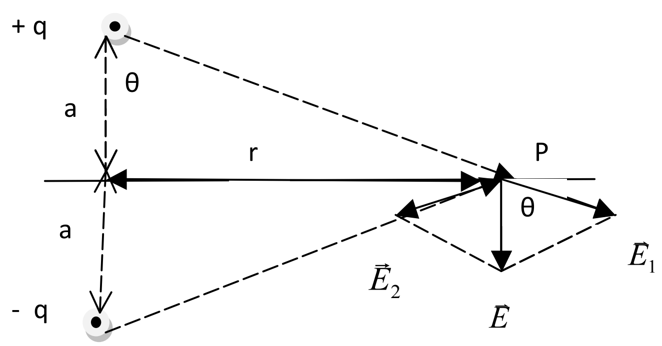


Figura 2.3. Las cargas +q y –q forman un dipolo eléctrico.

A partir de la Figura 2.3 y del principio de superposión para campo eléctrico, resulta:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \tag{2.6}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{a^2 + r^2} \tag{2.7}$$

La magnitud de $\vec{E}$ esta dada por:

$$E = 2E_1 \cos\theta$$

De la Figura 2.3 se observa:

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

Sustituyendo de las dos últimas relaciones, resulta:

$$E = \frac{2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{a^2 + r^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o} \frac{2\,q}{\left(a^2 + r^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{2.8}$$

Si $r \succ\succ a.$ entonces la ecuación (2.8) se puede expresar como:

$$E \approx \frac{2}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a\,q}{r^3} \tag{2.9}$$

El producto 2aq se denomina el momento del dipolo eléctrico p, entonces podemos definir la expresión (2.9), de la forma:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{P}{r^3} \qquad (2.10)$$

Para puntos lejanos a lo largo del eje del dipolo.

2.3 Campo eléctrico debido a una distribución continua de cargas eléctricas.

Si la distribución de cargas eléctricas es continua, el Campo eléctrico que se produce en un punto cualesquiera del espacio P se puede calcular dividiendo la carga en elementos infinitesimales dq, de manera que se calcula el Campo que produce cada elemento en el punto P, tratando cada elemento como si fueran cargas. La magnitud de dE, está dada por:

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{d\,q}{r^2} \qquad (2.11)$$

En donde r es la distancia del elemento de carga dq al punto P.

El Campo eléctrico resultante en P corresponde a la relación dada por:

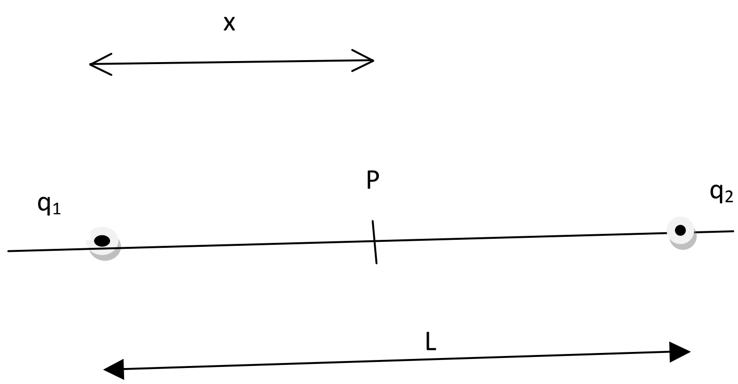
$$E = \int d\,E \qquad (2.12)$$

En el caso más general:

$$d\bar{E} = \int d\,\bar{E} \qquad (2,13)$$

Ejemplo 2.1. En la siguiente figura se muestra una carga $q_1 = +10^{-8}$ c que se encuentra a 20 cm de la carga $q_2 = +2 \times 10^{-8}$ c. ¿En qué punto de la línea recta que une las dos cargas es nula la intensidad del campo eléctrico?

Solución



La intensidad del Campo eléctrico de q_1 y q_2 deben de ser iguales en el punto P, es decir:

$$E_1 = E_2$$

Sustituyendo:

$$\frac{q_1}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,x^2} = \frac{q_2}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,(L-x)^2}$$

Despejando a x, resulta:

$$x = \frac{L}{1+\sqrt{\frac{q_1}{q_2}}}$$

Sustituyendo valores. Resulta:

$$x = \frac{0.2\ m}{1+\sqrt{2}} = 0.828\ m.$$

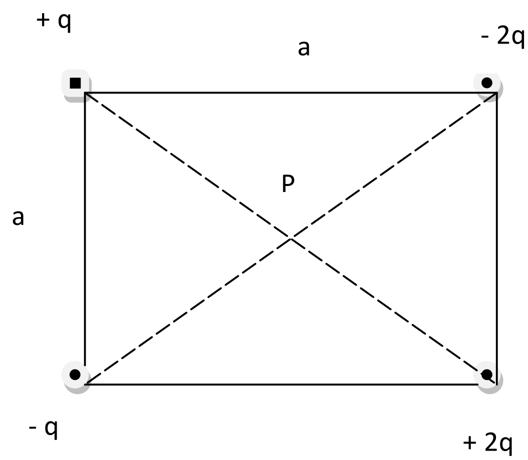
Ejercicios propuestos

2.1Dos cargas eléctricas puntuales de + 2 X 10^{-7} c y +8.5 X 10^{-8} c, están separadas 12 cm.

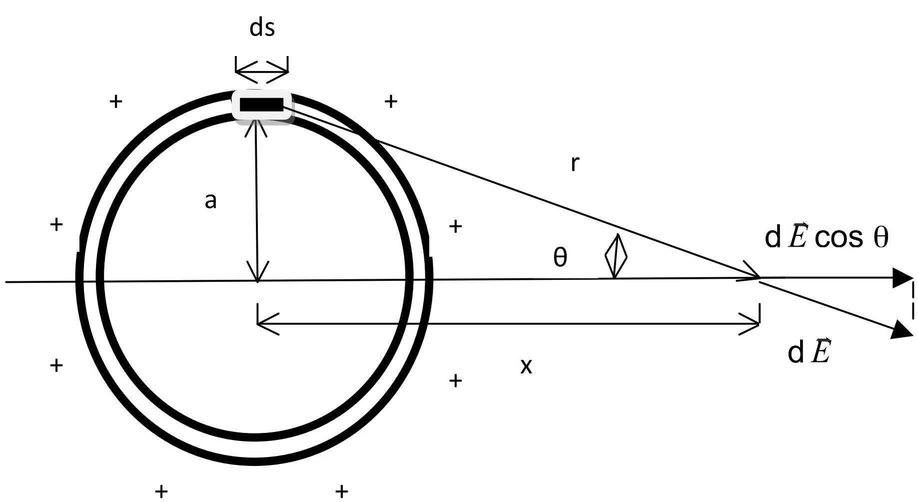
a) ¿Qué campo eléctrico produce cada una en el sitio en donde está la otra?

b) ¿Qué fuerza eléctrica actúa en cada una?

Ejercicio 2.2. A partir de la siguiente figura determinar la dirección y magnitud del Campo eléctrico $\vec{E}$ en el centro del cuadrado. Considere que q = 10^{-8} c y a = 5 cm.



Ejemplo 2.2. En la siguiente figura se muestra un anillo de carga Q y de radio a. ¿Calcular $\vec{E}$ para puntos situados en el eje del anillo a una distancia x del centro?



Solución.

$$\vec{E} = \int d\ \vec{E}$$

Se transforma en una integral escalar:

$$E = \int dE \cos\theta$$

Ahora:

$$\frac{d\, s}{d\, q} = \frac{2\, \pi\, a}{q}$$

Entonces:

$$d\, q = q\, \frac{d\, S}{2\, \pi\, a}$$

Dado que:

$$d\, E = \frac{1}{4\, \pi\, \varepsilon_0}\, \frac{d\, q}{r^2}$$

Sustituyendo en la relación anterior d q y $r^2 = a^2 + x^2$, resulta:

$$d\, E = \frac{1}{4\, \pi\, \varepsilon_0}\, \frac{q\, ds}{2\, \pi\, a^2}\, \frac{1}{a^2 + x^2}$$

Dado que $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$, entonces:

$$E = \int d\, E \cos\theta = \int \frac{1}{4\, \pi\, \varepsilon_o}\, \frac{q}{2\, \pi\, a^2}\, \frac{1}{a^2 + x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right) ds$$

Simplificando, resulta:

$$E = \frac{q\, x}{4\, \pi\, \varepsilon_o \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}} \left(2\, \pi\, a\right)} \int d\, s$$

Dado que $\int ds = 2\, \pi\, a$, entonces:

$$E = \frac{q\, x}{4\, \pi\, \varepsilon_o \left(a^2 + x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Dado que $x \succ\succ a$, entonces, se puede omitir a de manera que la ecuación anterior indica que el campo eléctrico E, se comporta como el caso de una carga puntual, dada por la expresión:

$$E = \frac{q}{4\pi \varepsilon_o x^2}$$

Ejemplo 2.3 En la siguiente figura se muestra una región de una distribución de una línea infinita de carga cuya densidad lineal de carga λ = constante $\left(\lambda = \frac{d\,q}{d\,x}\right)$.

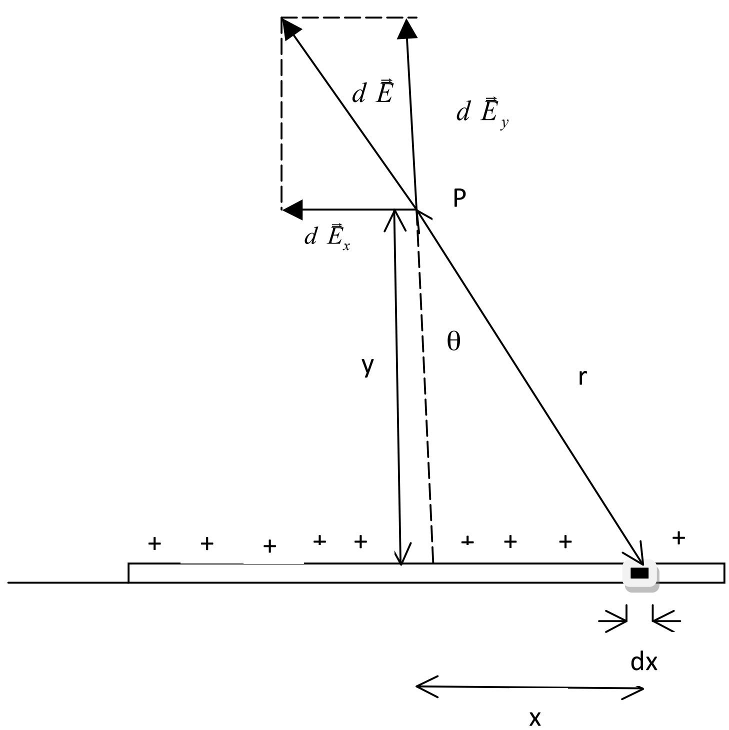
¿Calcular el Campo eléctrico $\vec{E}$ a una distancia y de la línea?

Solución.

La magnitud de la contribución d E debida al elemento de carga d q esta dado por:

$$d\,E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_o} \frac{d\,q}{r^2}$$

A partir de la figura:



El vector $d\,\vec{E}$ tiene componentes:

$$d\ E_x = -\,d\ E\ sen\theta \qquad y \qquad d\ E_y = d\ E\cos\theta$$

El vector E resultante en el punto P, esta dado por:

$$E_x = \int d\ E_x = -\int_{x\to-\infty}^{x\to\infty} sen\,\theta\ d\ E \qquad y \qquad E_y = \int d\ E_y = \int_{x\to-\infty}^{x\to\infty} \cos\theta\ d\ E$$

Las contribuciones para de E_x = 0, ya que todo elemento de carga dq de la derecha es igual al elemento de carga a la izquierda, entonces en la dirección x se anulan.

En el caso de E_y:

$$E_y = \int d\ E_y = \int_{x\to-\infty}^{x\to\infty} \cos\theta\ d\ E = 2\int_{x\to 0}^{x\to\infty} \cos\theta\ d\ E$$

Sustituyendo en la ecuación anterior d E, resulta:

$$E_y = 2\int_{x\to 0}^{x\to\infty} \cos\theta\ d\ E = 2\int_{x\to 0}^{x\to\infty} \cos\theta\ \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{d\ q}{r^2} = 2\int_{x\to 0}^{x\to\infty} \cos\theta\ \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{\lambda\ d\ x}{y^2+x^2}$$

Entonces:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\int_{x\to 0}^{x\to\infty} \cos\theta\ \frac{d\ x}{y^2+x^2}$$

Dado que: x = y tan θ, entonces d x = y $\sec^2$ θ dθ, sustituyendo en la integral anterior resulta:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\int_{\theta\to 0}^{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ \frac{y\sec^2\theta\ d\ \theta}{y^2+(y\tan\theta)^2}$$

Dado que: $\tan^2 = \sec^2 -1$, entonces:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o}\int_{\theta\to 0}^{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ \frac{y\sec^2\theta\ d\ \theta}{y^2+y^2\left(\sec^2\theta-1\right)} = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_0}\int_{\theta\to 0}^{\theta\to\frac{\pi}{2}} \cos\theta\ \frac{y\sec^2\theta\ d\theta}{y^2\left(1+\sec^2-1\right)}$$

Es decir:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o} \int_{\theta \to 0}^{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta\, d\theta}{y}$$

Resolviendo:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o\, y}\left(sen\,\frac{\pi}{2} - sen\, 0 \right)$$

Finalmente:

$$E_y = \frac{\lambda}{2\,\pi\,\varepsilon_o\, y}$$

Ejercicio propuesto.

Un anillo de 1 m de radio tiene una carga positiva Q de 5 X 10^{-10} C. ¿Calcule la intensidad del Campo eléctrico en los puntos del eje del anillo que distan de su centro 0,10,20,30,40 cm ?

2.4 Flujo eléctrico, líneas de campo eléctrico, líneas de fuerza.

La dirección de la intensidad del campo eléctrico E conforme viaja a través del espacio, se puede representar por medio de líneas continuas en el espacio. A tales líneas que se muestran. Indican la dirección de E en cualquier punto sobre la línea y se les denomina líneas de fuerza o líneas de flujo. Estas líneas no son solo útiles para visualizar las direcciones del campo eléctrico E, sino se les puede dibujar de tal modo que exhiben la magnitud de $\vec{E}$ en cada región del espacio. Se emplea el artificio de dibujar las líneas de tal modo que la densidad de ellas en un área determinada numéricamente es igual a la magnitud del campo eléctrico E.

En la siguiente figura 2.4 se elige un área $\Delta\, A$ cuya superficie sea perpendicular a $\vec{E}$. La dirección del vector $\Delta\, \vec{A}$ es por convención, perpendicular a la superficie y en consecuencia paralelo a $\vec{E}$. La magnitud del vector $\Delta\, \vec{A}$ es el área $\Delta\, A$. Sea: $\Delta\, \Phi$ el número de líneas que atraviesan $\Delta\, A$. Entonces se define:

$$E = \frac{\Delta\, \Phi}{\Delta\, A} \qquad (2.14)$$

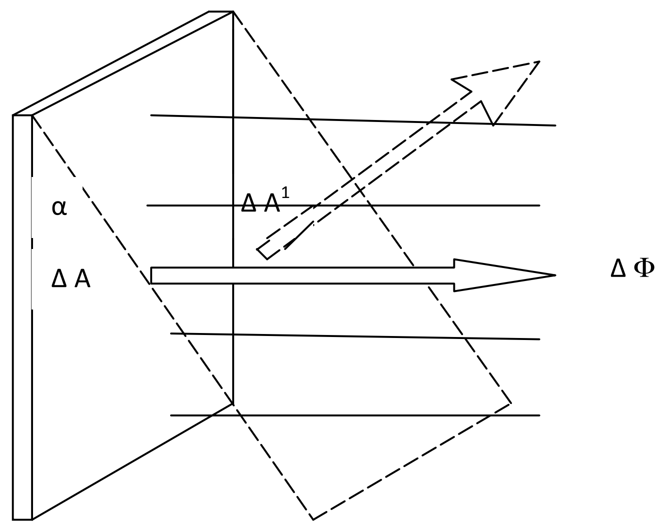


Figura 2.4. Cuatro líneas de flujo eléctrico atraviesan las áreas Δ A y ΔA^1, las cuales hacen un ángulo α. La superficie Δ A es perpendicular a las líneas de flujo.

Considerando el área ΔA^1 de la figura anterior la cual tiene un ángulo de inclinación α respecto a Δ A y encierra las mismas líneas de Δ Φ, entonces:

$$\Delta A = \Delta A^1 \cos\alpha \qquad (2.15)$$

Desde el punto de vista vectorial (producto escalar), se establece:

$$\vec{E} \bullet \Delta \vec{A}^1 = E\left(\Delta A^1\right)\cos\alpha = E\left(\frac{\Delta A}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha = E\,\Delta A = \Delta\Phi \qquad (2.16)$$

En general el número de líneas de flujo eléctrico esta dado por:

$$\vec{E} \bullet d\vec{A} = d\Phi \qquad (2.17)$$

En general el flujo total de líneas de campo eléctrico que atraviesan una superficie extendida S, se puede expresar en forma discreta por la forma:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{E} \bullet \Delta S_i = \Phi \qquad (2.18)$$

O Como una integral de superficie:

$$\int_S \vec{E} \bullet d\vec{A} = \Phi \qquad (2.19)$$

Ejemplo 2.4

Considere una esfera imaginaria de radio r, alrededor de una carga Q. ¿Determine el flujo de líneas de fuerza del campo eléctrico generado por Q?

Sol.

A partir de la relación (2.19).

$$\int_S E \bullet d\,\vec{A} = \int E\,d\,A = E\int d\,A = E\left(4\,\pi\,r^2\right) = \Phi$$

Es decir:

$$\Phi = E\left(4\,\pi\,R^2\right) = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_o\,r^2}\left(4\,\pi\,r^2\right) = \frac{Q}{\varepsilon_o}$$

Observe que el resultado anterior es válido para todos los valores de r.

2.5 Campo eléctrico en conductores.

La mayoría de los materiales sólidos se pueden clasificar en dos categorías conductores y no conductores (aislantes). Los materiales conductores poseen un exceso de carga q, en particular de electrones libres que no están unidos a un átomo en particular y se distribuyen en forma que se minimicen las fuerzas de repulsión y todas las cargas queden en reposo. Si las cargas no se mueven entonces el campo eléctrico es nulo.

Es decir, formalmente:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot d\,\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_o} = 0 \Rightarrow Q = 0 \qquad (2.20)$$

Si al interior de la superficie Q es nula, entonces se distribuye el exceso de carga en la superficie externa.

Ejemplo 2.5

La siguiente figura 2.5 muestra un cilindro hipotético de radio R dentro de un campo eléctrico uniforme E estando el eje del cilindro paralelo al campo eléctrico. ¿Cuál es Φ_E para esta superficie cerrada?

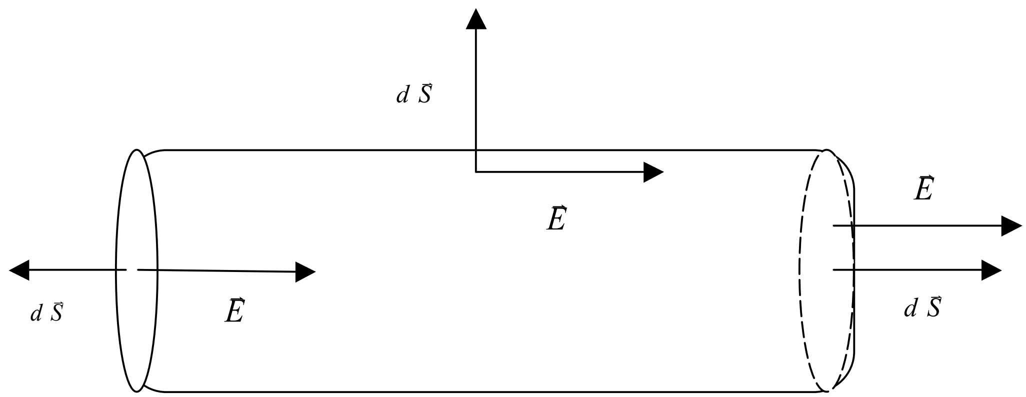


Figura 2.5. Una superficie cilíndrica colocada de un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ paralelo a su eje.

Solución.

Para el caso de la tapa izquierda del cilindro:

$$(\Phi_E)_1 = \int_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\cos 180^o \, d s = -E\int d S = -E\left(\pi R^2\right)$$

Para el caso de la tapa derecha del cilindro:

$$(\Phi_E)_2 = \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\cos 0^o \, d s = E\int d S = E\left(\pi R^2\right)$$

Para el caso de la superficie del cilindro:

$$(\Phi_E)_3 = \int_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \int E\cos 90^o \, d s = 0 \quad (Para\ todos\ los\ puntos)$$

Finalmente:

$$(\Phi_E)_T = \left(\Phi_E\right)_1 + \left(\Phi_E\right)_2 + \left(\Phi_E\right)_3 = 0$$

2.6 Ley de Gauss.

La Ley de Gauss se aplica a cualquier superficie hipotética cerrada (llamada superficie gaussiana), establece una relación entre Φ_E para una superficie y la carga neta Q encerrada por su superficie, definida por las expresiones:

$$\varepsilon_o \, \Phi_E = Q \qquad (2.21)$$

$$\varepsilon_o \oint_s \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = Q \qquad (2.22)$$

La Ley de Gauss se puede aplicar para calcular el campo eléctrico $\vec{E}$ y en donde la distribución de carga es lo suficientemente simétrica para resolver fácilmente la integral.

La Ley de Coulomb se puede deducir de la Ley de Gauss. Para hacerlo, apliquemos la Ley de Gauss a una carga puntual aislada Q contenida en una superficie esférica de radio r con centro en la carga y debe de ser normal a la superficie d S y debe de tener la misma magnitud en todos los puntos. (Figura 2.6).

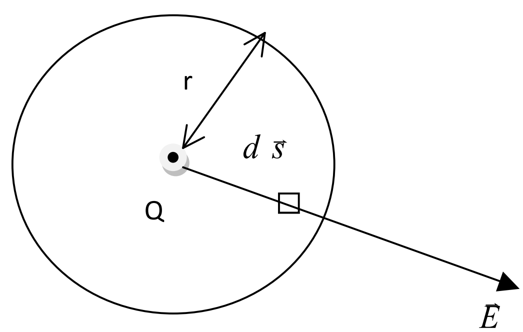


Figura 2.6 Una superficie gaussiana esférica de radio r que encierra simétricamente a la carga puntual Q

A partir de la relación (2.22):

$$\varepsilon_o \oint_s \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = \varepsilon_o \oint E\, d\,S = \varepsilon_o\, E \oint d\,S = Q$$

Como E es constante:

$$\varepsilon_o\, E\left(4\pi\, r^2\right) = Q$$

Despejando E, resulta:

$$E = \frac{Q}{4\,\pi\,\varepsilon_0\, r^2}$$

Dado que la magnitud de $\vec{F}_e$ esta dada por:

$$F_e = E\, q_o$$

Entonces, combinando las últimas ecuaciones, resulta:

$$F_e = \frac{1}{4\,\pi\,\varepsilon_o}\,\frac{Q\,q_o}{r^2}$$

Que corresponde a la Ley de Coulomb.

Ejemplo 2.6

Considere una esfera conductora de radio R. a) ¿Calcular la intensidad del campo eléctrico uniforme para puntos dentro de la superficie? b) ¿Calcular la intensidad del campo eléctrico fuera de la superficie?

Solución:

a) Considera una esfera conductora como se muestra en la siguiente figura (2.7):

Para r < R.

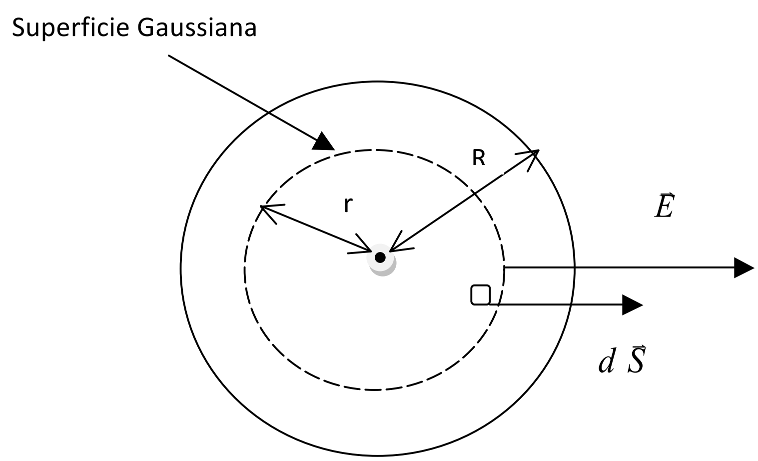


Figura 2.7 Muestra un esfera conductora.

A partir de la Ley de Gauss:

$$\Phi = \int_S \vec{E}\cdot d\,\vec{S} = \int_S E\,d\,S\cos\alpha = E\int_S d\,S = E\left(4\,\pi\,r^2\right) = \frac{Q^{'1}}{\varepsilon_0}$$

Despejando E, resulta:

$$E = \frac{Q^{'1}}{4\,\pi\varepsilon_0\; r^2}$$

La carga encerrada en la superficie gaussiana es: Q^1 y la carga encerrada en la superficie de radio R es: Q

La densidad de carga volumétrica para la superficie Gaussiana está dada por:

$$\rho^1 = \frac{Q^{'1}}{V^1} = \frac{Q^1}{\frac{4}{3}\pi\, r^3}$$

La densidad de carga volumétrica para la esfera está dada por:

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\, R^3}$$

Dado que: $\rho^1 = \rho$, entonces:

$$Q^1 = \frac{Q\, r^3}{R^3}$$

Sustituyendo en E, resulta:

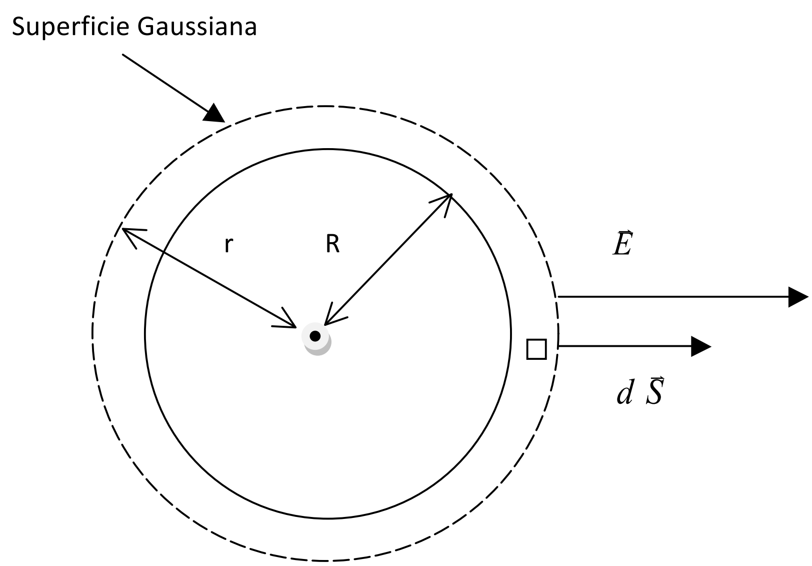
$$E = \frac{Q^{'1}}{4\,\pi\varepsilon_0\; r^2} = \frac{\frac{Q\,r}{3}}{\frac{4\,\pi\,\varepsilon_o\, R^3}{3}} = \frac{Q\,r}{V\,3\;\varepsilon_0}$$

Es decir:

$$E\left(r \angle R\right) = \frac{\rho\, r}{3\;\varepsilon_0}$$

b)

Para R < r.



A partir de la Ley de Gauss:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = \frac{Q_{Encerrada.}}{\varepsilon_0}$$

$$\int_S \vec{E} \cdot d\,\vec{S} = E \int_4 d\,S = E\left(4\,\pi\,r^2\right) = \frac{Q_{Encerrada.}}{\varepsilon_0}$$

Finalmente:

$$E\left(R \angle r\right) = \frac{Q_{Encerrada.}}{4\,\pi\,\varepsilon_0\,r^2}$$

Unidad 3 Potencial eléctrico.

3.1 Trabajo y Energía Potencial de cargas eléctricas.

Si levantamos una piedra sobre la superficie de la Tierra, el trabajo que hacemos contra la atracción gravitacional terrestre se almacena como energía potencial en el sistema Tierra+piedra. Si dejamos caer la piedra, la energía potencial almacenada se transforma continuamente como energía cinética conforme cae la piedra. Después que la piedra queda en reposo sobre la Tierra, esa energía cinética, que un instante antes del choque era de igual magnitud que la energía potencial almacenada originalmente, se transforma en energía calorífica en el sistema Tierra+piedra.

Existe una situación semejante en electroestática. Considere dos carga eléctricas q y Q separadas una distancia r, como se representa en la Figura 3.1 Si aumentamos la separación entre ellas, entonces un agente externo debe de realizar Trabajo, que será positivo si las cargas son de signo opuesto y negativo si no lo son. La energía representada por este Trabajo se puede considerar como la que queda almacenada en el sistema q + Q y se considera como la Energía potencial eléctrica. Esta energía, lo mismo que todas las variedades de energía potencial se puede transformar en otros tipos de energía.

Figura 3,1. Muestra la separación r de las cargas eléctricas puntuales q y Q.

La diferencia de Energía Potencial eléctrica U entre los puntos a y b, para un cuerpo de carga q, está dada:

$$U_b - U_a = -\int_a^b \vec{F}_e \cdot d\,\vec{r} = -\int_a^b q\,\vec{E} \cdot d\,\vec{r} = -q\int_a^b \vec{E} \cdot d\,\vec{r} \qquad (3.1)$$

Se considera que U_a (a→∝) = 0 si el cuerpo se encuentra en el infinito, es decir:

$$U_b(r) = -q\int_0^r \vec{E} \cdot d\,\vec{r} \qquad (3.2)$$

Si se trae una carga puntual q desde el infinito a una distancia r de una carga puntual Q. La Energía potencial eléctrica es el trabajo efectuado en contra de la fuerza electroestática, es decir:

$$U_b(r) = -q \int_{\infty}^{r} \frac{K\,Q}{r} \cdot d\,\vec{r}$$

$$U_b(r) = -q\,K\,Q \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r} \cdot d\,\vec{r}$$

Resolviendo, resulta:

$$U(r) = -K\,q\,Q \left| -\frac{1}{r} \right|_{\infty}^{r} = \frac{K\,q\,Q}{r} \qquad (3.3)$$

La relación (3.3) corresponde a la energía potencial de las cargas q Q.

El potencial eléctrico V se define como la energía potencial eléctrica U por unidad de carga eléctrica y se representa formalmente de la forma:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q} \qquad (3.4)$$

La unidad del potencial eléctrico en el Sistema Internacional está dada por: $\frac{Joules}{Coulomb} = Volt$ desarrollando resulta:

$$V(r) = \frac{U(r)}{q} = \frac{K\,q\,Q}{q\,r} = \frac{K\,Q}{r} \qquad (3.5)$$

La relación (3.5) corresponde al potencial eléctrico debido a una carga puntual Q.

La diferencia de potencial entre 2 puntos, es el trabajo que se requiere para mover una carga prueba de un punto a otro.

Partiendo de la forma diferencial:

$$d\,V = -\vec{E} \cdot d\,\vec{l} \qquad (3.6)$$

Para $d\,\vec{l}$ en la dirección x, se satisface:

$$d\,V = -E_x\,d\,x \qquad (3.7)$$

En forma análoga en dirección y, z, resulta:

$$dV = -E_y\, dy \qquad (3.8)$$

$$dV = -E_z\, dz \qquad (3.9)$$

Así también se puede expresar (7), (8) y (9):

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (3.10)$$

$$E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (3.11)$$

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \qquad (3.12)$$

Integrando la relación (3.6). Resulta en forma más general:

$$\int_a^b dV = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\,\vec{l} \qquad (3.13)$$

O bien:

$$V_b - V_a = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\,\vec{l} \qquad (3.14)$$

Ejercicio 3.1. ¿Cuál debe ser la magnitud de una carga punto positiva aislada para que el potencial eléctrico a 60 cm de la carga sea de 200 V?

Solución.

A partir de la ecuación (3.4):

$$V(r) = \frac{KQ}{r}$$

Despejando:

$$Q = \frac{V(r)\, r}{K}$$

Sustituyendo:

$$Q = \frac{\left(200 \frac{J}{c}\right)(0.6\, m)}{\left(9\, X\, 10^{9}\, \frac{N\, m^2}{c^2}\right)} = \frac{120\, c}{9\, X\, 10^{9}} = 13.33\, X\, 10^{-9}\, c$$

Ejemplo 3.2 ¿Cuál es el potencial eléctrico en la superficie de un núcleo de Oro?

(El radio del núcleo es de 6.6 X 10^{-15} m y el número atómico es Z= 79).

Solución.

Se supone que el núcleo es una esfera simétrica, se comporta eléctricamente para puntos exteriores como si fuera una carga punto, considerando que la carga del protón es de 1.6 X 10^{-19} c.

A partir de la ecuación (4):

$$V\,(r) = \frac{K\, Q}{r}$$

Sustituyendo:

$$V = \frac{\left(9\, X\, 10^{9}\, \frac{N\, m^2}{c^2}\right)(79)\left(1.6\, X\, 10^{-19}\, c\right)}{\left(6.6\, X\, 10^{-15}\, m\right)} = \frac{1137.6\, X\, 10^{-10}\, \frac{J}{c}}{6.6\, X\, 10^{-15}} = 172.36\, X\, 10^{5}\, Volts.$$

Ejercicio 3.3 Encontrar el potencial eléctrico para puntos en el eje de un disco circular uniforme cargado, en donde σ es a densidad de carga por unidad de área.

Solución.

Considere un elemento de carga d σ formado por una tira circular plana de radio y y anchura d y, es decir:

$$\sigma = \frac{d\, q}{d\, A}$$

El área de la tira circular está dada por: A = 2 π y, entonces sustituyendo en la relación anterior, resulta:

$$\sigma = \frac{d\, q}{(2\,\pi\, y)\, d\, y}$$

Apoyándonos en la Figura 3.2:

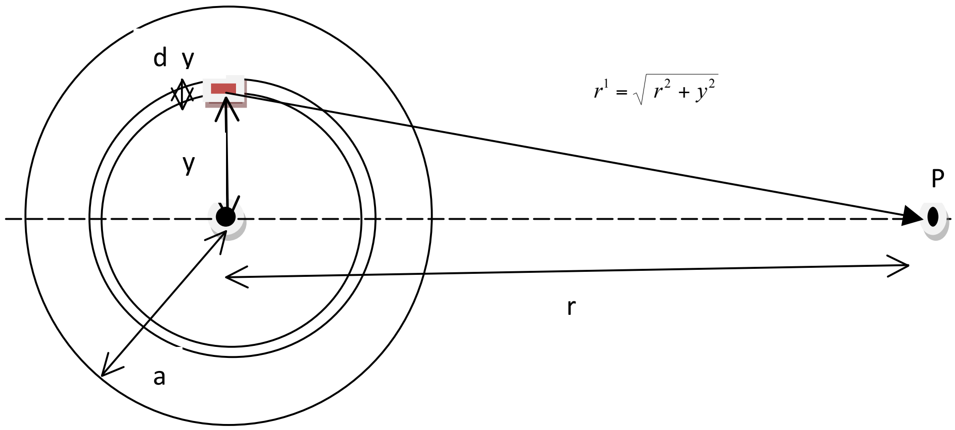


Figura 3.2. Un punto P en el eje de un disco circular uniformemente cargado de radio a.

Las contribuciones del potencial eléctrico d V en el punto P, está dada por:

$$d\, V = \frac{K\, d\, q}{r^1} = \frac{K\, \sigma\,(2\,\pi\, y)(d\, y)}{\sqrt{y^2 + r^2}}$$

Para calcular el Potencial eléctrico V en todo el disco:

$$V(r) = \int d\, V = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o}\int_0^a (y^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}\, y\, dy = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(\sqrt{a^2 + r^2} - r\right)$$

El resultado anterior es general para todos los valores de r.

Para valores de r >> a, entonces se puede considerar la siguiente aproximación (aplicando el teorema del Binomio):

$$\sqrt{a^2 + r^2} = r\sqrt{\frac{a^2}{r^2} + 1} = r\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{a^2}{r^2} + ...\right) \approx r + \frac{a^2}{2\, r}$$

Sustituyendo:

$$V = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_0}\left(r + \frac{a^2}{2r} - r\right) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o}\,\frac{a^2}{2\, r} = \frac{q}{4\,\pi\,\varepsilon_o\, r}$$

El resultado anterior es de esperarse ya que el disco cargado se comporta como una carga puntual para puntos muy alejados.

Unidad 4 Capacitores y dieléctricos

4.1 Capacitores, capacitancia y dieléctricos.

El capacitor es un dispositivo común en casi cualquier equipo electrónico y posee la propiedad de retener o almacenar cargas eléctricas cuando se aplica una diferencia de potencial entre dos terminales y se define de la forma:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad (4.1)$$

En donde:

Q: Carga almacenada.

Δ V: Diferencia de potencial.

Las unidades en el sistema internacional son:

$$\left[C\right] = \frac{Coulomb}{Volts} = Farad$$

El capacitor consiste de dos superficies conductoras separadas por una capa aislante delgada. Las cargas sobre las serán de igual magnitud y opuestas como se observa en la figura 4.1.

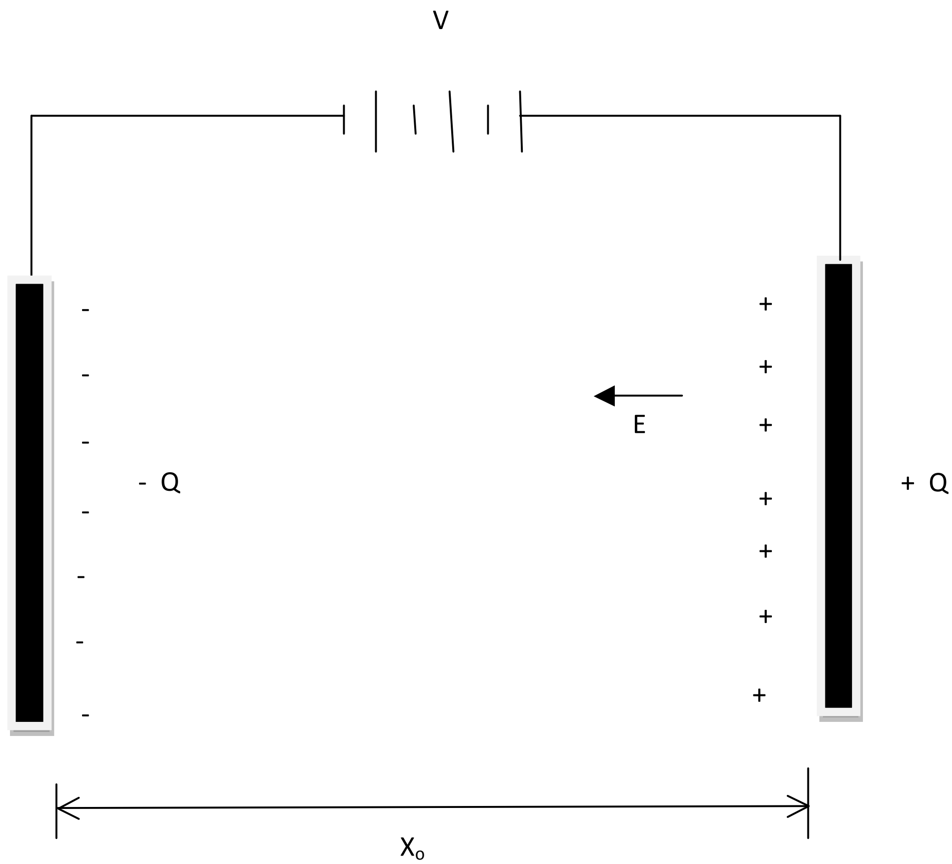


Figura 4.1. Muestra el esquema de un capacitor de placas paralelas

La diferencia de potencial eléctrico esta dado por la expresión:

$$\Delta V = -E\, X_o \qquad (4.2)$$

Dado que para el caso de un condensador de placas paralelas resulta:

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o\, A}$$

Es decir:

$$\Delta V = \frac{\sigma\, X_o}{\varepsilon_o}$$ (Observe que E es negativo)

Por lo tanto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q\, \varepsilon_o}{\sigma\, X_o} = \frac{A\, \varepsilon_o}{X_o} = \frac{A}{4\pi\, K\, X_o} \qquad (4.3)$$

El resultado anterior corresponde a un capacitor de placas paralelas sin ningún material entre sus placas.

En el caso de la Capacitancia de un cable Coaxial.

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{\lambda L}{\Delta V}$$

Dado que el campo eléctrico en un cable coaxial esta dado por:

$$E = \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_o r}$$

Entonces:

$$\int_a^b d V = \int_a^b \vec{E} \cdot d \vec{r} = \int_a^b \frac{\lambda d r}{2 \pi \varepsilon_o r}$$

$$V_b - V_a = \frac{\lambda}{2 \pi \varepsilon_o} L n \frac{b}{a}$$

Sustituyendo:

$$C = \frac{L}{2 K_o L n \frac{b}{a}} \qquad (4.4)$$

Ejemplo 4.1 ¿Cuál es la capacitancia de un cable de alta fidelidad de 1 m de longitud y el conductor central es de 1 mm de diámetro y el blindaje de 5 mm de diámetro?

Solución.

$$C = \frac{L}{2 K_o L n \frac{b}{a}} = \frac{1 m}{2 \left(9 X 10^9 \frac{N m^2}{c^2} \right) L n (5)} = 0.034 X 10^{-9} farad$$

Condensador de placas paralelos de área A.

Considere la figura 4.2.

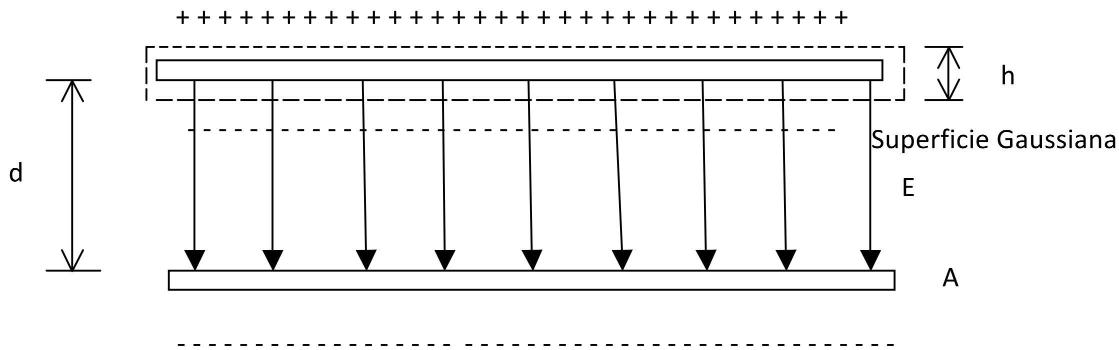


Figura 4.2, Muestra el diagrama de un condensador de placas circulares paralelas.

Aplicando la Ley de Gauss.

$$\Phi_E = E \cdot A = \frac{Q\,enc}{\varepsilon_o} \Rightarrow Q\,enc = \varepsilon_o\,E\,A$$

El trabajo eléctrico para llevar una carga prueba q_o de una placa a otra está dada por:

$$U = q_o\,V = q_o\,E\,d$$

Por lo tanto:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\varepsilon_o\,E\,A}{E\,d} = \frac{\varepsilon_o\,A}{d} \qquad (4.5)$$

Ejemplo 4.2 Las placas paralelas de un condensador cuyo dieléctrico es aire, están separadas 1 mm ¿Cuál debe de ser el área de las placas para que su capacitancia sea de 1 farad?

Solución.

$$C = \frac{\varepsilon_o\ A}{d} \Rightarrow A = \frac{C\ d}{\varepsilon_o}$$

Sustituyendo valores:

$$A = \frac{C\ d}{\varepsilon_o} = \frac{(1\ f)(10^{-3}\ m)}{8.9\ X\ 10^{-12}\ \frac{c^2}{N\ m^2}} = 0.11\ X\ 10^{9}\ m^2$$

Ejemplo 4.3 Un condensador cilíndrico consiste de dos cilindros coaxiales de radio a y b respectivamente con longitud L, como se muestra la sección transversal en la siguiente figura 4.3. Desprecie las irregularidades en los bordes. ¿Calcular la Capacitancia del Condensador? (El espesor de los cilindros es despreciable).

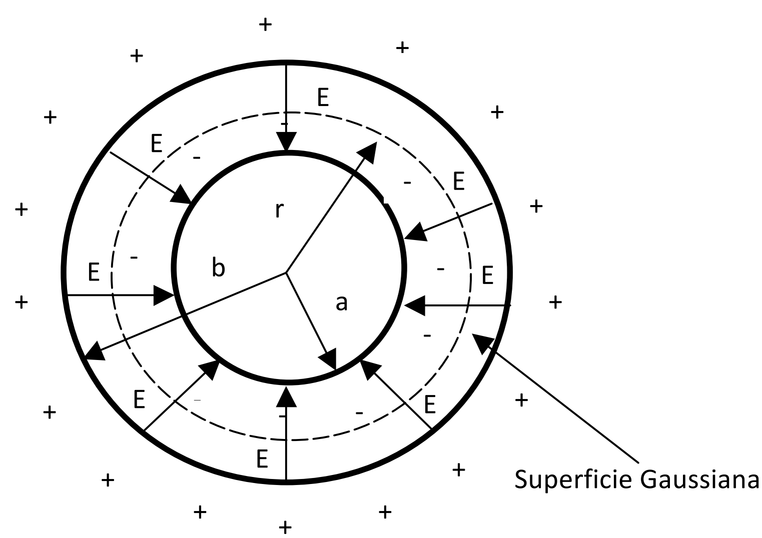


Figura 4.3 Muestra la sección transversal de dos cilindros coaxiales.

Solución.

Aplicando la Ley de Gauss en el cilindro coaxial interno:

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\ \vec{A} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o}$$

Dado que Φ_E solo está dado por el cuerpo del cilindro, entonces:

$$E \oint d\ A = E\left(2\ \pi\ r\ L\right) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_o}$$

Es decir:

$$E = \frac{Q}{2\ \pi\ r\ L\ \varepsilon_o}$$

La diferencia de potencial eléctrico entre las placas cilíndricas están dadas por:

$$\Delta V = \int_a^b d\ V = -\int_a^b \vec{E} \cdot d\ \vec{r} = \int_a^b E\ dr = \frac{Q}{2\ \pi\ \varepsilon_o\ L} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\ \pi\ \varepsilon_o\ L}\ Ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Por lo tanto:

$$C = \frac{2\ \pi\ \varepsilon_o\ L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

Condensadores en Paralelo

Considere el arreglo de tres condensadores en paralelo como se muestra en la figura 4.4.

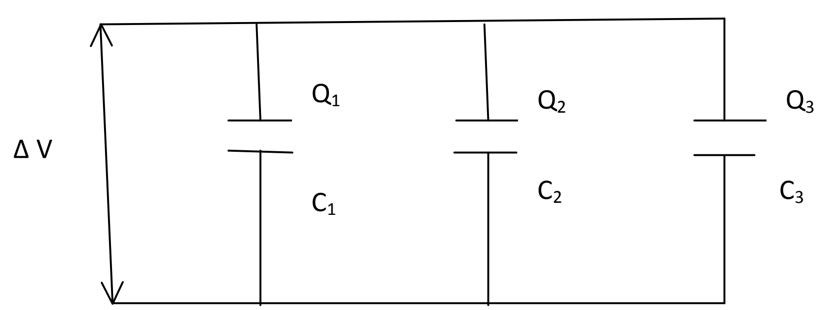


Figura 4.4 Arreglo de tres condensadores en paralelo

Considerando para condensador:

$$C_1 = \frac{Q_1}{V_1} \quad , \quad C_2 = \frac{Q_2}{V_2} \quad , \quad C_3 = \frac{Q_3}{V_3}$$

Dado que la carga total es:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

Entonces:

$$Q_1 = C_1 V_1 \quad , \quad Q_2 = C_2 V_2 \quad , \quad Q_3 = C_3 V_3$$

Sustituyendo:

$$Q = C_1 V_1 + C_2 V_2 + C_3 V_3$$

Se satisface:

$$V = V_1 = V_2 = V_3$$

Entonces:

$$Q = (C_1 + C_2 + C_3) V$$

$$\frac{Q}{V} = (C_1 + C_2 + C_3)$$

Identificando:

$$C_{ep} = C_1 + C_2 + C_3 \qquad (4.6)$$

Condensadores en serie

Considere el siguiente arreglo de tres condensadores en serie como s muestra en la figura 4.5.

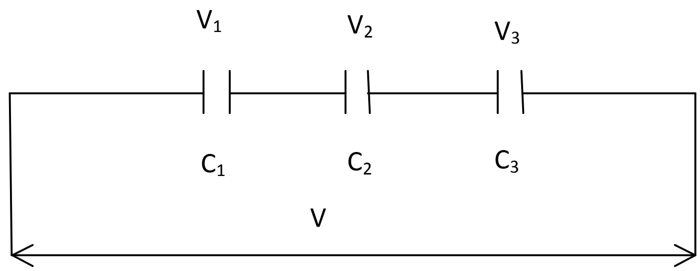


Figura 4.5. Arreglo de tres condensadores en serie.

La carga total esta dada por:

$$Q = Q_1 = Q_2 = Q_3$$

Entonces:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad . \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad . \quad V_3 = \frac{Q}{C_3}$$

Dado que:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)$$

Entonces:

$$\frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}$$

Identificando:

$$\frac{1}{C_{es}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \qquad (4.7)$$

4.2 Condensador de placas paralelas con dieléctrico.

Michel Faraday investigo el efecto de llenar el espacio entre las placas con un dieléctrico, digamos con un polímero, madera o aceite.

La parte experimental consiste en cargar los condensadores hasta obtener la misma diferencia de potencial eléctrico y M. Faraday encontró experimentalmente que la carga eléctrica que contenía el condensador con dieléctrico era mayor que a carga del otro condensador sin dieléctrico.

Este hecho se muestra en forma esquemática en la figura 4.6.

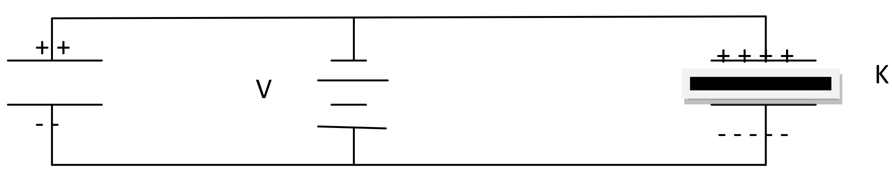


Figura 4.6. Muestra un condensador con aire entre sus placas y un condensador con un material con K constante dieléctrica entre sus placas, cuando se aplica una diferencia de potencial V.

A partir de los resultados experimentales se determino la relación de potencial eléctrico de los capacitores con dieléctrico y sin dieléctrico, dado por la ecuación:

$$V_o = K\, V_d \qquad (4.8)$$

En donde:

V_o : diferencia de potencial para el condensador con aire.

V_d : diferencia de potencial para el condensador con dieléctrico.

Es decir para la Capacitancia resulta:

$$C_o = \frac{Q}{V_o} = \frac{Q}{K\, V_d} = \frac{1}{K}\, C_d$$

Por lo tanto:

$$C_d = K\, C_o \qquad (4.9)$$

Es decir el efecto del dieléctrico es aumenta la capacitancia por un factor de K.

Para un condensador de placas paralelas resulta:

$$C_d = K\, \frac{\varepsilon_o\, A}{d} \qquad (4.10)$$

Observe que $K_{aire} = 1$, $K_{Teflón} = 2.1$ y $K_{Papel} = 3.5$.

"Si se aplica un campo eléctrico en un dieléctrico, aparecen cargas superficiales inducidas cuyo efecto es debilitar el campo eléctrico original dentro del dieléctrico"

Unidad 5: Corriente eléctrica y Circuitos eléctricos.

5.1 definición de corriente eléctrica y resistencia eléctrica.

Corriente eléctrica y densidad de corriente.

Se dice que se ha establecido una corriente eléctrica i, si pasa una carga neta Q por una sección transversal cualesquiera del conductor en un tiempo t.

La corriente eléctrica i se define operacionalmente de la forma:

$$i = \frac{d\,Q}{d\,t} \qquad (5.1)$$

La magnitud de una densidad de corriente eléctrica para todos los puntos de una sección transversal está dada por:

$$j = \frac{i}{A} \qquad (5.2)$$

Un electrón en un punto se mueve en dirección – j.

$$[i] = \frac{c}{s} = Ampere$$

$$[j] = \frac{Ampere}{m^2}$$

La definición general entre i y j está dada por:

$$i = \int \vec{j} \cdot d\,\vec{S} \qquad (5.3)$$

Velocidad de arrastre de los portadores de cargas en un conductor.

Considere la sección transversal de un alambre como se muestra en la figura 5.1:

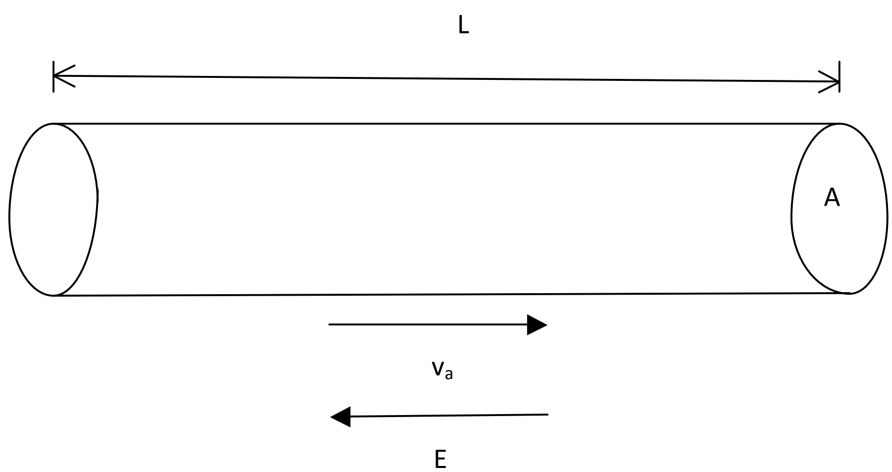


Figura 5.1: Muestra la velocidad de arrastre v_a de electrones que se desplazan a lo largo de un alambre conductor.

En donde la velocidad de arrastre de los electrones se denotan por v_a.

La densidad de los electrones conductores n, que circulan a l largo del alambre es AL. Por lo tanto la carga Q a lo largo del alambre está dada por:

$$Q = n\,A\,L\,e \qquad (5.4)$$

En donde: n es la densidad de electrones por unidad de volumen.

Ahora:

$$v_a = \frac{L}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{v_a} \qquad (5.5)$$

Considerando (5.1), (5.4) y (5.5) resulta:

$$i = e\, n\, A\, v_a \qquad (5.6)$$

Despejando v_a resulta:

$$v_a = \frac{i}{e\, n\, A} = \frac{j}{e\, n} \qquad (5.7)$$

Ejemplo 5.1 Un alambre de Aluminio cuyo diámetro es 0.00259 m esta soldado de un extremo a otro a un alambre de cobre de diámetro 0.001626 m. El alambre compuesto lleva una corriente eléctrica constante de 10 ampere.

a) ¿Cuál es la densidad de corriente en cada alambre?

b) ¿Cuánto vale v_a en el alambre de cobre?

Solución.

a)

La corriente eléctrica se distribuye uniformemente en la sección transversal del alambre (excepto en la unión).

Para el alambre de Aluminio:

$A_{Al} = \pi\ (0.001295\ \text{m})^2 = 5.2 \text{ X } 10^{-6}\ \text{m}^2$

Entonces:

$$j_{Al} = \frac{i}{A} = \frac{10\ ampere}{5.2\ X\ 10^{-6}\ m^2} = 1.92\ X\ 10^6\ \frac{ampere}{m^2}$$

Para el alambre de Cobre:

$A_{Co} = \pi\ (0.000813\ \text{m})^2 = 2.07 \text{ X } 10^{-6}\ \text{m}^2$

$$j_{Co} = \frac{i}{A} = \frac{10\ ampere}{2.07\ X\ 10^{-6}\ m^2} = 4.83\ X\ 10^6\ \frac{ampere}{m^2}$$

Considerando que hay un electrón libre por cada átomo de Cobre.

$$[n] = \frac{electrones}{cm^3}$$

$$n_{Co} = \frac{\rho_{Co}\, N}{M_{Co}} = \frac{\left(9\,\frac{gr}{cm^3}\right)\left(6\ X\ 10^{23}\,\frac{átomos}{mol}\right)\left(1\,\frac{electrón}{átomo}\right)}{64\,\frac{gr}{mol}}$$

$$n_{Co} = 0.84\ X\ 10^{23}\,\frac{electrones}{cm^3}$$

Sustituyendo en la expresión (5.7), resulta:

$$v_{a\,Co} = \frac{j_{Co}}{e\,n} = \frac{4.83\ X\ 10^{2}\,\frac{ampere}{cm^2}}{\left(0.84\ X\ 10^{23}\,\frac{electrones}{cm^3}\right)\left(\frac{1.6\ X\ 10^{-19}\ coulomb}{1\ electrón}\right)}$$

Finalmente:

$$v_{a\,Co} = 3.59\ X\ 10^{-2}\,\frac{cm}{seg}$$

5.2 Resistencia, resistividad y conductividad.

Si se aplica la misma diferencia de potencial eléctrico entre los extremos de una barra de cobre y de una barra de madera, se producen corrientes eléctricas muy diferentes, esta característica del conductor corresponde a la resistencia eléctrica y se denota por la letra R y su símbolo es: “ “ , [R] = Ohm.

Ley de Ohm.

A principios del Siglo XIX, George Ohm, descubrió que la magnitud de la corriente de los metales es proporcional al voltaje aplicado, siempre y cuando su temperatura se mantuviera constante y estableció experimentalmente la siguiente relación:

$$R \cong \frac{V}{i} \qquad (5.8)$$

Relacionada con la resistencia eléctrica está dada la resistividad eléctrica: ρ, que es una propiedad del material, y se aplica a materiales isotrópicos cuyas propiedades eléctricas no varían con la dirección, y se denota por la expresión:

$$\rho = \frac{E}{j} \qquad (5.9)$$

Dado que:

$$E = \frac{V}{l} \quad y \quad j = \frac{i}{A}$$

Sustituyendo en (5.9) resulta:

Por lo tanto:

$$\rho = \frac{E}{j} = \frac{V\,A}{l\,i} = R\,\frac{A}{l}$$

Despejando R resulta:

$$R = \rho\,\frac{l}{A} \qquad (5.9)$$

[ρ] = Ω m

Ejemplo 5.2 Un bloque rectangular de Carbón tiene 1 cm X 1cm X 30 cm.

a) ¿Cuál es su resistencia eléctrica medida entre los dos extremos cuadrados?

b) ¿Entre las dos caras rectangulares opuestas?

Considere la resistividad del Carbón a 20 ^{o}C es de 3.5 X 10^{-5} Ω m-

Solución.

a)

$$R = \rho\,\frac{l}{A} = \frac{\left(3.5\ X\ 10^{-5}\ \Omega\ m\right)\left(0.5\ m\right)}{1\ X\ 10^{-4}\ m^{2}} = 0.18\ \ \Omega$$

b)

$$R = \rho \frac{l}{A} = \frac{\left(3.5\ X\ 10^{-5}\ \Omega\ m\right)\left(10^{-2}\ m\right)}{5\ X\ 10^{-3}\ m^2} = 0.7\ X\ 10^{-4}\quad \Omega$$

La ley de Ohm es un propiedad específica de ciertos materiales y no es una ley general del electromagnetismo. Es decir solo se satisface si R es independiente de V e i.

La conductividad eléctrica se define:

$$\sigma = \frac{j}{E} = \frac{l\ i}{V\ A} = \frac{l}{R\ A} = \frac{1}{\rho}$$

Es decir:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \qquad (5.10)$$

$$[\sigma] = \frac{1}{\Omega\ m}$$

Flujo de de cargas debido a un potencial eléctrico.

Partiendo de la ley de Ohm:

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V\ A}{\rho\ \Delta X} = \frac{1}{\rho} A \frac{d\ V}{d\ X}$$

Es decir:

$$\frac{d\ Q}{d\ t} = -\sigma\ A \frac{d\ V}{d\ X} \qquad (5.11)$$

5.3 Intercambio de energía en un circuito eléctrico.

Considere un circuito que consiste en una batería. Por los alambres de conexión circula una corriente eléctrica constante i debido a una diferencia de potencial eléctrico constante V_{ab} entre las terminales a,b. En el circuito está conectada una “caja cerrada” como se muestra en la figura 5.2:

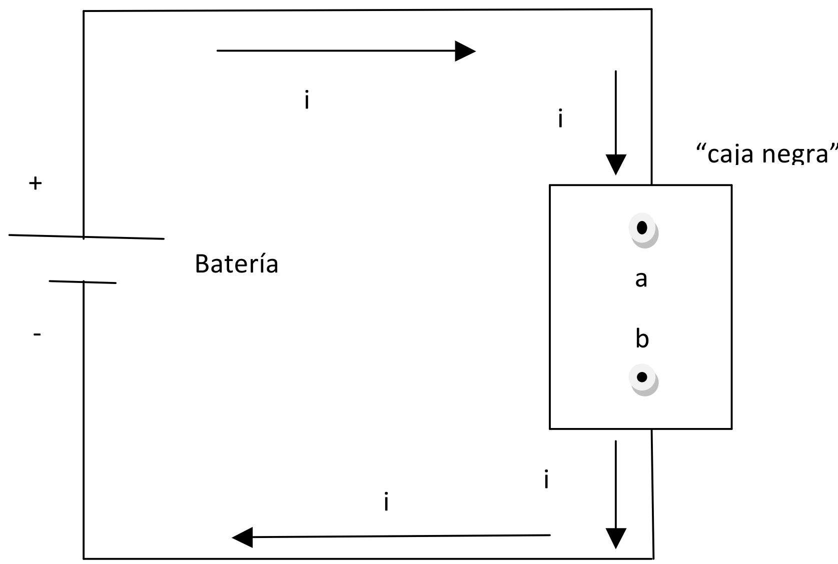


Figura 5.2: Muestra un circuito conectado a una “caja negra”

La energía se transforma dentro de la “caja negra” de la forma:

$$dU = V_{ab}\, dQ = V_{ab}\, i\, dt$$

Entonces la Potencia eléctrica P, se define:

$$P = \frac{dU}{dt} = V_{ab}\, i \qquad (5.12)$$

[P] = Watts.

A partir de de a relación (5.12) y la ley de Ohm, se establece:

$$P = (R\, i)\, i = R\, i^2 \qquad (5.13)$$

En forma análoga:

$$P = V_{ab}\left(\frac{V_{ab}}{R}\right) = \frac{(V_{ab})^2}{R} \qquad (5.14)$$

Ejemplo 5.3 Una lámpara de 60 W opera con 120 V. ¿Cuál es la resistencia eléctrica?

Solución.

$$P = \frac{V^2}{R} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{V^2}{P}$$

Sustituyendo valores:

$$R = \frac{(120\,V)^2}{60\,W} = 240\,\Omega$$

5.4 Fuerza electromotriz (fem).

Para mantener una corriente eléctrica en una resistencia o alambre, es necesaria una fuente constante de energía eléctrica. Dos fuentes comunes son las Baterías o Generadores eléctricos. A una fuente de energía eléctrica se denomina sede de fuerza electromotriz (fem). En una Batería corresponde aplica energía química y en un generador es energía mecánica y en una celda solar energía luminosa.

La expresión para determinar a fem esta dada por:

$$\varepsilon = \frac{\Delta U}{\Delta Q} \qquad (5.15)$$

$$[\varepsilon] = \frac{Joule}{coulomb}$$

Gran variedad de Circuitos implican combinaciones de resistencias en serie y/o paralelo.

Considere el arreglo de un circuito de resistencias en serie, como se muestra en la figura 5.3:

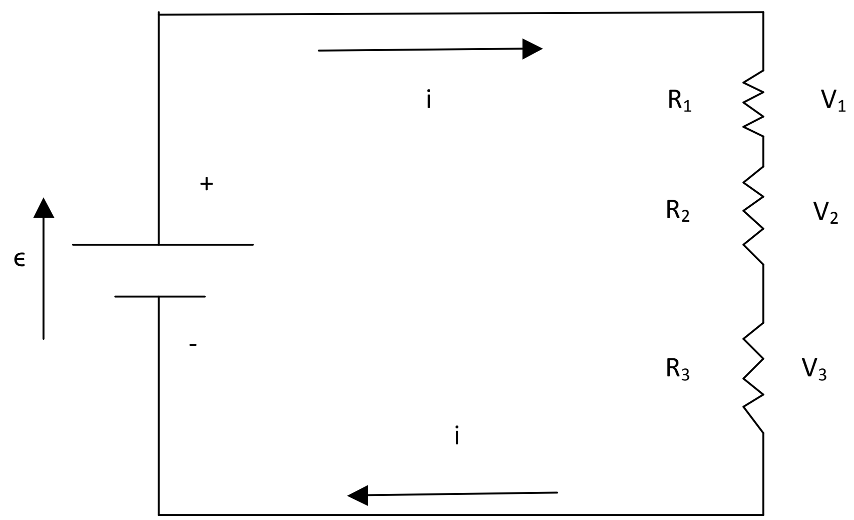


Figura 5.3. Muestra un circuito eléctrico de tres resistencias en serie.

En el circuito anterior la diferencia d potencial eléctrico total V, está dada por:

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

Dado que la corriente eléctrica es la misma en todas las resistencias, entonces:

$$\frac{V}{i} = \frac{V_1}{i} + \frac{V_2}{i} + \frac{V_3}{i}$$

Por lo tanto:

$$R_{es} = R_1 + R_2 + R_3 \qquad (5.16)$$

En el caso de un circuito de resistencias en paralelo como se muestra en la figura 5.4:

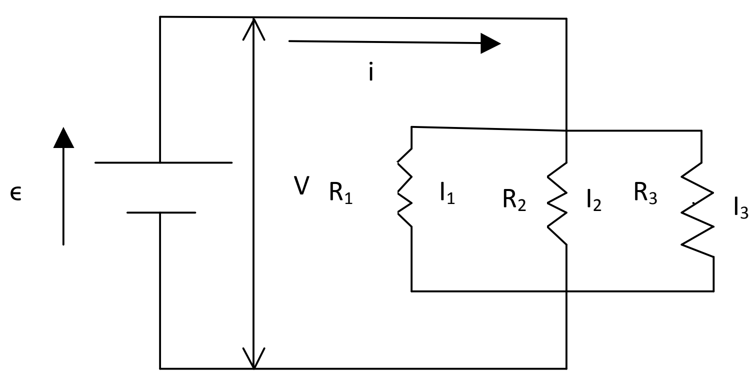


Figura 5.4: Muestra un circuito eléctrico de tres resistencias en paralelo.

Dado que se satisface:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

Dado que el potencial eléctrico es el mismo, entonces:

$$\frac{i}{V} = \frac{i_1}{V} + \frac{i_2}{V} + \frac{i_3}{V}$$

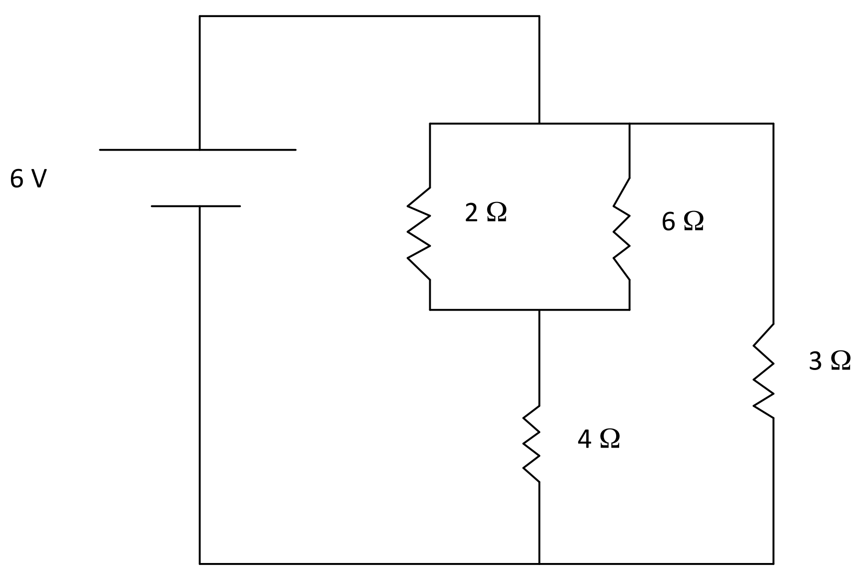
Aplicando la ley de Ohm, resulta:

$$\frac{1}{R_{ep}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad (5.17)$$

En general hay que descomponer los circuitos en combinaciones de arreglos en serie y paralelo.

Ejemplo 5.4

Considere el siguiente circuito:



a) ¿Cuál es la corriente total suministrada por la batería?

Solución.

Obteniendo la resistencia equivalente de 2 Ω y 6 Ω:

$$\frac{1}{R_{e1}} = \frac{1}{2\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{4}{6\ \Omega}$$

Es decir:

$$R_{e1} = \frac{6}{4}\ \Omega = 1.5\ \Omega$$

Ahora $R_{e2} = R_{e1} + 4\ \Omega = 1.5\ \Omega + 4\ \Omega = 5.5\ \Omega$.

Finalmente:

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_{e2}} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{1}{5.5\ \Omega} + \frac{1}{3\ \Omega} = \frac{3+5.5}{16.5\ \Omega} = \frac{8.5}{16.5\ \Omega}$$

Es decir:

$$R_e = \frac{16.5\ \Omega}{8.5} \approx 2\ \Omega$$

Aplicando la ley de Ohm:

$$i = \frac{V_t}{R} = \frac{6\ V}{2\ \Omega} = 3\ ampere$$

Enunciados de las Leyes de Kirchoff.

1ª. Ley de Kirchoff (teorema de nodos). La suma algebraica de las corrientes eléctricas que concurren a un nodo es cero. Dicho enunciado corresponde a la conservación de la carga eléctrica.

2ª. Ley de Kirchoff (teorema de los circuitos). La suma algebraica de las diferencias de potencial eléctrico alrededor de un circuito cerrado es cero (Una caída de voltaje es una ganancia negativa de voltaje); esta ley corresponde a una conservación de energía en el circuito.

Bibliografía Básica.

- Hewitt P.G., Conceptos de física, México, Limusa, 1993.

- Alonso M, Finn Edward.J, Vol II Campos y Ondas, Addison-Wesley, México, 1990.

- Resnick D. y Holliday R., Física Vol. 1, México, CECSA, 1978.