Sobre el Principio de Mínima Acción

Alexander Moreno Sánchez
Universidad Nacional de Colombia
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá D. C, Colombia.
amorenosa@unal.edu.co

Abstract

This paper presents some highlights of the known principle of minimum action. We emphasize historical and conceptual aspects, just as we stress the importance of the invariance of the principle against a coordinate transformation, also is show a brief application is not considered in conventional economic theory, we conclude with some comments.

1 Introducción

Clasicamente se ha desarrollado una cantidad física llamada la acción, esta cantidad es bastante abstracta, ya que no consiste en una cantidad medible directamente, ni tampoco surge como una relación entre otras cantidades físicas medibles, debe entenderse está cantidad como algo que encierra o abarca el sistema físico en cuestión, es decir que es una cantidad global, general, la cual contiene toda la información relevante del sistema, en especial cuando se habla de sistemas mecánicos, pero el concepto de acción se puede asociar a sistemas eléctricos, magnéticos, térmicos, químicos, biológicos, sociales, económicos, y bueno en general, el concepto de acción se puede extender a una gran variedad de sistemnas físicos, claro esta, que la dificultad surge cuando se interpretan o determinan las variables involucradas en la descripcción del sistema.

Una vez se tiene en mente el concepto de acción, el siguiente paso es realizar un análisis de tipo variacional, es decir aplicar el formalismo matemático que permite determinar los extremales o en términos sencillos las situaciones en las que se hace mínima tal cantidad. Bajo esta consideración, en términos técnicos, se encuentra lo que se conoce como "principio de mínima acción", es decir, qué hace que la acción que describe el sistema sea mínima.

Hay dos acciones clásicas las cuales conducen a dos diferentes principios de mínima acción, ellas son la acción de Maupertuis (W), y la acción de Hamilton (S), no obstante ellas se encuentran relacionadas mediante una transformación de Legendre.

Ahora bién, a lo largo de la historia se han observado muchos fenómenos físicos que en principio permiten inferir que dichos sistemas tienden a permanecer en estados de mínima energía, además de evolucionar a estados que involucran el menor gasto o cambio de energía, es allí, en esta observación que se apoya fuertemente el principio mencionado anteriormente.

Siendo un poco más prosaicos, podríase pensar la energía involucrada en los sistemas físicos análoga al dinero que utilizamos en la sociedad, el cual permea todos los ámbitos sociales, con la gran diferencia que el dinero se crea y se destruye, como sabemos todas las cosas como el trabajo mismo son valuables en dinero, por lo tanto esto se suma progresivamente y podría decirse que el dinero siempre esta en aumento, aunque, también sabemos que el dinero se destruye, es decir se pierde, sobre todo en las grandes crisis económicas. Bueno, esto permite endender que la energía igualmente permea todos los aspectos y elementos de un sistema físico, como se conoce del estudio de muchos fenómenos y sistemas físicos, aquí la gran diferencia con lo mencionado anteriormente es que la energía no se crea ni se destruye, es decir que la cantidad de energía creada en el universo es fija, permanece siempre la

misma cantidad independiente de las transformaciones físicas, espéculando un poco, se puede pensar que en el universo existen sistemas o procesos que crean energía, como procesos que destruyen energía, pero que en promedio permanece constante, claro está que nunca se han observado dichos fenómenos, por lo cual queda profundamente descartada la posibilidad de que se cree o destruya la energía.

Con estos aspectos, analogías e ideas, ya concretamente en el ámbito de la física, es decri de los sistemas físicos observables y medibles, conocemos que cada véz que el sistema cambia o evoluciona el gasto de energía es mínimo, lo cual en términos formales conduce a que la evolución del sistema este gobernada por las llamadas ecuaciones de movimiento.

En este corto artículo se mostrará el formalismo matemático que permite encontrar el principio de mínima acción[1][2].

2 Principio de Occam

El principio de mínima acción a lo largo de la historia también ha creado o impulsado otro tipo de análisis, como es el caso de el principio de economía en el pensamiento. El principio de economía establece que dados dos métodos, o, en general, dos modos o formas de pensamiento, con objeto de llevar a cabo descripciones, análisis o demostraciones, debe preferirse el método que alcance iguales resultados con menor número de medios conceptuales —o reglas, conceptos de todo tipo, etc.

Esta economía del pensamiento o intelectual, se simboliza en el mínimo esfuerzo en el proceso de las operaciones mentales.

El principio de economía puede aplicarse a los llamados a veces sistemas ideales, es decir, la Naturaleza o parte de ella, la cultura o parte de ella. El principio de economía como regla explícita ha sido destacado por varios filósofos a partir de las últimas décadas del siglo XIX, entre ellos Bertrand Russell (en la lógica), Ernst Mach (en la física y la epistemología) y Richard Avenarius (en la epistemología como estudio de la trama de la experiencia).

De los tres es Avenarius el que ha colocado el principio de economía más en el centro de su pensamiento. Avenarius empleó la expresión 'principio del menor gasto de energía' que es similar a 'principio de la mínima acción'; sin que por ello se confundan los dos principios, pues el de Avenarius continúa siendo esencialmente un principio del pensar.

Avenarius dio al principio de economía un nombre parecido al del principio de la mínima acción: el principio del mínimo gasto de energía. Manifiesta que toda la actividad del alma está regida por un principio de economía sin el cual no sería posible la conservación del individuo. Según este principio, el alma trata de obtener el mayor resultado posible con el mínimo esfuerzo posible. Si se aplica tal principio al acto de percibir, se advierte que lo que se tiene que apercibir es asimilado por la actividad que percibe, la cual le da forma y sentido de acuerdo con las experiencias anteriores. Con ello se forman hábitos intelectuales cuya organización constituye el fundamento del conocimiento. Toda la vida espiritual está regida por estas formas, las cuales consisten en reducir lo desconocido a lo conocido o en subsumir las representaciones particulares bajo conceptos generales. Así, el principio del mínimo gasto de energía opera de un modo omnipresente en la actividad destinada a comprender el mundo, pues sin tal principio no habría ni tal reducción ni tal subsunción.

Cuando la realidad que se trata de percibir es el todo, la Filosofía se encarga de ello, de modo que la actividad filosófica como pensar del todo puede definirse como un pensar del mundo según el principio del mínimo gasto de energía.

Edmund Husserl argumenta que: "Como quiera que se formule, el principio de economía del pensar tiene el carácter de un principio de evolución de adaptación que se refiere a la concepción de la ciencia como una adaptación de los pensamientos a las distintas esferas de los fenómenos, adaptación lo más adecuada posible o la que más fuerzas ahorra."

En la actualidad, la expresión 'economía del pensar' ha caído en desuso y ocupa poco a los filósofos; no obstante, ciertas doctrinas epistemológicas son particularmente aptas para formular un nuevo y más riguroso principio de economía del pensar.

Expone Vladimir Jankélévitch que el principio de economía forma la espina dorsal de una teoría utilitaria y biológica de la ciencia que traduce la creciente indiferencia experimentada por los filósofos con respecto al contenido de las cosas. El principio de economía

es adoptado por los que se interesan únicamente en el trabajo del espíritu y no en los problemas del espíritu. Distingue este autor entre economía cerrada: la limitación del esfuerzo, la reducción de las realidades a un mínimo, la sistematización y en particular la aspiración de la simetría; y economía abierta: la idealización de la Naturaleza por el espíritu, el hábito, siendo inventiva y adivinatoria. Aunque ambas economías se basan en el mismo fenómeno mnémico (que permanece en la memoria como una huella); y, además, la economía cerrada aparece como una degeneración de la abierta. Al darse una duplicidad en la economía, concluye, se da una alternativa. Principio de la mínima acción o de la menor acción, referido a los procesos de la Naturaleza. Se enuncia por él considerado su descubridor, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis: "La Naturaleza obra siempre empleando el menor esfuerzo o energía posibles para conseguir un fin dado." En un sentido más mecanicista que teleológico (de finalismo o finalidad). Principio que análogamente desarrollaron también Pierre Fermat, Gottfried Wilhelm Leibniz y Leonhard Euler.

La interpretación mecanicista del principio fue la dominante en el siglo XVIII, incluso se asegura que fue en este siglo descubierto aun considerando que el propio Maupertuis lo aplicaba no sólo a los fenómenos físicos sino también al Ser Primero en su producción de las cosas.

La interpretación teleológica del principio ofrece, por el contrario, muchos precursores; ya formulado en los casos en los que se insistía sobre la llamada ley de parsimonia en la Naturaleza. Ejemplos encontramos en Aristóteles, Ptolomeo, Averroes o Roberto Grosseteste, entre otros autores.

Uno de los problemas que surgen al adoptar la interpretación teleológica es si el Principio de la mínima acción debe entenderse como un principio real de la Naturaleza o bien como una regla pragmática, en cuyo caso el principio de la mínima acción es equivalente al principio de la economía del pensamiento. Aristóteles, Averrores y Grosseteste lo consideraban un principio real, mientras que Ptolomeo lo formuló como un principio pragmático.

Al correr del tiempo, Isaac Newton da sentido al principio como una regla de razonamiento en filosofía (filosofía natural, es decir, física). Ofrece varios aspectos en sus estudios: el de un principio del pensar, el de un supuesto sobre la realidad y el de una imagen teleológica pero dentro de un sentido mecanicista. Así lo formula: "No debemos admitir más causas de las cosas naturales que las que son a la vez verdaderas y suficientes para explicar sus apariencias. A este efecto, los filósofos dicen que la Naturaleza no hace nada en vano, y es tanto más en vano cuanto menos sirve; pues a la Naturaleza le agrada la simplicidad y no se viste con las galas de las causas superfluas"[4][8]

3 Formalismo Lagrangiano

Existen sistemas físicos en los cuales se puede construir una cantidad física llamada Lagrangiano. Es decir sistemas descritos por un conjunto de variables x^i , llamadas variables de configuración las cuales definen el llamado espacio de configuración. De este modo, el estado del sistema está dado por los valores de estas variables, es decir por un punto en el espacio de configuración. Pero como sabemos los sistemas físicos evolucionan cambiando su estado, de tal forma que la evolución es descrita por funciones del tipo $x^i(t)$, la cual describe la trayectoria del sistema en el espacio de configuración. Ahora bién, cada una de las posibles trayectorias describe diferentes estados evolutivos, o equivalentemente cada variación de un sistema se puede concebir mediante una trayectoria, entonces cualquier variación del sistema se verá afectada por una variación de la trayectoria, igualmente se tiene que para cada trayectoria posible se obtendrá un valor diferente para la cantidad que se ha llamado la acción.

Bueno, ahora debemos decir ¿cómo se construye la acción?. Cualquier cambio en el sistema producira una alteración o variación en la trayectoria, igualmente para cada trayectoria se obtendrá un estado diferente, en último diferente valor para la acción.

Cuando tenemos una función física que tiene un mínimo, una de las propiedades del mínimo es que si nos apartamos de él en una cantidad muy pequeña, a primer orden, la desviación de la función respecto de su valor mínimo es solamente de segundo ordén. Por lo tanto la acción debe ser una función de las variables de configuración y del tiempo, con esto en mente puede definirse la acción de la siguiente manera

$$S = \int_{t_1}^{t_2} f(t, x^i, \dot{x}^i) dt \ . \tag{1}$$

La función anterior es la que se ha llamado la acción, y la función que tenemos allí es la encargada de describir la trayectoria que sigue el sistema, y es esta función la que debe permanecer en un valor mínimo, si se desarrolla el formalismo matemático completo se concluye que la función que tenemos allí, debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$[\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial}{\partial \dot{x}^i})] f(t, x^i, \dot{x}^i) = 0 \ , \tag{2}$$

ahora bién, la función anterior es llamada el lagrangiano, y la ecuación anterior es llamada de Euler-Lagrange. Este formalismo tiene las siguientes ventajas:

- permite obtener de forma simple y directa las ecuaciones de movimiento "de evolución" de un sistema físico dado.

- el formalismo es construido, es decir f, en coordenadas arbitrarias o genéricas, sus resultados, sus consecuencias y predicciones deben ser independientes del sistema de coordenadas usadas.

- las ecuaciones de movimiento deben ser invariantes bajo transformaciones de coordenadas del espacio de configuración[2][3][4].

4 Invariantes en el cálculo variacional

Uno de los fenómenos más fascinantes en las ciencias físicas, es el impacto que han producido los conceptos de invarianza bajo una transformación de coordenadas. Esto es debido al hecho de que cuando se asume que la integral de la acción conduce a un principio variacional, ésta debe ser un invariante ya que describre de forma global el sistema físico en cuestión, por lo tanto el integrando debe ser una densidad escalar. La implicación profunda de esto establece una asunto que fué claramente reconocido por Hilbert, de tal forma que los problemas más simples en cálculo de variaciones requieren invarianza.

Comenzando con una breve formulación del problema más simple en el cálculo de variaciones, en general, sobre una variedad diferenciable X_n , es decir un espacio matemático diferenciable, después de la cual las invarianzas relevantes deben ser consideradas con algún detalle. Para desarrollar el formalismo completo, definimos una curva c, contenida en la variedad la cual es representada de forma parámetrica mediante las funciones $x^i = x^i(t)$, por simplicidad consideramos solamente curvas para las cuales la representación anterior son funciones de las llamadas clase C^2, es decir una vez diferenciable

$$\dot{x}^i = \frac{d}{dt} x^i \ , \tag{3}$$

donde el índice i el número de dimensiones de la variedad, ahora supongamos que nos dan una función de clase C^2, definida como

$$L = L(t, x^i, \dot{x}^i) \ , \tag{4}$$

la cual tiene $2n + 1$ variables independientes, referida desde ahora como el lagrangiano o función de lagrange. Si p_1, p_2 son dos puntos de la variedad unidos por la curva anterior, correspondientes a los valores t_1, t_2 del parámetro t, es decir que tenemos

$$p_1 = x^i(t_1) \ , \ p_2 = x^i(t_2) \ , \tag{5}$$

con lo cual se puede coinstruir la acción definida anteriormente, es decir

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x^i(t), \dot{x}^i(t)) dt \ . \tag{6}$$

El problema resultante en el cálculo de variaciones es el concerniente con la condición sobre la cual la curva c que debe satisfacer para que ella proporcione un valor extremo de la integral cuando es comparada con todas las otras curvas que pasen por los puntos p_1, p_2 (observar gráfica 1).

Ahora, retomando el problema de la invarianza de la integral fundamental anterior, para ello se consideraran los dos tipos totalmente diferentes de transformaciones

1. Transformación de coordenadas del tipo

$$x'^i = x'^i(x^h) \ , \tag{7}$$

2. Transformación de parámetros del tipo

$$\tau = \tau(t) \ . \tag{8}$$

Por lo tanto, se asume que la integral debe ser invariante ante estos dos tipos de transformaciones. Según lo anterior tenemos las siguientes relaciones

$$x^h = x^h(x'^i) \ , \tag{9}$$

la cual si derivamos respoecto al parámetro conduce a

$$\dot{x}^h = \frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\dot{x}'^i = \dot{x}^h(x'^i, \dot{x}'^i) \ . \tag{10}$$

Igualmente, la función lagrangiana debe ser invariante bajo la transformación de coordenadas, lo cual se puede escribir de la siguiente manera

$$L'(t, x'^i(t), \dot{x}'^i(t)) = L(t, x^h(x'^i), \dot{x}^h(x'^i, \dot{x}'^i)\ ) \ , \tag{11}$$

por lo tanto si diferenciamos respecto $\dot{x}'^i$, se obtiene

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\frac{\partial \dot{x}^h}{\partial \dot{x}'^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\frac{\partial x^h}{\partial x'^i} \ , \tag{12}$$

de tal forma que las derivadas $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}$ constituyen las componentes de un vector covariante. Sin embargo, si se diferencia respecto a x'^i se obtiene

$$\frac{\partial L'}{\partial x'^i} = \frac{\partial L}{\partial x^h}\frac{\partial x^h}{\partial x'^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\frac{\partial \dot{x}^h}{\partial x'^i} = \frac{\partial L}{\partial x^h}\frac{\partial x^h}{\partial x'^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^i \partial x'^l}\dot{x}'^l \tag{13}$$

esto muestra que las derivadas $\frac{\partial L}{\partial x^h}$ no forman las componentes de un tensor. En este momento debe recordarse que las derivadas $\frac{\partial \phi}{\partial x^h}$ de una función escalar $\phi(x^h)$ representan las componentes de un vector covariante, llamado el gradiente de ϕ, sin embargo, en el caso de la función lagrangiana escalar $L(t, x^i, \dot{x}^i)$ esto no es cierto debido a la dependencia de la función respecto a $\dot{x}^i$.

De alguna manera esto conduce a la construcción de un vector covariante asociado con las derivadas $\frac{\partial L}{\partial x^h}$ el cual puede representar un gradiente generalizado de $L(t, x^i, \dot{x}^i)$, esto se consigue eliminando el segundo término del lado derecho de la relación obtenida anteriormente, para lograrlo se diferencia $\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i}$ respecto al parámetro t, conduciendo a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i}\right) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\right)\frac{\partial x^h}{\partial x'^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\right) = \\ & \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\right)\frac{\partial x^h}{\partial x'^i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\frac{\partial^2 x^h}{\partial x'^i \partial x'^l}\dot{x}'^l \end{aligned} \tag{14}$$

sustrayendo de esta relación la relación obtenida previamente se obtiene lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{x}'^i}\right) - \frac{\partial L'}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^h}{\partial x'^i}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^h}\right] \ , \tag{15}$$

con esta relación se puede definir la siguiente cantidad

$$E_j(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^h}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^h} \ , \tag{16}$$

la cual constituye las componentes de un vector covariante, evidentemente este vector puede ser interpretado como un gradiente generalizado de la función lagrangiana, igualmente puede observarse que este representa las ecuaciones de Euler-Lagrange, previamente mencionadas.

Lo anterior muestra que el gradiente generalizado de la función lagrangiana es un vector invariante bajo una tranformación de coordenadas, por lo tanto la función lagrangiana y consecuentemente la acción de un sistema físico debe ser invariante bajo una transformación de coordenadas. Para la transformación parámetrica anotada anteriormente se puede concluir la inavarianza nuevamente, no se mostrará aquí explicitamente pero puede consultarse[3][6][7].

5 Aplicación no convencional

Clasicamente el principio de mínima acción se ha aplicado y se aplica con bastante frecuencia a los sistemas físicos, pero en esta ocasión se considerará un sistema económico o por lo menos un aspecto de la economía como objeto de la aplicación de tal principio. Se sabe que respecto a la planificación económica, existe una forma que permite describir y enfrentar este problema tan relevante. Un método es suponer que se puede pretender extremar una función llamada la función bienestar $L(x^i, \dot{x}^i)$, en un intervalo de tiempo, donde se

puede considerar que los argumentos de la función bienestar, los factores productivos x^i y su velocidad de producción $\dot{x}^i$, cada una de ellas dependiente del tiempo, ahora bién, si se aplica una primera variación a esta función, es decir si construimos la acción de este sistema y la sometemos a una variación obtenemos

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}^i) dt \ , \tag{17}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x^i, \dot{x}^i) dt \ , \tag{18}$$

lo cual constituye la ecuación funcional que al desarrollarla entregará la información y solucionará el problema planteado. Es decir, encontrará la dinámica del sistema planteado en términos de los factores de producción como de la velocidad con la que cambián dichos factores.

Siguiendo el camino propuesto en la introducción el problema planteado puede ser abordado, y encontrar así un isomorfismo entre las teorías económicas y la mecánica racional, es decir, se obtiene una serie de teoremas y propiedades que establecen un isomorfismo con la física.

Cabe destacar que todas estas propiedades, en una primera etapa tienen un carácter cualitativo, puesto que no se conoce la forma analítica o la expresión a extremar, sin embargo la solución puede ser obtenida punto a punto. Se puede partir de un punto en el espacio de fase, en general en este espacio, la descripción del movimiento de un sistema queda completamente determinado en función del tiempo cuando se conocen las magnitudes y , en donde se asume que dichas magnitudes pasan a ser las coordenadas de un punto de este espacio bidimensional llamado espacio de fase. Las distintas trayectorias en el espacio de fase representan los movimientos del sistema para diferentes condiciones iniciales de y , de manera tal que, una trayectoria dada representa toda la historia del sistema para un conjunto determinado de condiciones iniciales, de las cuales la dependencia es muy fuerte.

Para el caso que se está analizando, se trata de incrementar las variables y en y respectivamente, luego elegir en el entorno el punto que sea más representativo, y que satisfaga a la sociedad dentro del modelo que se está proponiendo. Esta órbita o trayectoria corresponde entonces al extremal de, en donde se procede de forma tal que al dejar que el sistema evolucione liberado a sí mismo (autorregulación), se pueda obtener una tendencia al tan anhelado equilibrio económico.

Volvamos al caso de la física matemática. Lo anterior quizás sea nuevo para la economía, sin embargo para la física esto es algo que puede ser abordado mediante el cálculo de variaciones, y la utilización del principio de Hamilton para establecer la formulación de Lagrange.

Como fué mencionado anteriormente, el problema del cálculo de variaciones consiste en determinar la función o la curva o camino que hace que la función o funcional (integrando) sea un extremal, es decir que tenga un valor máximo o mínimo. Atendiendo esto se llega como condición a la ecuación de Euler_Lagrange, de tal forma que tenemos lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0 \ , \tag{19}$$

donde el índice i recorre todo el conjun to de los factores productivos, junto con cada una de sus velocidades.

Según lo anterior existe un isomorfismo entre la mecánica racional y las teorías económicas, si se establece una correspondencia entre las coordenadas generalizadas y los factores de produción. De esta forma, a través de la utilización del principio de mínima acción y de los resultados obtenidos, es posible relacionar la mecánica racional con la economía y poder así establecer el isomorfismo entre la física y las teorías económicas.

Teniendo presente todo lo anterior, para la función bienestar se puede escribir una ecuación diferencial equivalente a la de Lagrange. Cabe destacar que en el caso económico la función (bienestar) es desconocida, pero que sin embargo, ésta se podría conocer en forma numérica punto a punto. Además es importante tener presente que la relación establecida entre la mecánica racional y las teorías económicas tiene como propósito motivar y despertar la curiosidad de cómo se podría enfrentar la descripción de un sistema económico que tienda al equilibrio, a partir de la utilización de un principio variacional y cuales serían las variables relevantes que se deberían controlar. Según nuestra opinión y dentro del contexto de la globalización, lo anterior puede ser un terreno muy fértil para

los economistas que se interesen por investigar algunas de las propiedades de los sistemas dinámicos. Igualmente es importante mencionar que el formalismo hay que extenderlo con todas sus implicaciones, para determinar los alcances y límites que pueda tener este formalismo dentro de las teorías económicas, también debe decirse que este formalismo dentro de las teorías económicas solamente es una herramienta más, pues como lo saben muchos la economía y los modelos económicos son temas de bastante complejidad[8].

6 Conclusiones

En los apartados anteriores se ha hecho una corta introducción histórica y conceptual al principio de mínima acción, además de haber ilustrado algunos aspectos matemáticos, como también hacer notable la importancia de el concepto de invarianza en este formalismo, sin pretender ser exhaustivo se muestran algunas ideas y conceptos que se involucran en tan importantante tema de las ciencias físico-matemáticas. También, se ha hecho una muy breve introducción a una aplicación de tipo no convencional, especificamente el tratar de hacer uso del formalismo en teoría económica. Como se sabe el formalismo del principio de mínima acción es de importancia central en las aplicaciones físicas y es una herramienta ineludible de las nuevas teorías físicas. También, uno de los propósitos de este trabajo es tratar de mostrar el alcance que tiene este principio, de hecho puede pensarse que las aplicaciones deben ser multiples, no solo en teoría económica, sino que también en ciencias sociales, en teorías psicológicas, teorías neurológicas, entre otras muchas.

References

[1] H. Godstein, Mecánica Clásica, Aguilar

[2] K. Symon, Mechanics, Addison Wesley

[3] Landau y Lifshitz, Mecánica, Revert

[4] S. Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos, Addison Wesley (1994)

[5] R. Devaney, Chaotic Dynamical System, Addison Wesley (1989)

[6] J. Pozo, Mecánica Racional, UDP (2001)

[7] Murray Spiegel, vector analisis, MacGraw Hill Book, 1981.

[8] http/ www.cienciaabierta.com

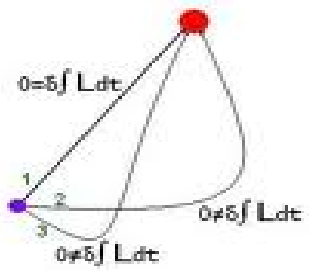

Figura 1: está gráfica muestra diferentes caminos a seguir en la evolución de un sistema físico, el camino más corto, desde luego es la línea recta, es decir este será el camino que seguirá el sistema y el camino o curva que el formalismo matemático deberá encontrar. (Imagen tomada de Google imagenes)