Movimiento de proyectiles en un plano: Tiro parabólico

José Jesús MENA DELGADILLO

El ejemplo más común de movimiento de proyectiles en un plano, corresponde a la trayectoria que describe el balón de fútbol americano que sale con una cierta velocidad V_o y a un cierto ángulo θ cuando es golpeado por el jugador. Si se desprecia la resistencia del aire, entonces se dice que la única aceleración que actúa sobre el balón es constante y corresponde a la aceleración de la gravedad, por lo tanto las ecuaciones de movimiento de describen dicho movimiento, también llamadas ecuaciones de tiro parabólico (dado que el perfil de su trayectoria corresponde a una parábola) son:

$$R = (V_o \cos\theta)t \qquad (I)$$

$$h = (V_o sen\theta)\, t - \frac{1}{2}\, g\, t^2 \qquad (II)$$

$$V_f^2 = (V_0 sen\theta)^2 - 2gh \qquad (III)$$

$$-g = \frac{V_f - (V_o sen\theta)}{t} \qquad (IV)$$

PROBLEMAS DE TIRO PARABOLICO

1 Un bateador golpea a una pelota que viaja a una altura de 1.45 m sobre el piso de tal manera que la lanza con un ángulo de inclinación con respecto a la horizontal de 50^0 y con una rapidez inicial de 35 m/s. En su trayectoria la pelota tiene que sobrepasar una barda de 6 m de altura, situada a una distancia de 96 m del bateador. ¿Podrá la pelota sobrepasar la barda?

Para determinar el alcance:

$$R = (V_o\, cos\Theta)t_a$$

Para obtener el tiempo que la pelota se encuentra en el aire: t_a, se utiliza la expresión:

$$-g = \frac{v_{fy} - v_o sen\Theta}{t_{h\,max}}$$

Donde t_{hmax} corresponde a el tiempo en que la pelota alcanza la altura máxima.

Dado que $t_a=2t_{hmax}$ resulta:

$$-g = \frac{v_{fy} - v_o sen\Theta}{\frac{t_a}{2}}$$

Despejando t_a resulta:

$$t_a = \frac{2\left(v_{fy} - v_o sen\Theta\right)}{-g}$$

Dado que $v_{fy} = 0\frac{m}{s}$ y sustituyendo en la relación anterior resulta:

$$t_a = \frac{2\left(\left(0\frac{m}{s}\right) - \left(35\frac{m}{s}\right)\left(sen50^o\right)\right)}{-\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)} = \frac{2\left(\left(0\frac{m}{s}\right) - \left(35\frac{m}{s}\right)\left(0.7660\right)\right)}{-9.8\frac{m}{s^2}} = 5.47s$$

Sustituyendo el valor de t_a en la ecuación de alcance R.

$$R = (v_o\cos\Theta)t_a = \left(35\frac{m}{s}\right)\left(\cos 50^o\right)\left(5.47s\right) = 123.06m$$

Para calcular la altura que alcanza la pelota cuando llega a la barda.

El tiempo que la pelota llega a la barda t_b esta dado por:

$$x = \left(v_o\cos\Theta\right)t_b$$

Donde x es la distancia entre el bateador y la barda.

Despejando t_b y sustituyendo resulta:

$$t_b = \frac{x}{v_o\cos\Theta} = \frac{96m}{\left(35\frac{m}{s}\right)\left(0.6427\right)} = \frac{96}{22.49}s = 4.26s$$

Finalmente para calcular la altura que alcanza la pelota al tiempo que pasa por la barda: h_p se utiliza la siguiente relación:

$$h_p = (v_o sen\Theta)t_b - \frac{1}{2}gt_b^2$$

Sustituyendo resulta:

$$h_p = \left(35\frac{m}{s}\right)(sen50°)(4.26s) - (0.5)\left(9.81\frac{m}{s^2}\right)(4.26s)^2 = 114.21m - 89.01m = 25.2m$$

Por lo tanto la pelota sobrepasa la barda.

2 Un cazador dispara su arco de manera que sale disparada una flecha con una velocidad de 30 m/s e inclinación de 30^0 con respecto a la horizontal en el preciso instante en que se le lanza un puma desde una distancia de 17.22 m. El puma avanza con una velocidad rectilínea uniforme: V_p. ¿Calcula el valor de V_p si la flecha le pega al puma?

El tiempo de vuelo de la flecha t^1 esta dada por la expresión:

$$h = (v_o sen\Theta)t^1 + \frac{1}{2}g(t^1)^2$$

Para que llegue al piso h = 0 m. Sustituyendo resulta:

$$0 = (v_o sen\Theta)t^1 - \frac{1}{2}g(t^1)^2$$

Despejando t^1 y sustituyendo se obtiene:

$$t^1 = \frac{2v_o sen\Theta}{g} = \frac{2\left(10\frac{m}{s}\right)(sen30°)}{9.81\frac{m}{s^2}} = \frac{10\frac{m}{s}}{9.81\frac{m}{s^2}} = 1.01\ s$$

La distancia horizontal S recorrida por la flecha en t^1= 1.01 s, esta dada por:

$$S = (V_0 \cos\Theta)t^1$$

Sustituyendo resulta:

$$S = \left(10\frac{m}{s}\right)(0.866)(1.01s) = 8.74m$$

Finalmente la velocidad del puma esta dada por:

$$v_p = \frac{d - S}{t^1} = \frac{17.22m - 8.74m}{1.01s} = \frac{8.48m}{1.01s} = 8.39\frac{m}{s}$$

3 Un cañón dispara un proyectil con una velocidad inicial de 360 m/s. Se desea batir un blanco situado a una distancia horizontal de 1000 m del cañón y elevado a 300 m por encima de el. ¿Cuál debe de ser el ángulo de elevación del disparo?

Partiendo de las relaciones de alcance y altura del disparo:

$$R = v_o(cos\Theta)t$$

Despejando v_0 resulta:

$$v_o = \frac{R}{t(cos\Theta)}$$

Sustituyendo en la relación:

$$h = v_o(sen\Theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

Resulta;

$$h = R(tan\Theta) - \frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t de la expresión de alcance resulta:

$$t = \frac{R}{v_o(cos\Theta)}$$

Sustituyendo en h resulta:

$$h = R(tan\Theta) - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_o^2 cos^2\Theta}$$

$$h = R(tan\Theta) - \frac{1}{2}g\frac{R^2 sec^2\Theta}{v_o^2}$$

$$h = R(tan\Theta) - \frac{1}{2}g\frac{R^2(1 + tan^2\Theta)}{v_o^2}$$

$$h = R(\tan\Theta) - \frac{1}{2} g \frac{R^2}{v_o^2} - \frac{1}{2} g \frac{R^2 \tan^2\Theta}{v_o^2}$$

$$\frac{2v_o^2 h}{R^2 g} = \frac{2v_o^2(\tan\Theta)}{Rg} - 1 - Tan^2\Theta$$

$$0 = -\frac{2v_o^2(\tan\Theta)}{Rg} + 1 + Tan^2\Theta + \frac{2v_o^2 h}{R^2 g}$$

Resolviendo para tan Θ:

$$A = 1$$

$$B = -\frac{2v_o^2}{Rg}$$

$$c = \frac{2v_o^2 h}{R^2 g} + 1$$

Aplicando la formula general para ecuaciones de segundo grado:

$$\tan\Theta = \frac{-\left(-\frac{2v_o^2}{Rg}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2v_o^2}{Rg}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{2v_o^2 h}{R^2 g} + 1\right)}}{2(1)}$$

Sustituyendo resulta: $\tan\Theta = \frac{(264.48) \pm \sqrt{69949.67 - 31.73 - 4}}{2(1)} = \frac{264.48 \pm \sqrt{69913.94}}{2}$

$$\tan\Theta = \frac{-\left(-\frac{2(360\frac{m}{s})^2}{(1000m)\left(9.8\frac{m}{s}\right)}\right) \pm \sqrt{\left(-\frac{2\left(360\frac{m}{s}\right)^2}{(1000m)\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{2\left(360\frac{m}{s}\right)^2(300m)}{(1000m)^2\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)} + 1\right)}}{2(1)}$$

$$\tan\Theta = \frac{(26.44) \pm \sqrt{699.07 - 31.73 - 4}}{2(1)} = \frac{26.44 \pm \sqrt{663.34}}{2}$$

Las soluciones para Θ_1 y Θ_2 están dadas por:

$$\tan\Theta_1 = \frac{(26.44) + \sqrt{663.34}}{2} = \frac{26.44 + 25.75}{2} = \frac{52.19}{2} = 26$$

$$\Theta_1 = 87.8°$$

$$\tan\Theta_2 = \frac{(26.44) - \sqrt{663.34}}{2} = \frac{26.44 - 25.75}{2} = \frac{0.69}{2} = 0.345$$

$$\Theta_2 = 19°$$

Por consideraciones físicas el ángulo de elevación es: $\Theta = 19^o$.

4 Se deja caer una bomba de un aeroplano que vuela horizontalmente con una velocidad de 100 km/h y a una altura de 500 m.

a) ¿Cuánto avanzara la bomba antes de llegar al piso?

b)¿La velocidad y dirección de la bomba al momento de llegar al piso?

c) ¿Cuánto tiempo tardara el llegar al piso?

Conviene resolver primero el inciso c)

c)

Considerando el modelo:

$$h = v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Dado que v_{oy} = 0 m/s, resulta:

$$h = -\frac{1}{2}gt^2$$

Despejando t y sustituyendo resulta:

$$t = \sqrt{\frac{-2h}{g}} = \sqrt{\frac{-2(-500m)}{9.8\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{\frac{1000m}{9.8\frac{m}{s^2}}} = \sqrt{102.04s^2} = 10.1\ s$$

El tiempo que tarda la bomba en llegar al piso es t = 10.1 s b)

Dado que:

$$v_{fx} = v_{ox} = -100\,\frac{Km}{h} = -27.77\,\frac{m}{s}$$

y de la relación:

$$-g = \frac{v_{fy} - v_{oy}}{t}$$

Despejando v_{fy} y sustituyendo resulta:

$$v_{fy} = -gt + v_{oy} = -\left(9.8\,\frac{m}{s^2}\right)(10.1\ s) + \left(0\,\frac{m}{s}\right) = -98.98\,\frac{m}{s}$$

La magnitud de la velocidad resultante esta dada por:

$$v = \sqrt{v_{fx}^2 + v_{fy}^2} = \sqrt{\left(-27.77\,\frac{m}{s}\right)^2 + \left(-98.98\,\frac{m}{s}\right)^2} = \sqrt{518.47\,\frac{m^2}{s^2} + 9797.04\,\frac{m^2}{s^2}}$$

es decir:

$$v = \sqrt{10315.51\,\frac{m^2}{s}} = 101.56\,\frac{m}{s}$$

La dirección esta dada por:

$$\tan\Theta = \frac{v_{fy}}{v_{fx}} = \frac{-98.98\,\frac{m}{s}}{-27.77\,\frac{m}{s}} = 3.56$$

entonces:

$$\arctan\Theta = 74.32°$$

a)

A partir de la ecuación:

$$R = (v_{ox})t = \left(27.77\,\frac{m}{s}\right)(10.1s) = 280.47\,m$$

5 El pateador de un equipo de fútbol americano le pega al balón y este sale con una rapidez de 25 m/s. (Considere que la resistencia del aire es despreciable).

¿ Cuales son los ángulos máximo y mínimo que debe de ser pateado el balón con respecto a la horizontal para que se anote gol?, Si la línea de meta se localiza a 50 m del lugar en donde se efectúa la patada. La barra horizontal sobre la cual debe de pasar el balón esta a 3.44 m sobre el nivel del campo.

Considerando la ecuación::

$$R = v_o(\cos\Theta)t$$

Despejando t de la relación anterior resulta:

$$h = R\tan\Theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_0^2}\sec^2\Theta = R\tan\Theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_0^2}\left(1+\tan^2\Theta\right)$$

$$t = \frac{R}{v_o(\cos\Theta)}$$

Sustituyendo t en la expresión: $h = v_o(\operatorname{sen}\Theta)t - \frac{1}{2}gt^2$ resulta:

$$h = v_o\operatorname{sen}\Theta\left(\frac{R}{v_o\cos\Theta}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{R}{v_o\cos\Theta}\right)^2$$

Desarrollando la expresión anterior resulta:

$$h = R\tan\Theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_0^2}\sec^2\Theta = R\tan\Theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_0^2}\left(1+\tan^2\Theta\right)$$

Entonces:

$$h = R\tan\Theta - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_o^2} - \frac{1}{2}g\frac{R^2}{v_o^2}\tan^2\Theta$$

Resolviendo para una ecuación de segundo grado de tan Θ

$$gR^2 - 2RV_o^2\tan\Theta + gR^2\tan^2\Theta + 2V_o^2h = 0$$

identificando:

A = g R^2 B = - 2 R V_o^2 C = g R^2 + 2 V_o^2 h

Sustituyendo en la ecuación general para la solución de ecuaciones de segundo grado resulta:

$$\tan\Theta = \frac{-(-2RV_o^2) \pm \sqrt{(-2RV_o^2)^2 - 4(gR^2)(gR^2 + 2V_0^2 h)}}{2(gR^2)}$$

Desarrollando:

$$\tan\Theta = \frac{2RV_o^2 \pm \sqrt{4R^2V_o^4 - 4g^2R^4 - 8gR^2V_o^2 h}}{2gR^2}$$

Sustituyendo resulta:

$$\tan\Theta = \frac{2(50m)\left(25\frac{m}{s}\right)^2 \pm \sqrt{4(50m)^2\left(25\frac{m}{s}\right)^4 - 4\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)^2(50m)^4 - 8\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(50m)^2\left(25\frac{m}{s}\right)^2(3.44m)}}{2\left(9.8\frac{m}{s^2}\right)(50m)^2}$$

Reduciendo se obtiene:

$$\tan\Theta = \frac{62500\frac{m^3}{s^2} \pm \sqrt{3906250000\frac{m^6}{s^4} - 2401000000\frac{m^6}{s^4} - 421400000\frac{m^6}{s^4}}}{49000\frac{m^3}{s^2}}$$

$$\tan\Theta = \frac{62500\frac{m^3}{s^2} \pm \sqrt{1083850000\frac{m^6}{s^4}}}{49000\frac{m^3}{s^2}} = \frac{62500\frac{m^3}{s^2} \pm 32921.9\frac{m^3}{s^2}}{4900\frac{m^3}{s^2}}$$

Por lo tanto:

$$\tan\Theta_1 = \frac{62500\frac{m^3}{s^2} + 32921.6\frac{m^3}{s^2}}{49000\frac{m^3}{s^2}} = \frac{95421.6\frac{m^3}{s^2}}{49000\frac{m^3}{s^2}} = 1.9473$$

$$\Theta_1 = 62.81^o$$

$$tan\Theta_2 = \frac{62500\frac{m^3}{s^2} - 32921.6\frac{m^3}{s^2}}{49000\frac{m^3}{s^2}} = \frac{29578.4\frac{m^3}{s^2}}{49000\frac{m^3}{s^2}} = 0.604$$

$$\Theta_2 = 31.13^o$$

6 ¿Calcular el ángulo de elevación con el que debe de ser lanzado un proyectil que parte con una velocidad de 350 m/s para alcanzar un blanco situado en el mismo nivel que se encuentra a 4000 m de distancia?

Considerando la relación:

$$-g = \frac{v_f - v_o sen\Theta}{t}$$

Despejando t resulta:

$$t = \frac{v_f - v_o sen\Theta}{-g}$$

En particular el tiempo en que alcanza el proyectil la altura máxima corresponde a v_f = 0 m/s es decir la expresión anterior toma la forma:

$$t_s = \frac{-v_o sen\Theta}{-g}$$

Considerando que el tiempo que el proyectil alcanza la altura máxima corresponde al tiempo de subida t_s y el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada $t_s = t_b$ de manera que el tiempo en que el proyectil esta en el aire $t_a = t_s + t_b$, es decir:

$$t_a = t_s + t_b = \frac{-v_o sen\Theta}{-g} + \frac{-v_o sen\Theta}{-g} = \frac{-2v_o sen\Theta}{-g}$$

Sustituyendo t_a en la siguiente relación:

$$R = v_o(cos\Theta)t_a$$

Resulta:

$$R = (V_o\,cos\Theta)\left(\frac{2v_o sen\Theta}{g}\right)$$

Considerando la identidad trigonometrica: sen2Θ = 2 cosΘ senΘ y sustituyendo en la relación anterior se obtiene:

$$R = \frac{v_o^2 sen2\Theta}{g}$$

Despejando sen2Θ y sustituyendo R = 4000 m y v_o = 350 m/s resulta:

$$sen2\Theta = \frac{Rg}{v_o^2} = \frac{(4000m)(9.81m/s^2)}{(350m/s)^2} = \frac{39240m^2/s^2}{122500m^2/s^2} = 0.320$$

Dado que:

$$(sen2\Theta)^{-1} = 18.66°$$

Es decir:

$$2\Theta = 18.66^o$$

O finalmente:

$$\Theta = 9.33^o$$

Bibliografía

- Tippens P. E., Física, conceptos y aplicaciones, México, 2ª edición, Mc. Graw-Hill Interamericana, 1989.

- Stollberg R. y Hill F., Física, fundamentos y fronteras, México, Publicaciones Cultural, 1967.

- Pérez Montiel H., Física 1, Enseñanza Media Superior, México, 1992.

- Buenche F., Fundamentos de Física, México, Mc. Graw-Hill, 1993.

- Blackwood, O.H., Física General, México, Edit. Continental, 1990.

- Resnick D. y Holliday R., Física Vol. 1, México, CECSA, 1978.

- Hecht E., Física en perspectiva, México, Mc. Graw-Hill, 1993.

- Hewitt P.G., Conceptos de física, México, Limusa, 1993.