

INTRODUCCIÓN AL PROBLEMA DE LA MEDIDA Y SU RELACIÓN CON LA DECOHERENCIA[†]

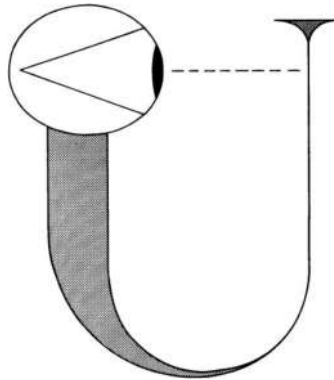
*Introduction to the Measurement Problem
and its Relation to Decoherence*

C. Miguel Barriuso Gutiérrez
Universidad Complutense de Madrid
Octubre 2018

Resumen

Since the origins of quantum theory, the measurement problem has been a matter of controversy and debate. The fact that some authors currently deny its existence while others consider it a fundamental key in the development of quantum mechanics makes it worthy of our attention. Specifically, the decoherence approach to quantum mechanics, in addition to its practical usefulness, reveals some intriguing insights about how to tackle some of the conceptual and formal issues raised by these debates. Due to the immensity of the literature on the subject, in this work we aim to introduce some key ideas and watch them in action in a few examples in order to clarify some aspects of this topic. We try to emphasize their conceptual significance without losing sight of their formal character.

* * *



*El universo visto como un
circuito auto-excitado.^[4]*

[†]El presente trabajo es una extensión del trabajo de fin de grado en Física del curso 2017/18, realizado por el autor y tutorizado por Ángel Rivas Vargas.

Índice

1. Introducción.	2
2. Formalismo de la matriz densidad.	2
2.1. Matriz densidad.	2
2.2. Estados puros y mezcla.	3
2.3. Evolución temporal de la matriz densidad.	4
2.4. Sistemas compuestos.	4
2.4.1. Entrelazamiento.	5
2.4.2. Traza parcial y matriz densidad reducida.	5
2.4.3. Descomposición de Schmidt.	6
3. Planteamiento del problema.	7
3.1. Postulado de proyección.	7
3.2. Esquema de von Neumann.	9
3.3. Ejemplo: dos sistemas de dos niveles.	10
3.4. Gatos de Schrödinger.	13
4. Decoherencia.	16
4.1. Introducción.	16
4.2. Decoherencia inducida por el entorno.	17
4.3. Ejemplo: N sistemas de dos niveles.	19
4.4. Superselección inducida por el entorno.	20
5. Discusión.	22
A. Apéndices.	24
A.1. Reseña histórica.	24
A.2. Consideraciones epistemológicas.	29
A.3. Teoría Clásica de la Medida.	30
Referencias.	34

Agradecimientos

A mis padres, por sus enseñanzas, sus cuidados, su apoyo y cariño incondicionales, y por colapsar mi función de onda que tanto me gusta vivir. Este trabajo es suyo también. A mis amigos, por su presencia, su ayuda, su entendimiento, su paciencia, su escucha, sus conversaciones y sus ánimos. A José por sus incentivos, a Alfredo por el trato, la escucha y su apoyo, a Patricia y a Ana por su tiempo, su ayuda y su visión, a Gabriel y Luis, por mantener viva la ilusión. A mi tutor, por el trato y el compromiso, aún en la inclemencia. A todos y todas, por compartir su conocimiento. A mi mismo, por la perseverancia, la paciencia y la ilusión.



1. Introducción.

A lo largo de la historia de la física moderna el así llamado ‘problema de la medida’ ha suscitado polémicas y debates que permanecen en la actualidad.^[1–7] En mi opinión estos debates son fructíferos para el desarrollo de la física y veo inevitable y productivo, sobre todo en el tema de este trabajo, que en ocasiones se den también en el ámbito de la filosofía de la ciencia. En cualquier caso, el hecho de que autores influyentes hayan mostrado posturas tan distintas respecto de este problema hace que sea digno de estudio, no solo por su importancia a nivel fundamental sino también por sus consecuencias prácticas.

Con este trabajo se pretende aclarar e introducir formal y conceptualmente las ideas necesarias para entender este supuesto problema y su relación con la teoría de la decoherencia que creo que ofrece una visión interesante. El formato de este trabajo es de revisión bibliográfica.^[8] La bibliografía ha sido seleccionada siguiendo un criterio que, tomando como eje central la discusión en el ámbito de la física fundamental, no ignore los aspectos históricos y epistemológicos que creo necesarios e inseparables en un entendimiento satisfactorio del problema de la medida.^[2,9]

En la sección 2 se revisan las herramientas matemáticas necesarias para plantear el problema, se pueden encontrar en mayor detalle en [10–14]. En la sección 3 se formula el problema, diseccionándolo en tres subproblemas y se estudian dos ejemplos que ayudarán a entenderlos. Posteriormente, en la sección 4 se introduce la teoría de la decoherencia y se exponen las respuestas que ofrece al problema de la medida, ilustrándose con un ejemplo. Estas dos últimas secciones se basan fundamentalmente en [3, 10, 11, 15–18]. Además se incluyen tres apéndices que tratan el origen y el desarrollo histórico del problema hasta el momento en el que hace su aparición la teoría de la decoherencia (A.1), unas breves consideraciones epistemológicas indispensables para entender bien las distintas respuestas al problema (A.2) y una introducción a la teoría clásica de la medida (A.3) como se encuentra en [11, 12, 19].

2. Formalismo de la matriz densidad.

2.1. Matriz densidad.

El *operador* o *matriz densidad* $\hat{\rho}$ es una descripción completa del estado de conocimiento sobre un sistema cuántico [11, p. 15]. El vector de estado $|\psi\rangle$ ya contiene toda la información de un sistema cuántico pero no expresa la incertidumbre clásica que podemos tener respecto de este, luego no representa todos nuestros posibles estados de conocimiento. Es decir, el sistema puede estar en un determinado estado $|\psi\rangle$ pero que no sepamos cuál es. Un estado de conocimiento completo sería una densidad de probabilidad sobre todos los estados posibles $|\psi\rangle$, la matriz densidad es una representación compacta de esto mismo.

Para obtenerla recordemos que el valor esperado para un observable \hat{O} se puede escribir como $\langle\hat{O}\rangle = \langle\psi|\hat{O}|\psi\rangle = \text{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi|\hat{O}\right)$. Si nuestro estado de conocimiento es una distribución de probabilidad sobre los estados $\{|\phi_n\rangle\}$, con probabilidad p_n para cada uno de ellos (con

$\sum_n p_n = 1$), el valor esperado de \hat{O} es,

$$\langle \hat{O} \rangle = \sum_n p_n \langle \phi_n | \hat{O} | \phi_n \rangle = \sum_n p_n \text{Tr}(|\phi_n\rangle\langle\phi_n| \hat{O}) := \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}), \quad (1)$$

donde,

$$\hat{\rho} := \sum_n p_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|. \quad (2)$$

Aquí lo único que estamos haciendo es *pesar* cada proyector con la probabilidad clásica p_n . Si expresamos nuestros estados en una determinada base, $|\phi_n\rangle = \sum_i c_{in} |i\rangle$, los elementos de $\hat{\rho}$ en esa base serían,

$$\rho_{ij} = \langle i | \hat{\rho} | j \rangle = \sum_n p_n c_{in} c_{jn}^* \xrightarrow{i=j} \rho_{ii} = \langle i | \hat{\rho} | i \rangle = \sum_n p_n |c_{in}|^2. \quad (3)$$

Los coeficientes $|c_{in}|^2$ (con $\sum_i |c_{in}|^2 = 1$, para cada n) representan la probabilidad (condicional) de encontrar el sistema en el estado $|i\rangle$ dado que inicialmente estuviera en el estado $|\phi_n\rangle$. Por tanto ρ_{ii} es la probabilidad total de encontrar al sistema en el estado $|i\rangle$. De aquí se sigue inmediatamente,

$$\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_i \langle i | \hat{\rho} | i \rangle = 1, \quad (4)$$

que expresa la conservación de la probabilidad, dado que la traza es invariante ante transformaciones unitarias.

2.2. Estados puros y mezcla.

Decimos que el estado es *puro*, en el caso de que no exista incertidumbre clásica, de que nuestro estado de conocimiento contenga solo un estado $|\psi\rangle = \sum_j c_j |j\rangle$ (uno de los $|\phi_n\rangle$). En ese caso la matriz densidad se reduce al proyector sobre ese estado,

$$\hat{\rho} = \hat{P}_\psi = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_{jk} c_j c_k^* |j\rangle\langle k|, \quad (5)$$

y satisface la conocida propiedad de los proyectores $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$. Ésta podría describir, por ejemplo, un conjunto de N fotones preparados en el estado de polarización $|\psi\rangle = c_h |h\rangle + c_v |v\rangle$, decimos que el sistema está en una *superposición* de los estados polarización horizontal $|h\rangle$ y vertical $|v\rangle$. Cualquier subconjunto del conjunto original puede ser descrito por la misma matriz densidad.

Por el contrario, se dice que es un estado *mezcla* (nos referiremos a él con una tilde $\hat{\tilde{\rho}}$) si la matriz densidad es una suma sobre estados,

$$\hat{\tilde{\rho}} = \sum_j p_j |j\rangle\langle j|, \quad (6)$$

y decimos que el sistema es una *mezcla estadística* de estados de la base $|j\rangle$. A diferencia que un estado puro, una mezcla cumple $\text{Tr} \hat{\tilde{\rho}}^2 < 1$ y por tanto $\hat{\tilde{\rho}}^2 \neq \hat{\tilde{\rho}}$. En este caso estaríamos describiendo un conjunto de fotones en los que una fracción $p_h = N_h/N$ están preparados en

polarización horizontal y el resto en polarización vertical, es decir, $\hat{\rho} = p_h \hat{P}_h + p_v \hat{P}_v$, con $P_h = |h\rangle\langle h|$ y $P_v = |v\rangle\langle v|$. Si cogiésemos el conjunto de fotones con una determinada polarización, esta matriz densidad no describiría nuestro estado de conocimiento. Esta descripción es la equivalente a cualquier suceso probabilístico clásico, por ejemplo, al tirar un dado de seis caras tendríamos, $\hat{\rho} = (1/6) \sum_{j=1}^6 |j\rangle\langle j|$, donde $|j\rangle$ representa el estado del dado correspondiente a obtener el número j .

2.3. Evolución temporal de la matriz densidad.

Partiendo de (2) para estados iniciales $|\psi_n(0)\rangle$ y aplicando la transformación unitaria mediada por el operador evolución \hat{U} llegamos a,

$$\rho(t) = \sum_n p_n \hat{U} |\psi_n(0)\rangle\langle\psi_n(0)| \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{\rho}(0) \hat{U}^\dagger, \quad (7)$$

derivando esta ecuación respecto de t llegamos a la *ecuación de von Neumann* o de *Liouville-von Neumann*¹[13] que representa la evolución temporal de la matriz densidad²,

$$i\hbar \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (8)$$

Así, esta ecuación describe una evolución unitaria (7), donde estados puros se transforman en estados puros. La ecuación de von Neumann es válida para sistemas *cerrados*, sea el Hamiltoniano dependiente del tiempo o no. Por completitud, se menciona rápidamente que para el caso de sistemas *abiertos*, en particular en el contexto de decoherencia (sección 4) esta ecuación ha de ser modificada añadiendo un término que da cuenta de la interacción con el entorno. Un ejemplo es la llamada *ecuación de Lindblad* (véase por ejemplo [13, p. 122]) y aunque no se verá en este trabajo, es fundamental en la descripción de sistemas cuánticos abiertos al entorno.

2.4. Sistemas compuestos.

En mecánica clásica el conocimiento de las propiedades de un sistema compuesto determina las propiedades de los subsistemas componentes. En mecánica cuántica esto no es así, se dan casos en los que aunque se conozca el estado del sistema compuesto, los subsistemas no admiten una descripción en términos de vectores de estado independientes. En tales casos el estado del sistema compuesto no se puede factorizar en términos de los estados de los subsistemas,

¹Es curioso que difiera en un signo de la *ecuación de evolución de Heisenberg* para operadores, pero hay que aclarar que estamos en la imagen de Schrödinger, donde los estados son los que evolucionan. Puede resultar extraño porque técnicamente $\hat{\rho}$ es un operador, pero representa el estado del sistema. Aunque en este formalismo tanto los observables como los estados sean operadores, los observables (en la imagen de Heisenberg) y los estados (en la de Schrödinger) han de evolucionar en el tiempo en *sentidos opuestos*, de tal manera que los valores esperados en ambas imágenes coincidan^[14]. De hecho la matriz densidad en la imagen de Heisenberg no depende del tiempo.^[10]

²Merece la pena resaltar la analogía que se da con la *ecuación de Liouville* (clásica), $\partial\rho/\partial t = \{H, \rho\}$, donde aquí ρ es la densidad de probabilidad en el espacio de fases. Es una expresión más del principio de correspondencia (débil) [3, p. 190] en donde se ve perfectamente la cuantización canónica: los análogos del corchete de Poisson y las transformaciones canónicas son el conmutador y las transformaciones unitarias respectivamente.

tal es el caso del entrelazamiento. La matriz densidad ofrece una descripción esclarecedora de estas situaciones.

2.4.1. Entrelazamiento.

El entrelazamiento requiere de exclusivamente de dos ingredientes, superposición y producto tensorial.

Entrelazamiento. Se dice que dos sistemas \mathcal{A} y \mathcal{B} están entrelazados respecto de un grado de libertad si su estado total $|\psi\rangle_{\mathcal{AB}}$, relativo a ese grado de libertad, no puede escribirse de manera factorizada como un producto $|\phi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\varphi\rangle_{\mathcal{B}}$.^[10]

Esto significa que los dos subsistemas constituyen un todo inseparable y no se pueden tratar independientemente³. Por el contrario, decimos que el estado $|\psi_{\mathcal{AB}}\rangle$ es *separable* si podemos escribirlo de manera factorizada respecto a uno u otro subsistema, $|\psi\rangle_{\mathcal{AB}} = |\phi\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |\varphi\rangle_{\mathcal{B}}$. De la misma manera, en términos de la matriz densidad, decimos que $\hat{\rho}$ es separable si podemos escribirla como,

$$\hat{\rho} = \sum_j p_j \hat{\rho}_j^{\mathcal{A}} \otimes \hat{\rho}_j^{\mathcal{B}}, \quad (9)$$

con $p_j \geq 0$ y $\sum_j p_j = 1$. Esta última ecuación expresa el hecho de que un estado separable puede ser preparado independientemente por dos observadores que reciban la misma información. Merece la pena resaltar que mientras que el entrelazamiento implica superposición, el argumento inverso obviamente no es cierto.

2.4.2. Traza parcial y matriz densidad reducida.

La traza parcial de la matriz densidad para un sistema compuesto $\hat{\rho}_{\mathcal{AB}}$, sobre los estados de \mathcal{A} se define como,

$$\text{Tr}_{\mathcal{A}}(\hat{\rho}_{\mathcal{AB}}) = \sum_j {}_{\mathcal{A}}\langle j | \hat{\rho}_{\mathcal{AB}} | j \rangle_{\mathcal{A}} = \hat{\rho}_{\mathcal{B}}, \quad (10)$$

donde $\{|j\rangle_{\mathcal{A}}\}$ es una base de autoestados de un observable de \mathcal{A} . Se dice que estamos “trazando sobre \mathcal{A} ”. Se llama a la matriz densidad obtenida $\hat{\rho}_{\mathcal{B}}$, la matriz densidad *reducida* del sistema \mathcal{B} . Esta representa la máxima información que se puede extraer sobre \mathcal{B} mediante operaciones locales, sin tener en cuenta el estado del sistema \mathcal{A} . Por ejemplo si se tienen dos fotones \mathcal{A} y \mathcal{B} en un estado tipo Bell, $|\psi^+\rangle$ (nota al pie 3), con los estados de polarización de la sección 2.2, la matriz densidad será,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{AB}} = \frac{1}{2} \left(|h\rangle\langle h|_{\mathcal{A}} \otimes |v\rangle\langle v|_{\mathcal{B}} + |h\rangle\langle v|_{\mathcal{A}} \otimes |v\rangle\langle h|_{\mathcal{B}} + \right. \\ \left. + |v\rangle\langle v|_{\mathcal{A}} \otimes |h\rangle\langle h|_{\mathcal{B}} + |v\rangle\langle h|_{\mathcal{A}} \otimes |h\rangle\langle v|_{\mathcal{B}} \right), \quad (11)$$

³Como por ejemplo, los famosos estados de Bell, $|\psi^{\pm}\rangle = (1/\sqrt{2})(|0\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |0\rangle_{\mathcal{B}} \pm |1\rangle_{\mathcal{A}} \otimes |1\rangle_{\mathcal{B}})$.

donde los subíndices afectan también al primer *ket* de cada producto externo. Las matrices densidad reducidas son,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = \frac{1}{2} \left(|h\rangle\langle h|_{\mathcal{A}} + |v\rangle\langle v|_{\mathcal{A}} \right) \quad \text{y} \quad \hat{\rho}_{\mathcal{B}} = \frac{1}{2} \left(|h\rangle\langle h|_{\mathcal{B}} + |v\rangle\langle v|_{\mathcal{B}} \right). \quad (12)$$

Como vemos ambas matrices reducidas representan estados mezcla: describen conjuntos de fotones en los que la mitad están en una polarización y el resto en la otra. Expresan el hecho de que al medir la polarización de uno de los dos fotones, se tendrá un 50% de probabilidad de obtener una de las dos polarizaciones. El carácter mixto de estas es debido a que $\hat{\rho}_{\mathcal{AB}}$ es un estado entrelazado. Por otro lado, la traza parcial de un estado puro y separable de un sistema compuesto da lugar a una matriz densidad reducida correspondiente a un estado puro. Por ejemplo, para $\hat{\rho}_{\mathcal{AB}} = |\phi\rangle\langle\phi|_{\mathcal{A}} \otimes |\varphi\rangle\langle\varphi|_{\mathcal{B}}$,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{A}} = |\phi\rangle\langle\phi|_{\mathcal{A}} \otimes \sum_j {}_{\mathcal{B}}\langle j|\varphi\rangle_{\mathcal{B}} \langle\varphi|j\rangle_{\mathcal{B}} = |\phi\rangle\langle\phi|_{\mathcal{A}}, \quad (13)$$

donde $\{|j\rangle_{\mathcal{B}}\}$ es una base de autoestados de \mathcal{B} .

2.4.3. Descomposición de Schmidt.

Sería interesante tener un criterio que pudiésemos aplicar a la hora saber si un estado es entrelazado o no. La descomposición de Schmidt proporciona dicho criterio para el caso de estados puros.

Descomposición de Schmidt. Para cualquier estado puro $|\psi\rangle_{\mathcal{AB}}$ de un sistema compuesto \mathcal{AB} siempre es posible encontrar conjuntos ortonormales de vectores $\{|j\rangle_{\mathcal{A}}\}$ para el sistema \mathcal{A} y $\{|j\rangle_{\mathcal{B}}\}$ para el sistema \mathcal{B} tales que,

$$|\psi\rangle_{\mathcal{AB}} = \sum_j c_j |j\rangle_{\mathcal{A}} |j\rangle_{\mathcal{B}}, \quad (14)$$

con $c_j \geq 0$ reales y $\sum_j c_j^2 = 1$.

No obstante, este teorema solo afirma la unicidad de tal descomposición si los c_j son todos distintos entre sí [16, p. 53]. Como veremos más adelante, este hecho guarda una importante relación con el problema de la medida.

El teorema anterior permite reescribir el estado de un sistema $|\psi\rangle$ compuesto por dos subsistemas de dimensión N ,

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k=1}^N C_{jk} |a_j\rangle |b_k\rangle, \quad \text{como} \quad |\psi\rangle = \sum_{n=1}^N c_n |v_n\rangle |w_n\rangle, \quad (15)$$

convirtiendo la suma doble en una única suma. El número de coeficientes $c_n \neq 0$, se llama *número de Schmidt*. Si el número de Schmidt para un estado puro $|\psi\rangle$ de un sistema compuesto es igual a 1, entonces es un estado separable, si es > 1 es un estado entrelazado. Más aún, $|\psi\rangle$

es un estado separable si y solo si las correspondientes matrices densidad reducidas de ambos subsistemas son puras.

3. Planteamiento del problema.

El así llamado ‘problema de la medida’ hace referencia a diferentes cuestiones que varios autores han ido planteando a lo largo de la historia^[1-7], algunas de esas cuestiones son interpretativas y otras tienen que ver con el formalismo [2, p. 9; 3, p. 115]. Este trabajo se centrará en estas últimas nombrando brevemente las primeras. En este sentido, el problema de la medida guarda estrecha relación con el problema de la transición del mundo cuántico al mundo clásico⁴, se puede dividir^[16,18] en tres subproblemas:

PM1 El problema de la *base privilegiada*.

PM2 El problema de la *no observación de interferencia*.

PM3 El problema de la *particularidad de los resultados*.

A lo largo de esta sección nos iremos encontrando con cada uno de ellos. Veremos que se puede considerar los dos primeros como problemas del formalismo y el tercero más como un problema de la interpretación. Algunos de los autores revisados^[3,10,11] consideran que el problema de la medida está compuesto solo por **PM2** o por **PM2** y **PM3**, prestando poca importancia a **PM1**. Sin embargo, otros autores sí ven necesario tratarlo en pie de igualdad con el resto⁵. En cualquier caso se puede decir que la historia comienza⁶ con el postulado de proyección de von Neumann, que fue el primero en tratar el proceso de medición formalmente en su ya legendaria obra *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* de 1932.

3.1. Postulado de proyección.

Se supone que el estado de un sistema antes de la medida es una superposición de auto-estados $|o_j\rangle$ de un determinado observable \hat{O} ,

$$|\psi\rangle = \sum_j c_j |o_j\rangle. \quad (16)$$

Como dicta el postulado de proyección (fuerte), después de la medida el estado del sistema será una de las componentes de dicha superposición $|o_k\rangle$. La cuestión es que en general es imposible realizar el proceso $|\psi\rangle \rightarrow |o_k\rangle$ por medio de una transformación unitaria, y como sabemos, la evolución temporal en mecánica cuántica es una transformación de este tipo. De hecho, siendo $\hat{U} = e^{-i\hat{H}t/\hbar}$,

⁴Tal afirmación puede ser fuente de confusión [3, p. 167], se tratará más a fondo en la sección 5.

⁵Véase [16, p. 55] y referencias incluidas.

⁶En realidad el origen del problema de la medida se puede situar en distintos momentos, en los primeros debates sobre la interpretación de Copenhagen,^[7] en 1935 cuando Schrödinger sacó el artículo de su famoso gato [3, p. 113], en 1926 con un artículo de Max Born [6, p. 435], o incluso en 1913 con el postulado cuántico de Bohr [1, p. 17].

$$\hat{U}|\psi\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar} \sum_j c_j |\phi_j\rangle = \sum_j c_j(t) |\phi_j\rangle, \quad (17)$$

donde $\hat{H}|\phi_j\rangle = E_j|\phi_j\rangle$. Por tanto es inmediato que,

$$c_j(t) = c_j e^{-iE_j t/\hbar} \neq 0, \quad \text{si } c_j \neq 0. \quad (18)$$

Este es un buen primer acercamiento al problema (al menos de **PM2** y **PM3**): la incapacidad de dar cuenta de la evidencia experimental o_k por medio de la evolución temporal unitaria \hat{U} .

Vamos ahora a reformular lo anterior en términos del formalismo de la matriz densidad (sección 2.1) que como veremos, aporta una visión muy enriquecedora. La matriz densidad correspondiente al estado puro de (16) es,

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_j |c_j|^2 |o_j\rangle\langle o_j| + \sum_{j \neq k} c_j c_k^* |o_j\rangle\langle o_k|. \quad (19)$$

Al medir se obtiene un resultado determinado, el autovalor correspondiente a *un* autoestado del observable medido, es decir, nunca se observa superposición en los estados del aparato de medida. La condición necesaria para que esto ocurra es que el aparato \mathcal{A} , que realiza la medida en el sistema \mathcal{S} , pueda extraer información de \mathcal{S} , a saber, el valor del observable que se está midiendo. Esto es posible solo si el estado del sistema es una mezcla de autoestados de dicho observable, de la misma manera que, por ejemplo, la mezcla estadística que describe el estado de un dado (clásico) antes de que se haya visto el resultado. Por tanto después de la medida se debe obtener una mezcla clásica,

$$\hat{\hat{\rho}} = \sum_j |c_j|^2 |o_j\rangle\langle o_j|. \quad (20)$$

De nuevo, ninguna transformación unitaria (ahora actuando sobre un operador) puede dar cuenta del cambio,

$$\hat{\rho} \rightarrow \hat{\hat{\rho}} = \sum_j \hat{P}_j \hat{\rho} \hat{P}_j. \quad (21)$$

Donde $\hat{P}_j = |o_j\rangle\langle o_j|$ son los proyectores sobre los autoestados de \hat{O} . La expresión (21) se conoce como *mezcla de Lüders*^[20] y representa el postulado de proyección en el formalismo de la matriz densidad, a veces llamado *postulado de proyección débil*. De hecho, es fácil ver que la evolución unitaria transforma estados puros en estados puros. La matriz densidad tras una evolución unitaria es simplemente $\hat{\rho}_t = \hat{U} \hat{\rho}_0 \hat{U}^\dagger$, tomando su cuadrado se obtiene,

$$\hat{\rho}_t^2 = \hat{U} \hat{\rho}_0 \hat{U}^\dagger \hat{U} \hat{\rho}_0 \hat{U}^\dagger = \hat{U} \hat{\rho}_0^2 \hat{U}^\dagger = \hat{\rho}_t, \quad (22)$$

y dado que se ha partido de un estado puro que cumple $\hat{\rho}_0^2 = \hat{\rho}_0$, se sigue que $\hat{\rho}_t$ también es un estado puro $\hat{\rho}_t^2 = \hat{\rho}_t$. Aun así suponiendo que dicha transformación existiera y que por tanto $\hat{\hat{\rho}} = \hat{U} \hat{\rho} \hat{U}^\dagger$, elevando al cuadrado esta última expresión, tomando trazas a ambos lados

y usando la propiedad cíclica de la traza, resulta,

$$\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) \stackrel{!}{=} \mathrm{Tr}(\hat{U}\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{\rho}_0\hat{U}^\dagger) = \mathrm{Tr}(\hat{U}^\dagger\hat{U}\hat{\rho}^2) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2), \quad (23)$$

pero esto es una contradicción puesto que, como se vió en la sección 2.2, $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) = 1$, mientras que $\mathrm{Tr}(\hat{\rho}^2) < 1$.

No obstante, el postulado de proyección no es del todo satisfactorio por varios motivos. De primeras, representa un cambio de estado discontinuo, irreversible, no causal, instantáneo y no unitario.^[10] Mientras que algunas de estas propiedades no son catastróficas, otras son líneas rojas que en general no se quiere que una teoría física cruce. La versión fuerte entra en apuros si se consideran observables que tengan espectro continuo como la posición o el momento, dado que el estado proyectado no es normalizable.^[3] Además, parece atribuir una importancia injustificada al proceso de medición, dado que en principio no hay razones para distinguir este proceso de otras interacciones que se den entre pares de sistemas. Más aún, empleando el postulado de proyección, solo se puede llegar a conclusiones sobre el estado en el que quedó el sistema inmediatamente *después* de la medida. Aunque esto puede ser útil en el caso de medidas que no alteren el estado del sistema (llamadas medidas de primera especie, que se tratarán en la próxima sección 3.2), en muchas situaciones experimentales esto supone un problema⁷, de hecho, como se verá en la próxima sección 3.2, éste es el comportamiento que se esperaría de un procedimiento de preparación, no de detección. De este último se esperaría obtener información sobre el estado del sistema inmediatamente *anterior* a realizar la medida, dado que la detección puede alterarlo (medida de segunda especie).

Una crítica al postulado de proyección lo es también al concepto de medidas de primera especie. De hecho Muynck afirma del primero que “. . . debe ser relegado al ámbito del folclore de la mecánica cuántica” [3 p. 23.] y del segundo que “. . . es como mucho de importancia teórica, y rara vez realizado en la práctica.” [3 p. 129.]. No obstante, al menos por esta importancia formal y debido al carácter introductorio y pedagógico de este trabajo, solo se considerarán medidas de primera especie.

3.2. Esquema de von Neumann.

A continuación se describe el *esquema de medida de von Neumann* (del inglés, *von Neumann measurement scheme*). Se supone que queremos medir un observable \hat{O}_S de un sistema S , cuyo estado se puede expresar como un vector en el espacio de Hilbert H_S con base $\{|o_j\rangle\}$ de autoestados de \hat{O}_S . El estado del aparato de medida \mathcal{A} , que se supone cuántico⁸, vive en el espacio de Hilbert $H_{\mathcal{A}}$ con base de autoestados $\{|a_j\rangle\}$ del observable $\hat{O}_{\mathcal{A}}$. Estos últimos representan diferentes posiciones de un puntero en el aparato de medida, que se espera corres-

⁷Por ejemplo en un detector ideal de fotones, el estado final es el vacío, dado que todos los fotones han sido absorbidos por el detector, no el estado correspondiente al número de fotones que se han detectado [3 p. 127].

⁸Esta es una de las principales diferencias entre las visiones de Bohr (y en general de la interpretación de Copenhague) y von Neumann. Bohr, adhiriéndose al principio de correspondencia fuerte, asume que tanto el montaje experimental y los resultados de las medidas deben ser descritos en términos clásicos, puesto que en esos términos se entiende nuestra cotidianidad [3, p.192].

pondan a los distintos estados $|o_j\rangle$ en los que puede estar el \mathcal{S} después de la medida. Se asume que antes de la medida, \mathcal{A} se encuentra en un estado inicial $|a_0\rangle$ y \mathcal{S} en $|o_j\rangle$, a este proceso se le llama *preparación* del estado. Se espera que el proceso que tenga lugar sea $|o_j\rangle |a_0\rangle \rightarrow |o_j\rangle |a_j\rangle$ para cualquier j .

Se aprecia que en el proceso considerado el estado final de \mathcal{S} no cambia si ha sido preparado en un autoestado del observable a medir. Por ello también se conoce a esta tipo de medida como medida *ideal* o medida de *primera especie*⁹. En este caso el estado final $|o_j\rangle |a_j\rangle$ es separable, es decir no hay entrelazamiento. Sin embargo, si el estado inicial del sistema está en superposición,

$$|\psi_{\mathcal{S}}\rangle = \sum_j c_j |o_j\rangle, \quad (24)$$

a causa de la linealidad de la ecuación de Schrödinger, el conjunto $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ evoluciona según,

$$|\psi_{\mathcal{S}}\rangle |a_0\rangle = \left(\sum_j c_j |o_j\rangle \right) |a_0\rangle \rightarrow |\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle = \sum_j c_j |o_j\rangle |a_j\rangle. \quad (25)$$

Este es el tipo de evolución característico del esquema de medida de von Neumann. El estado $|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle$ es en general un estado entrelazado (no separable), es decir, ya no se puede atribuir estados independientes a \mathcal{S} y \mathcal{A} . La superposición presente en el estado inicial de \mathcal{S} ha sido ‘amplificada’ a la escala del aparato de medida (típicamente macroscópico).

En (25) ya aparece uno de los problemas que se describía al inicio de la sección, a saber, el problema de la base privilegiada (**PM1**): el observable que está siendo medido no está unívocamente definido, es decir, $|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle$ se puede expresar en otras bases tales que,

$$|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle = \sum_j c_j |o_j\rangle |a_j\rangle = \sum_j c'_j |o'_j\rangle |a'_j\rangle = \dots. \quad (26)$$

Aunque normalmente se requiere que los $|a_j\rangle$ sean ortogonales, esto solo impone, vía descomposición de Schmidt (sección 2.4.3), que la descomposición de (25), con c_j reales y $\sum c_j^2 = 1$, es única solo si todos los c_j son diferentes entre ellos.

Además no está nada claro cómo un proceso de este tipo puede describir el concepto cotidiano de medida, en el que estados como $|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}}\rangle$ no parecen tener cabida. A este proceso se lo conoce como *premedida*, en el que se establece la correlación entre \mathcal{S} y \mathcal{A} .¹⁰

3.3. Ejemplo: dos sistemas de dos niveles.

A continuación se ilustra con un ejemplo^[10] todo esto que venimos contando. Se consideran dos sistemas de dos niveles que van a jugar el papel de sistema \mathcal{S} y aparato de medida \mathcal{A} .

⁹Término acuñado por Pauli en 1927 [10, p. 285]. Ver también [3, p. 127]

¹⁰No obstante, este esquema es una simplificación, de manera más realista un aparato de medida puede describirse como compuesto de tres partes: la que muestra el resultado de manera legible para un ser humano (*puntero*), y que por tanto ha de ser macroscópica, la que interacciona directamente con el sistema a medir (*medidor*), que por tanto debe ser microscópica, y la que amplifica la información contenida en el medidor para que pueda ser mostrada por el puntero (*amplificador*) [10, p. 280]. Aún así, por simplicidad se reducirá el aparato de medida a una sola parte a describir cuánticamente, sin que esto suponga pérdida de generalidad en cuanto al objetivo de este trabajo.

Por simplicidad se reduce el aparato de medida al *medidor* \mathcal{M} (nota al pie 10), esto es, el componente de \mathcal{A} que interactúa directamente con \mathcal{S} . Se elige como observable a medir del sistema, el operador de esín, $\hat{\sigma}_z^{\mathcal{S}} = |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{S}} - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{S}}$ y como observable de \mathcal{M} el operador $\hat{\sigma}_x^{\mathcal{M}} = |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{M}} + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{M}}$. Este último será el responsable de registrar la información sobre el estado del sistema. Se supone que \mathcal{S} y \mathcal{M} están inicialmente en los estados (preparación),

$$|\psi\rangle^{\mathcal{S}} = c_{\uparrow}|\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} \quad \text{y} \quad |\psi\rangle^{\mathcal{M}} = |\downarrow\rangle^{\mathcal{M}}, \quad (27)$$

donde se denotan sin subíndice los autoestados de $\hat{\sigma}_z$. La matriz densidad correspondiente al estado inicial compuesto sería,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{SM}}(0) = \left(|c_{\uparrow}|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{S}} + |c_{\downarrow}|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{S}} + c_{\uparrow}c_{\downarrow}^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{S}} + c_{\downarrow}^*c_{\uparrow} |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{S}} \right) \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{M}}. \quad (28)$$

Por tanto, si después de la interacción el sistema está en el estado $|\downarrow\rangle^{\mathcal{S}}$, se espera que el estado de \mathcal{M} permanezca inalterado, y cambie a $|\uparrow\rangle^{\mathcal{M}}$ si está en $|\uparrow\rangle^{\mathcal{S}}$. Es decir, se espera tener una correspondencia uno a uno entre los autoestados del observable medido $\hat{\sigma}_z^{\mathcal{S}}$ y los del observable medidor $\hat{\sigma}_x^{\mathcal{M}}$. Un Hamiltoniano de interacción que produce este efecto es,

$$\hat{H}^{\mathcal{SM}} = \varepsilon (\mathbb{1} + \hat{\sigma}_z^{\mathcal{S}}) \otimes \hat{\sigma}_x^{\mathcal{M}}, \quad (29)$$

donde ε es una función de acoplamiento, dependiente del montaje experimental, que se encargará de activar la interacción en $t = 0$ y desactivarla en $t = \tau$.¹¹ Ahora lo único que se tiene que hacer es calcular $|\psi(\tau)\rangle^{\mathcal{SM}}$, es decir, aplicar el operador evolución $\hat{U}^{\mathcal{SM}} = e^{-i\tau\hat{H}^{\mathcal{SM}}/\hbar}$ al estado inicial compuesto $|\psi(0)\rangle^{\mathcal{SM}} = |\psi\rangle^{\mathcal{S}} \otimes |\psi\rangle^{\mathcal{M}}$,¹²

$$|\psi(\tau)\rangle^{\mathcal{SM}} = \hat{U}^{\mathcal{SM}} |\psi(0)\rangle^{\mathcal{SM}}. \quad (30)$$

Para ello se debe expresar el estado inicial de \mathcal{M} en la base de autoestados de $\hat{\sigma}_x^{\mathcal{M}}$. Sabiendo que,

$$|\uparrow\rangle^{\mathcal{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_x^{\mathcal{M}} + |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{M}} \right) \quad \text{y} \quad |\downarrow\rangle^{\mathcal{M}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_x^{\mathcal{M}} - |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{M}} \right), \quad (31)$$

sustituyendo esta última expresión en (27b) y el resultado, junto con (27a), en (30), se obtiene,

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle^{\mathcal{SM}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\tau\varepsilon(\mathbb{1} + \hat{\sigma}_z^{\mathcal{S}})\hat{\sigma}_x^{\mathcal{M}}/\hbar} \left(c_{\uparrow}|\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} + c_{\downarrow}|\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} \right) \left(|\uparrow\rangle_x^{\mathcal{M}} - |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{M}} \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(c_{\uparrow} e^{-2i\tau\varepsilon/\hbar} |\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} |\uparrow\rangle_x^{\mathcal{M}} + c_{\downarrow} |\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} |\uparrow\rangle_x^{\mathcal{M}} - c_{\uparrow} e^{+2i\tau\varepsilon/\hbar} |\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{M}} - c_{\downarrow} |\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{M}} \right) \end{aligned} \quad (32)$$

¹¹Se pueden elegir distintas formas para dicha función, siendo la más sencilla una función escalón que sea constante en el intervalo deseado y se anule en cualquier otro punto [10, p. 283].

¹²A partir de ahora se omitirá el \otimes para referirse al producto tensorial mientras no haya ambigüedad.

Invirtiendo (31) y sustituyéndolas en (32), se expresa todo respecto de los autoestados de $\hat{\sigma}_z$,

$$\begin{aligned} |\psi(\tau)\rangle^{\mathcal{SM}} = & -ic_{\uparrow} \sin\left(\frac{2\tau\varepsilon}{\hbar}\right) |\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} |\uparrow\rangle^{\mathcal{M}} + c_{\downarrow} |\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle^{\mathcal{M}} + \\ & + ic_{\uparrow} \cos\left(\frac{2\tau\varepsilon}{\hbar}\right) |\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle^{\mathcal{M}}. \end{aligned} \quad (33)$$

Eligiendo, por simplicidad, el tiempo de interacción, $\tau = \pi\hbar/4\varepsilon$, de tal manera que anule el coseno del último término, finalmente resulta,

$$|\psi(\tau)\rangle^{\mathcal{SM}} = -ic_{\uparrow} |\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} |\uparrow\rangle^{\mathcal{M}} + c_{\downarrow} |\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle^{\mathcal{M}}, \quad (34)$$

que es un estado entrelazado. La matriz densidad correspondiente sería,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\mathcal{SM}}(\tau) = & |c_{\uparrow}|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{S}} \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{M}} + ic_{\uparrow}^* c_{\downarrow} |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{S}} \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{M}} + \\ & + |c_{\downarrow}|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{S}} \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{M}} - ic_{\uparrow} c_{\downarrow}^* |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{S}} \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{M}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Mientras que el estado después de la medida, que se obtiene aplicando el postulado de proyección (21), es,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{SM}} = |c_{\uparrow}|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{S}} \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow|_{\mathcal{M}} + |c_{\downarrow}|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{S}} \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|_{\mathcal{M}}, \quad (36)$$

en acuerdo con (20) en tanto que los términos no diagonales han desaparecido produciendo una mezcla estadística.

Recapitulando, si se prepara \mathcal{S} inicialmente en superposición respecto del observable a medir, entonces el estado compuesto de $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ está entrelazado. La premedida corresponde al estado intermedio (34, 35) entre el estado inicial (27, 28) y el de después de la medida (36), en el que se establece la correlación entre sistema y aparato. Hay que poner cuidado en separar la preparación, donde se seleccionan los estados iniciales y la premedida donde no se da ningún tipo de selección. Debido a esta premedida la superposición del sistema parece transmitirse al aparato: el precio que se paga por tener una correspondencia uno a uno es un estado compuesto (34, 35) que no selecciona un resultado particular y en el que el aparato parece comportarse de manera cuántica. Obviamente esto no se observa en los experimentos, de ahí que haya que investigar el asunto. Este es el problema de la no observabilidad de la interferencia (PM2), es decir, de los términos no diagonales de (35), el postulado de proyección es un buen apaño pero no nos vale debido a lo expuesto en la sección 3.1.

Además en este ejemplo también está presente el problema de la base privilegiada (PM1). Fijándonos en (34), para el caso particular $c_{\uparrow} = i/\sqrt{2}$, $c_{\downarrow} = 1/\sqrt{2}$, vemos que si se aplica el cambio de base dado por (31) el estado resultante es,

$$|\psi(\tau)\rangle^{\mathcal{SM}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle^{\mathcal{S}} |\uparrow\rangle^{\mathcal{M}} + |\downarrow\rangle^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle^{\mathcal{M}} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\rangle_x^{\mathcal{S}} |\uparrow\rangle_x^{\mathcal{M}} + |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{S}} |\downarrow\rangle_x^{\mathcal{M}} \right). \quad (37)$$

En consecuencia parece que el aparato se ha correlacionado tanto con los estados de espín z

como los de espín x , es decir, que ha llevado a cabo una medida simultanea de dos observables que no conmutan. De hecho, (34) se puede reescribir de infinitas formas usando las bases para distintas orientaciones. Por tanto, el problema es que aunque el observable medido se seleccione en función del montaje experimental, parece que el esquema de von Neumann no es capaz de incluir tal observable (o base) privilegiado.¹³

El ejemplo se ha presentado es simplista puesto que \mathcal{A} se ha reducido a solo una de sus partes \mathcal{M} (la que necesariamente tiene que ser sensible al mundo microscópico). Lo único que hemos hecho es elegir un Hamiltoniano que produzca la correlación esperada para un proceso de medida. Para tener una visión más completa se tendrían que tener en cuenta los procesos que ocurren en el amplificador y en el puntero, es decir, la transición hacia el mundo macroscópico.

3.4. Gatos de Schrödinger.

No es casualidad que Schrödinger, que prefería una interpretación realista de la mecánica cuántica,^[3] fuera de los primeros en preocuparse seriamente por el problema de la medida. Su archiconocido experimento mental proporciona argumentos interesantes en este sentido. El experimento consiste en meter a un gato (vivo) en una caja que se supone aislada del mundo exterior y en cuyo interior hay un dispositivo que detecta la ocurrencia de un evento cuántico, por ejemplo la desintegración de un átomo radiactivo, con probabilidad $|\beta|^2 = 1 - |\alpha|^2$ de ocurrir. En consecuencia, el dispositivo mata (o no) al gato en función de que el evento haya sucedido (o no)¹⁴. Formalmente se escribe $|1\rangle$ y $|0\rangle$ para los autoestados correspondientes a que se produzca la desintegración o no, y como $|\oplus\rangle$ y $|\ominus\rangle$ los correspondientes al estado del gato. Después de un tiempo, que dependerá de la naturaleza de la desintegración, se puede describir el estado del sistema compuesto como,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle |\oplus\rangle + \beta |1\rangle |\ominus\rangle. \quad (38)$$

La matriz densidad correspondiente sería,

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = & |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |\oplus\rangle\langle \oplus| + \alpha\beta^* |0\rangle\langle 1| \otimes |\oplus\rangle\langle \ominus| + \\ & + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes |\ominus\rangle\langle \ominus| + \alpha^*\beta |1\rangle\langle 0| \otimes |\ominus\rangle\langle \oplus|. \end{aligned} \quad (39)$$

Este estado aparenta ser paradójico: a raíz de la correlación entre ambos sistemas, la superposición del estado del átomo es trasladada al estado del sistema compuesto, igual que en la sección 3.3. Lo novedoso frente al ejemplo anterior es que el estado (38) es un estado entrelazado entre un sistema microscópico (el átomo) y uno macroscópico (el gato). Esta es una

¹³Es decir, los objetos macroscópicos siempre parecen tener posiciones espaciales bien definidas, la cuestión es ¿qué mecanismo selecciona la posición como observable privilegiado? Como se bosquejará en la sección 4.4, para superar este problema Zurek y Zeh propusieron que se debe considerar al sistema y al aparato como sistemas cuánticos abiertos al entorno (véanse referencias [4, 8, 9] de [16]).

¹⁴Conviene aclarar que en este experimento mental, el gato simplemente está jugando el papel de instrumento de medida, y sus estados de salud el de autoestados del observable puntero. En este sentido, Bohr, siguiendo su interpretación instrumentalista [3, p. 82], eludiría el problema invocando el principio de correspondencia (nota al pie 8).

expresión más realista (no en el sentido interpretativo) del problema de la medida (dado que en última instancia todo aparato de medida tiene que ser macroscópico): el estado (38, 39) parece no corresponderse con la experiencia cotidiana puesto que nadie ha observado un gato en superposición (PM2).

Como ya se vió en la sección 3.3, una manera de esquivar este problema es aplicar el postulado de proyección al gato. Esto representa el hecho de que al abrir la caja se está eliminando la superposición, determinando unívocamente el estado del gato. Formalmente, aplicando (21) a (39) se obtiene,

$$\hat{\rho} = |\alpha|^2 |0\rangle\langle 0| \otimes |\odot\rangle\langle \odot| + |\beta|^2 |1\rangle\langle 1| \otimes |\odot\rangle\langle \odot|. \quad (40)$$

De nuevo los términos no diagonales han desaparecido y lo que queda es una mezcla estadística similar a la de cualquier suceso probabilístico clásico, como por ejemplo lanzar una moneda: la mezcla expresa que aunque la moneda ya haya caído (y por tanto se asume que una de las dos posibilidades *ha ocurrido*), todavía no se ha observado y por tanto se ignora el resultado¹⁵. Lo que hacen los términos no diagonales, a diferencia de los diagonales, es producir los términos de interferencia en el valor esperado. Esta es la diferencia fundamental entre una superposición y una mezcla [11, p. 18].

Pero entonces, ¿cuándo se ha producido la medida? ¿Cuándo el dispositivo ha detectado la desintegración?, ¿cuándo el gato se ha muerto?, ¿cuándo hemos abierto la caja (sin mirar dentro)? o ¿cuándo hemos mirado? Para estar seguros de que la medida ha sido realizada es razonable requerir que al volver a realizar la misma medida, el estado del sistema sea el mismo que el anterior, es decir, que la medida sea un proceso *irreversible*.^[11] Como se verá más adelante en el contexto de la decoherencia, resulta que el comportamiento irreversible de sistemas cuánticos macroscópicos (como un baño térmico) proporciona el proceso físico que permite satisfacer tal requerimiento:^[15] la evolución de estos sistemas nunca va a deshacer la correlación entre sistema y aparato, lo que es más, debido a la complejidad del sistema macroscópico, ningún observador puede tener suficiente información como para revertir la correlación. Si nos quedamos aquí estaríamos asumiendo el proceso de medida como un fenómeno emergente que no tendría cabida para sistemas microscópicos (no se podría decir que un electrón *mide* a un fotón), y quizá esta afirmación sea razonable dado que parece que estamos hablando simplemente de una interacción. No obstante, la pregunta que hemos planteado es interesante, en tanto que plantea la cuestión de cuándo se actualizan los valores de los observables. Una posible respuesta, que incluye la anterior y que satisface al autor es la contenida en [21], esta consiste en que “la actualización del valor [de un observable de un sistema \mathcal{S}] se da solo relativamente a otro sistema \mathcal{S}' [que interactúa con \mathcal{S}]”.

Volviendo a lo anterior, se puede realizar la traza parcial (sección 2.4.2) sobre los estados del

¹⁵En el caso del gato, asumiendo por un momento el enfoque de la decoherencia, que se verá con más en detalle en 4, el equivalente sería abrir la caja pero no mirar: la superposición se habría disipado en el entorno pero aún no tendríamos certeza del estado del gato.

átomo para obtener la matriz de densidad reducida para el gato,

$$\hat{\rho}_g = \text{Tr}_a(\hat{\rho}) = |\alpha|^2 |\ominus\rangle\langle\ominus| + |\beta|^2 |\oplus\rangle\langle\oplus|. \quad (41)$$

Esta representa la información disponible sobre el gato, sin tener en cuenta (“promediando”) los estados del átomo. Vemos que efectivamente no hay rastro de la superposición, es un estado mezcla y por tanto no es paradójico, aunque seguimos teniendo que explicar *cómo* ha desaparecido dicha superposición (**PM2**).

Además de preguntarnos por qué no se observa superposición, también es razonable preguntarnos por qué se selecciona un resultado en *particular* en favor de cualquier otro, es decir, por qué el gato resulto vivo y no muerto. Este es el problema de la particularidad de los resultados (**PM3**)¹⁶. En general **PM3** tiene sus raíces en la pregunta de qué actualiza un resultado particular en una teoría probabilística, es decir, la cuestión del determinismo. En mecánica clásica, a nivel fundamental, se supone que el resultado particular, por ejemplo de lanzar una moneda, queda completamente descrito por leyes deterministas, otra cosa es que en la práctica el sistema sea muy complejo como para obtener dicha descripción, de hecho, siempre va a existir una incertidumbre estadística (ruido) arraigada en la incapacidad (eso sí, técnica) de tener en cuenta todas las variables implicadas en un fenómeno. En mecánica cuántica la situación es diferente, ésta parece tener una naturaleza probabilística intrínseca, como ya aseguraron muchos de los fundadores de la teoría cuántica hace ya casi un siglo. Por tanto este es un problema que surge a nivel interpretativo^[2]. Lo discutiremos brevemente en la sección 5.

Si se adopta una postura realista [3, p. 82], en tanto que el vector de estado describe la realidad de sistemas individuales, entonces (39) y (40) representan realidades diferentes y por tanto se plantea el problema de cual es el mecanismo *físico* que proyecta el vector de estado o que causa la desaparición de los términos no diagonales de la matriz densidad (**PM2**). Por otro lado, si se adopta un enfoque no realista, como por ejemplo la interpretación instrumentalista de Bohr (nota al pie 8), el problema no llega a surgir¹⁷, dado que el estado cuántico (38) no hace referencia al estado *real* del gato, ni siquiera a un estado de conocimiento, simplemente se considera como una herramienta matemática para calcular probabilidades, sin ningún tipo de significado físico. Desde un enfoque empirista el vector de estado tampoco representa al gato en sí mismo sino un procedimiento de preparación del sistema, es decir, tiene significado físico relativo exclusivamente a situaciones experimentales. Si todas las distribuciones de probabilidad para todas las posibles medidas del gato son predichas correctamente por el vector de estado, entonces no hay problema alguno.

Por esta dependencia en la interpretación, este problema podría no considerarse como un problema físico. No obstante, que las interpretaciones mencionadas no sean susceptibles a él,

¹⁶En [16, p. 57] **PM3** es dividido en dos subproblemas. El autor del presente trabajo no ve por qué el primero de ellos: “. . . por qué no observamos el puntero del aparato en superposición. . .” no puede ser incluido en **PM2**. Por tanto se entiende **PM3** como el segundo: “. . . por qué, en cada realización de un experimento que realiza la medida, observamos una posición *particular* del puntero y no cualquier otra.”

¹⁷De hecho Schrödinger llegó a admitir que, aunque él no estuviera dispuesto a adoptarla, en una interpretación instrumentalista no surge el problema de la medida [3, p. 116].

no significa que el gato de Schrödinger no suponga un problema para ellas. Independientemente de la interpretación es razonable preguntarse por qué siendo (39) un estado legítimo para el gato, en general no existen observaciones distinguiéndolo de (40). Si se acepta que el proceso de medida debe ser descrito en términos de la mecánica cuántica, el problema pasa a ser también del formalismo.

La posibilidad de realizar experimentalmente el gato de Schrödinger cambiaría nuestra concepción sobre la relación entre los mundos microscópico, macroscópico y la frontera entre ambos (el mundo mesoscópico). De hecho se han llevado a cabo experimentos en los que tales estados han sido obtenidos en objetos que se pueden considerar fuera del mundo microscópico [10, p. 293]. La existencia de estos experimentos nos fuerza a considerar dichos estados no como curiosidades formales de la teoría, sino como fenómenos observables de los sistemas mesoscópicos al alcance de la tecnología actual, de ahí que merezca la pena estudiarlos.

El amigo de Wigner. Podemos imaginarnos la situación inversa. Estando Schrödinger dentro de la caja nos resulta más fácil ponernos en su lugar. Digamos que el veneno tarda un tiempo en actuar y que ahora $|\odot\rangle$, $|\ominus\rangle$ representan el estado de salud de Schrödinger, ‘sano’ o ‘enfermo’. Pasado un tiempo Schrödinger empieza a encontrarse mal, en ese momento sabe que el átomo se ha desintegrado y por tanto su descripción del sistema cambia de (38) a $|1\rangle|\odot\rangle$, pero el gato no ha abierto la caja todavía, por lo que para él, el estado del sistema continua siendo (38). Con esto se quiere ilustrar, siguiendo el enfoque de [21; 11, cap. 1], que observadores con distinta información pueden asignar distintos estados al mismo sistema, sin que esto plantee ningún problema [12, p. 2].

4. Decoherencia.

4.1. Introducción.

A la hora de intentar resolver los problemas expuestos se dan dos tipos de estrategias. Por un lado *interpretar* de distintas maneras el formalismo o la fenomenología de la mecánica cuántica con el fin de que en la nueva interpretación no surjan dichos problemas,¹⁸ por otro *modificar* el formalismo introduciendo nuevos elementos o modificando los existentes.¹⁹

Para explicar la no observabilidad de los términos no diagonales existen dos posibilidades: o bien existe algún mecanismo que provoca su desaparición (por ejemplo, decoherencia) o bien no desaparecen pero no son observables en los experimentos. Esta última a su vez se divide en otras dos: quizá no sean observables porque aún no se han llevado a cabo las medidas correctas o no se tienen instrumentos de medida con resolución suficiente, o quizá jamás puedan contribuir a los resultados de ningún experimento que podamos imaginar (solución *ortodoxa* al problema de la medida). Esta sección se centrará fundamentalmente en la primera

¹⁸Por ejemplo la *interpretación de universos paralelos* afirma que todas las componentes de la superposición de la función de onda se realizan en diferentes universos, por tanto el colapso no se da en realidad pero lo percibimos debido a que vivimos en uno de ellos [16, p. 336; 10, p. 287].

¹⁹Por ejemplo la *teoría del colapso espontáneo* (Ghirar-Rimini-Weber) [16, p. 347; 10, p. 289].

posibilidad, las otras dos se puede consultar en [3].

A partir de 1970 se empezó a observar que cuando un sistema cuántico está en contacto con un gran reservorio de grados de libertad, los términos no diagonales de la matriz densidad, esto es, las *coherencias cuánticas*, tendían a cero rápidamente, de ahí el nombre *decoherencia*. Dado que se puede considerar al entorno como el mayor reservorio disponible, y puesto que es imposible aislar un sistema completamente, esta idea abrió la puerta hacia una posible solución del problema de la medida (al menos de **PM2**). De esta manera, se está asumiendo que cualquier sistema cuántico es un sistema abierto y que la información contenida en las superposiciones de los estados estados iniciales se pierde irremediabilmente en el entorno, entrelazándose con él. Un proceso que se conoce con el nombre de decoherencia *inducida por el entorno*. El primero que aplicó tales consideraciones al proceso de medida en mecánica cuántica fue Wojciech Zurek a principios de 1980. En la sección siguiente se describe su modelo. Además de la decoherencia inducida por el entorno, el así llamado^[15] *programa de la decoherencia* también se ocupa de otra consecuencia de la interacción con el entorno: la *superselección inducida por el entorno*, esta es, la selección de conjuntos de estados privilegiados (*estados puntero*) que mantienen las correlaciones a lo largo del tiempo aún estando inmersos en el entorno. Estos estados vienen determinados por la forma de la interacción entre sistema y entorno y son candidatos a corresponder a los estados clásicos de nuestra experiencia. Si la decoherencia inducida por el entorno pretende (y según algunos consigue) dar respuesta a **PM2**, la superselección lo hace para **PM1**. Cabe mencionar también otro aspecto interesante que no se tratará en el presente trabajo, este es el de *envarianza*²⁰ (del inglés, *envariance*), un concepto según el cual Zurek afirma derivar la regla de Born explicando así la emergencia de la probabilidad en la mecánica cuántica, y resolviendo, según él, **PM3**.

Por último, cabe resaltar que la decoherencia surge de aplicar el formalismo de la mecánica cuántica a la descripción de la interacción de un sistema con el entorno, por tanto, por sí sola no es ni una interpretación ni una modificación de la mecánica cuántica. Sus implicaciones han de ser enmarcadas en cada interpretación. En tanto que los efectos de la decoherencia han sido estudiados tanto teórica como experimentalmente, su existencia se asume como un hecho bien verificado²¹.

4.2. Decoherencia inducida por el entorno.

La idea fundamental de Zurek fue que al considerar el proceso de medida, además del sistema \mathcal{S} y el aparato \mathcal{A} , es necesario introducir el entorno \mathcal{E} . Inicialmente se escribe el estado para $\mathcal{S} + \mathcal{A} + \mathcal{E}$ y se deja que interaccionen entre sí. Dado que cualquier observación estará restringida a $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ y que los grados de libertad del entorno son inobservables, está justificado trazar sobre los estados del entorno. Se obtiene así la matriz densidad reducida de $\mathcal{S} + \mathcal{A}$. De esta manera mientras que el sistema total $\mathcal{S} + \mathcal{A} + \mathcal{E}$ permanece entrelazado y evoluciona unitariamente, $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ es una mezcla desde el un punto de vista de \mathcal{A} .

²⁰Ver [15, p. 16], [16, p. 340].

²¹Ver [15, p. 8] y referencias incluidas.

Escribiendo como $|a_j\rangle$ los autoestados del puntero y siendo $\{|e_j\rangle\}$ una base para el entorno, se distinguen los siguientes pasos en el proceso de medida,

1. En $t = 0$ el estado inicial es (por simplicidad) el estado factorizado,

$$|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}}(0)\rangle = |\psi_{\mathcal{S}}\rangle |a_0\rangle |\psi_{\mathcal{E}}(0)\rangle. \quad (42)$$

2. Pasado un tiempo t_1 , se activa la interacción y \mathcal{S} y \mathcal{A} se entrelazan mediante $\hat{U}^{\mathcal{S}\mathcal{A}}$ (premedida),

$$|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}}(t_1)\rangle = \left[\sum_j c_j |o_j\rangle |a_j\rangle \right] |\psi_{\mathcal{E}}(t_1)\rangle. \quad (43)$$

3. En $t_1 < t < t_2$, el entorno se entrelaza con $\mathcal{S} + \mathcal{A}$ mediante $\hat{U}^{\mathcal{S}\mathcal{A},\mathcal{E}}$ y en $t = t_2$ se desactiva la interacción,

$$|\psi_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}}(t \geq t_2)\rangle = \sum_j c_j |o_j\rangle |a_j\rangle |e_j\rangle, \quad (44)$$

La matriz densidad correspondiente es,

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}} &= \sum_{jk} c_j c_k^* |o_j\rangle\langle o_k| \otimes |a_j\rangle\langle a_k| \otimes |e_j\rangle\langle e_k| \\ &:= \sum_{jk} c_j c_k^* |o_j\rangle |a_j\rangle |e_j\rangle \langle o_k| \langle a_k| \langle e_k|. \end{aligned} \quad (45)$$

4. Se representa la decoherencia como una ‘disipación’ de la superposición hacia el entorno. Como no conocemos el estado del entorno, trazamos sobre él,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\hat{\rho}_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}}) = \sum_{jk} |c_j|^2 |o_j\rangle |a_j\rangle \langle o_k| \langle a_k| \langle e_k| e_j\rangle. \quad (46)$$

5. Debido al gran número de subsistemas que conforman el entorno, sus estados se vuelven ortogonales rápidamente^[15] $\langle e_k|e_j\rangle(t) \rightarrow \delta_{kj}$, ya que son estados diferentes de un sistema macroscópico, por tanto,

$$\hat{\rho}_{\mathcal{S}\mathcal{A}} = \text{Tr}_{\mathcal{E}}(\hat{\rho}_{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{E}}) = \sum_j |c_j|^2 |a_j\rangle\langle a_j| \otimes |o_j\rangle\langle o_j|. \quad (47)$$

La información contenida en los términos no diagonales de $\hat{\rho}_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, la correspondiente a (43), no es destruida sino *descargada* en el entorno. No obstante, desde el punto de vista de \mathcal{A} es inaccesible, sólo se podría recuperar si pudiésemos reconstruir el estado de $\mathcal{S} + \mathcal{A} + \mathcal{E}$. De hecho la única información accesible será la de los observables que conmuten con el Hamiltoniano de interacción $\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{A}}$, dicha información quedará registrada en el estado del puntero de \mathcal{A} .

Aquí lo importante no es que la matriz densidad sea diagonal en alguna base, si no que dicha base no depende de las condiciones iniciales. Como se vió en la sección 2.4.3 un sistema compuesto de dos subsistemas puede ser descompuesto en varias bases correspondientes a

observables diferentes (degeneración de base). Sin embargo cuando se incluye un tercer subsistema (en este caso el entorno), existe solo una base en la cual el observable medido es diagonal. Este importante resultado se conoce por *Teorema de Unicidad Triortogonal* (TUT), fue obtenido^[22] por A. Elby y J. Bub en 1994.

Teorema de Unicidad Triortogonal. Si $|\psi\rangle = \sum_j c_j |A_j\rangle \otimes |B_j\rangle \otimes |C_j\rangle$, donde $\{|A_j\rangle\}$, $\{|B_j\rangle\}$ y $\{|C_j\rangle\}$ son conjuntos ortogonales de vectores en los espacios de Hilbert \mathbf{H}_1 , \mathbf{H}_2 y \mathbf{H}_3 . Entonces, no existen otros conjuntos ortogonales de vectores $\{|A'_j\rangle\}$, $\{|B'_j\rangle\}$ y $\{|C'_j\rangle\}$ tales que $|\psi\rangle = \sum_j d_j |A'_j\rangle \otimes |B'_j\rangle \otimes |C'_j\rangle$, a no ser que difieran trivialmente de los primeros.

Este teorema se puede generalizar para $N \geq 3$ subsistemas.^[15] La unicidad de la descomposición triortogonal dota de un carácter objetivo a la descripción del proceso de medida.

La transición entre el mundo clásico y el cuántico debe ser suave. Este requisito es satisfecho dado que en una situación realista la correlación entre los tres sistemas no será perfecta, la consecuencia es que los términos no diagonales no se anularán exactamente pero tenderán a cero rápidamente. Esto implica que, incluso en el mundo macroscópico, se podría detectar un pequeña señal de “ruido” cuántico.

4.3. Ejemplo: N sistemas de dos niveles.

Para ilustrar la sección anterior se considera un ejemplo^[15] originalmente introducido por Zurek.^[23] Imaginemos un sistema de dos niveles (SDN) \mathcal{S} con estados $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ que interactúa con un entorno \mathcal{E} descrito por un conjunto de otros N SDNs, con estados $\{|\top_k\rangle, |\perp_k\rangle\}$ con $k = 1, \dots, N$. Se supone que el Hamiltoniano de interacción encargado de entrelazar \mathcal{S} y \mathcal{E} es,

$$\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}} = \hat{\sigma}_{\mathcal{S}}^z \otimes \sum_k g_k \hat{\sigma}_k^z \bigotimes_{k' \neq k} \hat{\mathbb{1}}_{k'}, \quad (48)$$

donde $\hat{\sigma}_{\mathcal{S}}^z = |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ es el operador de espín en la dirección z del sistema objeto, g_k son constantes de acoplamiento y $\hat{\sigma}_k^z = |\top_k\rangle\langle\top_k| - |\perp_k\rangle\langle\perp_k|$ y $\hat{\mathbb{1}}_k$ son respectivamente el operador de espín y el operador identidad para el k -ésimo SDN del entorno. El estado inicial se puede escribir como,

$$|\psi(0)\rangle = \left(a |\uparrow\rangle + b |\downarrow\rangle \right) \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k |\top_k\rangle + \beta_k |\perp_k\rangle \right). \quad (49)$$

Ahora simplemente tenemos que calcular $|\psi(t)\rangle = \hat{U}_{\mathcal{S}\mathcal{E}} |\psi(0)\rangle$. Aplicando el operador evolución $\hat{U}_{\mathcal{S}\mathcal{E}} = e^{i\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}t/\hbar}$ a los dos primeros términos del estado inicial y sacando factor común, resulta,

$$\exp \left\{ \frac{it}{\hbar} \hat{\sigma}_{\mathcal{S}}^z \otimes \sum_k g_k \hat{\sigma}_k^z \bigotimes_{k' \neq k} \hat{\mathbb{1}}_{k'} \right\} a |\uparrow\rangle \bigotimes_{k=1}^{N-1} \alpha_k |\top_k\rangle \otimes \left(\alpha_N |\top_N\rangle + \beta_N |\perp_N\rangle \right) = \quad (50)$$

$$= a |\uparrow\rangle \left(\alpha_N e^{ig_N t/\hbar} |\top_N\rangle + \beta_N e^{-ig_N t/\hbar} |\perp_N\rangle \right) \bigotimes_{k=1}^{N-1} \alpha_k |\top_k\rangle e^{ig_k t/\hbar}. \quad (51)$$

Al ir calculando el resto de términos se pueden ir agrupando de esta manera y al final se obtiene,

$$|\psi(t)\rangle = a |\uparrow\rangle |E_{\uparrow}(t)\rangle + b |\downarrow\rangle |E_{\downarrow}(t)\rangle, \quad (52)$$

donde,

$$|E_{\uparrow}(t)\rangle = |E_{\downarrow}(-t)\rangle = \bigotimes_{k=1}^N \left(\alpha_k e^{ig_k t/\hbar} |\uparrow_k\rangle + \beta_k e^{-ig_k t/\hbar} |\downarrow_k\rangle \right). \quad (53)$$

La matriz densidad reducida $\hat{\rho}_{\mathcal{S}}(t) = \text{Tr}_{\mathcal{E}} |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ es,

$$\rho_{\mathcal{S}}(t) = |a|^2 |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + ab^* \langle E_{\uparrow}(t)|E_{\downarrow}(t)\rangle |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + \quad (54)$$

$$+ |b|^2 |\downarrow\rangle\langle\downarrow| + a^*b \langle E_{\downarrow}(t)|E_{\uparrow}(t)\rangle |\downarrow\rangle\langle\uparrow|. \quad (55)$$

Nos interesa ver cómo evolucionan con el tiempo los términos no diagonales, como se puede ver, su amplitud viene determinada por los coeficientes de interferencia $z(t)$ y $z^*(t)$,

$$z(t) = \langle E_{\uparrow}(t)|E_{\downarrow}(t)\rangle = \prod_{k=1}^N \left(|\alpha_k|^2 e^{ig_k t/\hbar} + |\beta_k|^2 e^{-ig_k t/\hbar} \right), \quad (56)$$

su módulo al cuadrado resulta,

$$|z(t)|^2 = \prod_{k=1}^N \left\{ 1 + \left[\left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 \right)^2 - 1 \right] \text{sen}^2(2g_k t/\hbar) \right\}. \quad (57)$$

Como era de esperar, al inicio $t = 0$, $z(t) = 1$. En situaciones realistas esperamos que las constantes de acoplamiento g_k y los coeficientes α_k y β_k sean aleatorios. Por tanto en promedio para $t \rightarrow \infty$, el seno al cuadrado vale $1/2$, y resulta,

$$\left\langle |z(t)|^2 \right\rangle_{t \rightarrow \infty} \approx \frac{1}{2^N} \prod_{k=1}^N \left[1 + \left(|\alpha_k|^2 - |\beta_k|^2 \right)^2 \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (58)$$

Por tanto para tiempos largos (gran número de SDNs) los términos no diagonales se ven fuertemente amortiguados.

4.4. Superselección inducida por el entorno.

En la sección 3.3 se vió que el esquema de medida de von Neumann no definía unívocamente la base en la que expandir el estado de premedida y por tanto deja sin responder la pregunta de qué observable está siendo medido. Además, uno también se podría preguntar cómo es que la correlación entre sistema y aparato no se pierde en el entorno. En el contexto de la decoherencia se responde a estas preguntas teniendo en cuenta dos conceptos, uno es el teorema de unicidad triortogonal (TUT) visto en la sección 4.2 y el segundo es la (super)selección de una base privilegiada inducida por el entorno: la interacción entre aparato y entorno selecciona un conjunto de observables que conmutan. El entorno por tanto juega un doble papel en la solución de **PM1**: selecciona una base de puntero (nota al pie 10) privilegiada y garantiza

su unicidad vía el TUT. Zurek sugirió un *criterio de estabilidad*²²: que tal base privilegiada fuera la que contiene un registro fiable del estado del sistema, esto es, la base en la que las correlaciones $|o_j\rangle|a_j\rangle$ no se ven afectadas por las nuevas correlaciones que se establecen con el entorno. Este criterio es simplemente el requerimiento de que todos los proyectores sobre estados puntero $\hat{P}_j^A = |a_j\rangle\langle a_j|$ conmuten con el Hamiltoniano de interacción entre el aparato y el entorno²³ $\hat{H}_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$,

$$\left[\hat{P}_j^A, \hat{H}_{\mathcal{A}\mathcal{E}}\right] = 0, \quad \forall j. \quad (59)$$

Tiene sentido ya que si un observable conmuta con el Hamiltoniano, significa que es una constante del movimiento. Esto implica que se preservan todas las correlaciones entre el sistema medido y los autoestados de un *observable privilegiado del aparato*,

$$\hat{O}_{\mathcal{A}} = \sum_j c_j \hat{P}_j^A. \quad (60)$$

La anterior relación de conmutación se satisface si el Hamiltoniano de interacción es función del observable privilegiado, $\hat{H}_{\mathcal{A}\mathcal{E}} = \hat{H}_{\mathcal{A}\mathcal{E}}(\hat{O}_{\mathcal{A}})$. Por otro lado las correlaciones entre \mathcal{S} y \mathcal{A} en las que los estados del aparato no sean autoestados de observables que conmuten con $\hat{H}_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$ son rápidamente destruidas por la interacción. Estos observables privilegiados (*robustos* ante la decoherencia) son precisamente los estados “más clásicos”.

Por ejemplo, muchos Hamiltonianos de interacción entre el sistema y el entorno, $\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}$, describen procesos de dispersión de partículas presentes en el entorno (fotones, aire, etc.) que interactúan con el sistema estudiado. Dado que la naturaleza de estas interacciones suele ser una ley de potencias de la distancia (como por ejemplo la ley de Coulomb), normalmente $\hat{H}_{\mathcal{S}\mathcal{E}}$ conmutará con el observable posición y por tanto la base privilegiada será de autoestados de posición, esto explica el hecho de que en general se observen posiciones bien definidas dado que la mayoría de las interacciones dependen de la distancia.

El mérito de este desarrollo está en que la base privilegiada no es elegida *ad hoc* de manera que encaje con nuestra experiencia, si no que depende de las ya conocidas leyes físicas. La gran cantidad de grados libertad que proporcionan las superposiciones de la mecánica cuántica es reducida dado que las leyes que gobiernan las interacciones físicas parecen depender solo de unos pocas magnitudes físicas (posición, momento, carga...). En este sentido la decoherencia y la superselección inducidas por el entorno forman una buena propuesta respecto de la emergencia del mundo clásico a partir del cuántico.

²²Véase [15] p. 13. y referencias incluidas [Zurek, 1981].

²³Por simplicidad se tiene en cuenta solo la interacción entre aparato y entorno pero en última instancia el sistema también ha de ser incluido [16, p. 76] (en la discusión se trata brevemente este punto en el que 3 parece tener críticas). Técnicamente se dice que el entorno lleva a cabo *medidas de no demolición* (QND, del inglés, *quantum non demolition*) sobre el aparato (o sistema), no se estudiarán este tipo de medidas en este trabajo, basta con saber que son medidas en las que no se perturba el observable medido. También cabe resaltar que a nivel realista este requerimiento solo puede ser satisfecho aproximadamente, por tanto Zurek ha propuesto otros criterios para la selección de observables privilegiados^[15].

5. Discusión.

¿Soluciona la decoherencia el problema de la medida? Asumiendo en primera instancia que el problema existe —como hemos visto desde algunas interpretaciones no hay problema que resolver— se puede decir que al menos es una buena propuesta de solución de **PM1** y **PM2**. Es una buena solución en tanto que no introduce elementos foráneos al dominio de la mecánica cuántica —no es ni una interpretación ni una modificación^{24,25}— y hasta ahora ha demostrado estar en buen acuerdo con la evidencia experimental.^[10] No obstante existen incontables críticas que vienen desde diferentes posturas.

En [3, p. 166] Muynck afirma que mientras que la decoherencia responde satisfactoriamente a **PM2**, confunde el problema de la medida con el problema del límite clásico, asociando mucha importancia a la desaparición de los términos no diagonales en detrimento de la fase de premedida, que es la primera que va a influenciar el estado del puntero y que es de carácter puramente microscópico. Esto es así dado que, para él, el problema de la medida, en tanto que no es de la interpretación, también es de carácter puramente microscópico, dado que consiste en explicar cómo ocurre la transmisión de información entre el sistema microscópico y la parte del aparato que es sensible a él, *antes* de que afecte la decoherencia. En definitiva, no está claro si la decoherencia es la verdadera responsable de no observar los términos no diagonales o solo es un impedimento práctico. En cualquier caso, solo por su utilidad práctica, ya es una teoría satisfactoria. Por otro lado, también afirma que si realmente los términos no diagonales son eliminados en los sistemas macroscópicos, esto entraría en contradicción con la observación de superposición en estos sistemas (por ejemplo SQUIDS). Schlosshauer responde a esta cuestión diciendo que [15, p. 7] “... la coherencia de fase global no es destruida, permanece ausente de la matriz de densidad local que describe el sistema, pero está totalmente presente en el sistema compuesto sistema-entorno”, lo cual es importante para “... asegurar la posibilidad de describir casos especiales en los que superposiciones macroscópicas o mesoscópicas han sido realizadas experimentalmente”.

En [24, p. 332-336] se argumenta que tomar la traza parcial en (46) es equivalente a aplicar el postulado débil de proyección²⁶, aunque formalmente sean procesos distintos, el efecto es el mismo: “... la evolución no unitaria de un estado puro a una mezcla” y que por tanto no es capaz de explicar el colapso de *sistemas individuales*. Creo que el autor ve conflicto dado que parece interpretar el vector de estado como una descripción realista de los sistemas individuales [3, cap. 2.3]. Como se dijo en la sección 2.4.2 y teniendo en cuenta en último párrafo de la sección 3.4, la matriz densidad describe un estado de conocimiento del observador, no hay ningún proceso físico detrás, simplemente expresa el hecho de que cierta información nos es

²⁴Aunque, como se vió en la sección 2.3, la ecuación de Lindblad se construye añadiendo términos a la de von Neumann. Hay dos maneras de verlo, o bien la mecánica cuántica ordinaria permanece válida y dicha modificación simplemente tiene en cuenta la apertura del sistema al entorno. O bien la teoría modificada es fundamentalmente distinta respecto de la mecánica cuántica ordinaria que es una aproximación de la primera para sistemas microscópicos. Este último enfoque es el seguido, por ejemplo, por la teoría del colapso espontáneo (nota al pie 19). Mientras que Zurek se vió inspirado más en el primero. [3, p. 166].

²⁵Uno de los ejemplos más sonados de lo contrario sería la solución de von Neumann que introducía la consciencia del observador para explicar el colapso [10, p. 285].

²⁶Ver también [3, p. 122-123].

inaccesible²⁷.

Cabe también una crítica [15, p. 15] en cuanto a la afirmación que se hacía en la sección 4.4, de que el observable privilegiado no es elegido de manera *ad hoc*. Se podría decir que, como en última instancia todas las leyes físicas son descubiertas y formuladas por nosotros, estas solo pueden contener magnitudes acordes con nuestra experiencia y por tanto la superselección del observable privilegiado, en tanto que depende de estas magnitudes sí es *ad hoc*. No obstante, teniendo en cuenta que los resultados de los experimentos también forman parte de nuestra experiencia, jamás se podrán definir magnitudes que estén fuera de esta y por tanto la crítica no parece sólida.

Se han dado más argumentos²⁸ afirmando que la decoherencia no resuelve el problema de la medida o incluso que lo empeora.^[6] No obstante al menos este último se refiere fundamentalmente a **PM3**. Y aunque Zurek afirma^[17] que su concepto de *envarianza* puede resolver el problema, en general no está nada claro²⁹. Por otro lado en [3, 21] se da un argumento que satisface al autor, este es, que en gran medida el problema (al menos **PM2** y **PM3**) proviene de asociar carácter ontológico (realidad) al vector de estado (en cuanto a la descripción de sistemas individuales) y situarlo como elemento central del formalismo, en detrimento del papel jugado por los observables y su álgebra.³⁰

El autor considera, en parte asumiendo una perspectiva empirista, que **PM3** no supone ningún problema, al menos a nivel físico, de la misma manera que tampoco lo supone la imposibilidad de la mecánica clásica de calcular el resultado de un tirada de dados. Obviamente a nivel formal, si se conociese perfectamente el estado del dado y su entorno, la mecánica clásica sí podría calcularlo, pero a nivel práctico es imposible dado que no se tiene la capacidad técnica suficiente. Pero, ¿es que esta consideración no es fundamental? Sobre todo teniendo en cuenta la creciente dependencia en simulaciones numéricas para realizar predicciones (imaginémonos calcular el resultado del dado analíticamente), conceptos como la *irreducibilidad computacional*^[29] apuntan a que quizá la imposibilidad práctica de llevar a cabo tales objetivos en algunos casos quizá no sea tan “práctica” y responda ante una cuestión fundamental. No obstante, es cierto que, ante la ausencia de evidencia, asumir que es imposible explicar cualquier fenómeno no suele ser útil a nivel científico. Por tanto puede tener sentido asumir que **PM3** existe.

En cualquier caso, los conocimientos adquiridos durante la realización de este trabajo hacen que la decoherencia resulte un campo apasionante y prometedor, tanto en ámbito práctico como en el fundamental, que el autor pretende seguir estudiando.

²⁷Para un tratamiento más detallado ver [25].

²⁸Véase [26] en contraposición a [27].

²⁹Véase por ejemplo [28].

³⁰Esta es la ‘batalla’ entre Schrödinger y Heisenberg respectivamente, que ganó este primero como se puede comprobar en la literatura y los cursos introductorios a la mecánica cuántica.

A. Apéndices.

A.1. Reseña histórica.

Según la bibliografía revisada, una de las primeras referencias que apuntaban a que el proceso de medida en mecánica cuántica no estaba exento de polémica apareció en 1926 en un artículo³¹ de Max Born:

Por tanto la mecánica cuántica de Schrödinger proporciona un resultado bien definido al desenlace de una colisión³²; no obstante, esto no involucra ninguna relación causal. No obtenemos ninguna respuesta a la pregunta de "cual es el estado después de la colisión", sino exclusivamente a la pregunta "cómo de probable es un desenlace concreto de la colisión" [...]. Esto plantea la cuestión del determinismo. Desde el punto de vista de nuestra mecánica cuántica, no hay magnitud física que pueda establecer causalmente el resultado de una colisión *en cada caso individual* (cursiva del autor); no obstante, hasta ahora no tenemos ningún experimento que nos de pistas acerca de si las propiedades internas de los átomos imponen un resultado particular. ¿Debemos esperar descubrir estas propiedades en algún momento (como fases quizá del movimiento interno de los átomos)? ¿O debemos creer que el acuerdo entre teoría y experimento, en tanto a nuestra incapacidad de dar las condiciones necesarias para una descripción causal de los eventos, es una especie de armonía preestablecida que se basa en la no existencia de dichas condiciones? Yo mismo tiendo a renunciar al determinismo en el mundo atómico. Pero esto es una cuestión filosófica en la cual los argumentos físicos por sí solos no son decisivos.

Es decir, la mecánica cuántica ortodoxa (obviando el postulado de proyección) nos indica que el estado tras una interacción se describe mediante una superposición $\psi = \sum_i c_i \phi_i$, mientras que en los resultados de los experimentos no hay rastro de dicha superposición, obteniéndose como resultado sólo una de las ϕ_i con probabilidad $|c_i|^2$, según la regla de Born. En este sentido, pareciera que la mecánica cuántica es incapaz de predecir los resultados individuales de los experimentos y solo puede contentar a los físicos con predicciones probabilísticas. Consideramos que esta es una de las primeras formulaciones del problema de la medida: la ausencia de argumentos físicos que expliquen cómo y porqué se selecciona uno de los resultados posibles en cada realización de los experimentos, es decir, la justificación del postulado de proyección.³³

Previamente en ese mismo año Schrödinger desarrollaba la versión ondulatoria de la mecánica cuántica y publicaba "*Quantization as a Problem of Proper Values*", donde es-

³¹Traducción del autor de [6] p. 435. Artículo original: "*On the Quantum Mechanics of Collision*".

³²Aquí entendemos que la colisión implica una medida en tanto que nos proporciona información de uno de los dos objetos que colisionan, provisto que el otro forme parte del aparato de medida.

³³Como veremos más adelante, el postulado de proyección se divide en las versiones débil (el paso de una superposición a una mezcla estadística) y débil (la selección de uno de los resultados de dicha mezcla). La justificación de cada una de ellas responde a dos problemas distintos que como veremos se pueden enmarcar en ámbitos distintos: uno relativo al formalismo de la teoría y otro relativo su interpretación.

tablecía el concepto de función de onda ψ , dotándolo de un marcado carácter ontológico³⁴. Un año antes, en 1925, Heisenberg, Born y Jordan ya habían desarrollado la versión matricial de la teoría cuántica (con la misma potencia predictiva que la versión ondulatoria de Schrödinger) donde ψ no ostentaba tal privilegio. Tanto es así, que ese mismo año en uno de los artículos³⁵ fundacionales, Heisenberg escribía:

El presente artículo pretende establecer una base para la teoría de la mecánica cuántica fundada exclusivamente sobre las relaciones entre magnitudes que son en principio observables.

Entendemos que Heisenberg no ve la necesidad de añadir nuevos elementos a la teoría. Lo que Schrödinger hizo en su artículo de 1926 fue hacer la mecánica cuántica más intuitiva, en tanto que tradujo el lenguaje matricial de Heisenberg, Born y Jordan a un lenguaje diferencial (ec. de Schrödinger) al que los físicos teóricos de la época estaban más acostumbrados. El precio, que continuamos pagando hoy en día, fue el de priorizar la función de onda y su dinámica diferencial como elemento fundamental de la teoría por encima de los observables (las magnitudes a las que Heisenberg se refiere en la cita) y su álgebra. Más aún, dos años después mantenía³⁶

... uno podría estar tentado a concluir que detrás del mundo estadístico, observado, existe un mundo “real” escondido, en el que la ley de causalidad es aplicable. Queremos declarar explícitamente nuestra creencia en que estas especulaciones son a la vez infructuosas e inútiles. La única tarea de los físicos es la de describir las relaciones entre percepciones.

Con el paso del tiempo se iba haciendo cada vez más patente que el proceso de medida traía consecuencias novedosas que diferían de su equivalente clásico. Pareciera como si el sistema observado interactuara con el aparato de medida. Por esta razón, en 1927, Pauli distinguió entre dos tipos de medida: cuando la distribución de probabilidad del observable no cambia durante la medida estamos ante una medida de *primera especie*, por otra parte esta será de *segunda especie* si el proceso de medida cambia dicha distribución de probabilidad.

Poco a poco se iba construyendo lo que hoy conocemos como la *interpretación de Copenhagen* (IC), en la que Bohr tuvo un papel fundamental. Ni él, ni el resto de los contribuyentes a la IC dieron ninguna pista sobre como enmarcar el problema de la medida, fundamentalmente

³⁴Según algunos autores^[21], este es el origen del problema de la medida: pensar que la función de onda existe a nivel físico, es decir, que es de lo que “están echas” las cosas a cada instante de tiempo (de la misma forma que por ejemplo la luz “esta hecha” de campo electromagnético). De hecho, asociar tal importancia a la función de onda, o al estado cuántico ψ , es una decisión meramente interpretativa.

³⁵Traducción del autor de W. Heisenberg, “*Quantum-Theoretical Re-Interpretation of Kinematic and Mechanical Relations*” p.261 (<http://fisica.ciens.ucv.ve/~svincenz/SQM261.pdf>). Aquí entendemos que obviamente la función de onda no es *observable* o *medible* en el mismo sentido en el que lo son los observables posición, energía, ..., estos son medibles para cada realización de los experimentos, mientras que la función de onda solo es *medible*, o mejor dicho *reconstruible*, a partir de distintas realizaciones del mismo experimento.

³⁶Traducción del autor de W. Heisenberg, “*The Actual Content of Quantum Theoretical Kinematics and Mechanics*” p.32 (<https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19840008978.pdf>). Donde hemos traducido *Wahrnehmungen* del artículo original como *percepciones* en vez de *observaciones*.

debido a la insistencia de Bohr en que el aparato de medida debía ser descrito clásicamente³⁷. En 1928 escribía³⁸:

Según la teoría cuántica, la simple imposibilidad de despreciar la interacción [del sistema] con la acción de medir significa que toda observación introduce un elemento nuevo incontrolable.

De hecho, su argumento (y el de Heisenberg) era que precisamente la naturaleza clásica del aparato de medida provoca que la interacción sea incontrolable. Así desplazó la medida fuera del ámbito de una descripción cuántica.

La justificación que da Bohr ante tal argumento es honesta: dado que nuestros conceptos, el lenguaje usual en el que hablamos y pensamos, están determinados por nuestra experiencia cotidiana y esta es descrita satisfactoriamente por la mecánica clásica, estamos obligados a pensar y hablar en términos clásicos. Incluso al realizar cualquier experimento en el dominio de la física atómica debemos mantener este lenguaje, dado que siempre será necesaria una interacción con un instrumento de medida macroscópico que medie entre el objeto microscópico y el observador humano. Es más, para él no tiene sentido hablar o pensar sobre observables cuánticos independientemente del contexto de su medida. ¡La posición de una partícula libre no está bien definida!, puesto que si quisiésemos medirla, la partícula ya no sería libre³⁹. Estos dos argumentos conforman lo que se conoce por el *principio de correspondencia fuerte*^[3] (siendo la versión débil el requerimiento de recuperar el límite clásico cuando $\hbar \rightarrow 0$):

Un observable cuántico está exclusivamente definido dentro del contexto de la medida que mide dicho observable, el montaje experimental y los resultados de la medida han de ser descritos en términos clásicos.

Es decir si una magnitud Q es medida en el sistema S en el tiempo t , entonces Q toma un valor *particular* para S en t .

Más tarde, en una carta a Schrödinger de 1935, Bohr declaraba⁴⁰:

Por supuesto el argumento aquí es, ante todo, que en tanto [los aparatos] hayan de funcionar como instrumentos de medida, estos no pueden ser incluidos en el ámbito de aplicación propio de la mecánica cuántica.

Bohr sabía perfectamente que, en tanto está compuesto de átomos, el instrumento de medida podía ser descrito cuánticamente. No obstante la causa de que la descripción cuántica sea inadecuada, no viene de su carácter macroscópico, sino del rol que asociemos al instrumento. Es decir, podríamos describirlo cuánticamente, pero al hacerlo, Bohr sostiene que tendríamos que

³⁷Hoy sabemos que esta afirmación es inconsistente, tanto a nivel formal, dado que tiene la consecuencia de que aparato y sistema permanezcan desacoplados, véase [10] p. 284; como a nivel conceptual dado que el aparato tiene que tener una parte cuántica que interaccione con el sistema y por tanto "...la transferencia de información de un objeto microscópico a un instrumento de medida es un proceso microscópico, que ha de ser descrito mediante la mecánica cuántica", véase [3] p. 197.

³⁸Traducción del autor de [6].

³⁹"*Teoria txori*".

⁴⁰Traducción del autor de [3] p. 115.

interferir con su funcionamiento de tal manera que dejaría de funcionar como un instrumento de medida. Es precisamente la *posibilidad* de una descripción clásica lo que convierte al aparato un instrumento de *medida*.

Ese mismo año, respondiendo esta vez a Einstein, Podolski y Rosen, escribía⁴¹:

El procedimiento de medida tiene una influencia esencial en las condiciones sobre las que se asienta la definición misma de las magnitudes físicas consideradas.

En este sentido se podría decir que Bohr (y Heisenberg) sostiene una postura *empirista* o incluso *instrumentalista* respecto a la mecánica cuántica: las entidades del formalismo no son inherentes a los sistemas físicos microscópicos sino características de los experimentos. La función de onda es simplemente una herramienta para predecir los resultados de los experimentos y por tanto no ostenta el carácter ontológico antes mencionado. En palabras de Bohr, es una representación simbólica de “leyes estadísticas que gobiernan las observaciones accesibles bajo condiciones específicas”⁴².

Por otro lado, en contraposición tenemos el enfoque *realista*, en el que dichas entidades no se asocian a los resultados de los experimentos sino al sistema físico en sí. Ejemplos de partidarios de este enfoque serían Einstein y Schrödinger. Este último considera que la función de onda describe sistemas individuales, mientras que Einstein la asociaba a un conjunto de sistemas idénticos y no la consideraba un *elemento de realidad física*, “Si podemos predecir con certeza [...] el valor de una magnitud física sin perturbar un sistema en forma alguna, entonces existe un elemento de realidad física asociado a esta magnitud”^[7] (EPR, 1935). Aún así Einstein pensaba que los fenómenos cuánticos sí podían ser descritos en base a elementos de realidad física, que están *ocultos* a las técnicas de medida actuales.

No obstante, Bohr también encaja en parte en una versión *contextualista* o *relacionalista* del enfoque realista, dado que “en el contexto de una medida, [Bohr] piensa que ciertas leyes clásicas son también válidas a nivel microscópico y por tanto atribuye *realidad*, en el sentido clásico usual, a los conceptos clásicos definidos en este contexto”^[3]. De hecho, en vez de considerar que la dependencia de las propiedades físicas en las condiciones experimentales es de naturaleza causal (en el sentido Newtoniano), propone una analogía con la dependencia de las relaciones de simultaneidad en los sistemas de referencia de la relatividad especial:

La teoría de la relatividad nos recuerda el carácter subjetivo [dependiente del observador] de todos los fenómenos físicos, que depende esencialmente del estado de movimiento del observador.⁴³

En consecuencia de lo expuesto, para Bohr (y en general para cualquiera que adopte el enfoque empirista) no existe el problema de la medida *convencional* (el que venimos describiendo), puesto que al tratar el montaje experimental clásicamente y la función de onda simplemente como un constructo mediante el cual calcular probabilidades, la superposición y la selección

⁴¹Traducción del autor de [7].

⁴²Traducción del autor de [3] p. 74.

⁴³Traducción del autor de [7] (Bohr, 1929).

de una de sus componentes se da exclusivamente en tanto al conocimiento que cada observador tiene sobre el sistema, no sobre ninguna propiedad física. En general el problema de la medida convencional surgirá cuando consideremos el instrumento de medida como un objeto cuántico, cuyos estados sean susceptibles de la aplicación del principio de superposición.

Hasta 1932 nadie había intentado formalizar el proceso de medida, fue von Neumann⁴⁴ quien en su ya legendaria obra “Mathematical Foundations of Quantum Mechanics” sentó las bases para un tratamiento matemático del proceso de medida. A diferencia de Bohr, Heisenberg y Einstein quienes construían el formalismo matemático a partir de un esqueleto conceptual desarrollado *a priori*, von Neumann pone primero el énfasis en el desarrollo del formalismo matemático, permitiendo que los nuevos conceptos físicos emerjan naturalmente de este último. Von Neumann clasifica la evolución de los sistemas cuánticos en dos tipos: el primero es la *evolución unitaria* normal del vector de estado, descrita por la ecuación de Schrödinger, o de los observables, descrita por la ecuación de movimiento de Heisenberg; el segundo tipo de evolución lo denominó *reducción del paquete de ondas*, representa el cambio sufrido por el sistema durante el proceso de medida. A diferencia del primero es un proceso discontinuo, no causal, instantáneo, no unitario e irreversible. Postuló que si el observable \hat{O}_S es medido en el sistema S en un estado arbitrario $|\psi\rangle$, entonces este último es *proyectado* después de la medida a uno de los autoestados $|o_j\rangle$ del observable medido \hat{O}_S , con probabilidad $|\langle o_j|\psi\rangle|^2$. Esto es lo que se denomina como el *postulado de proyección*.

El proceso de medida se divide a su vez en dos partes, la primera en la que la superposición de estados se transforma en una mezcla estadística (de aquí su naturaleza no causal) y la segunda en que uno de los términos de la mezcla es obtenida. Para este segundo proceso, von Neumann da una explicación controvertida, según él la selección ocurre cuando tenemos en cuenta todos los sistemas que intervienen en el proceso de medida, es decir, para tener una imagen completa de la situación debemos tener en cuenta no solo el aparato de medida sino, por ejemplo, la luz que nos permite leer el resultado, el aire a través del cual pasa esa luz y por último la estructura del observador consciente, incluida su “vida interior intelectual”. Es decir, a medida que la información se va propagando, debemos ir redefiniendo el sistema y el aparato. Cuando sistema y aparato interactúan, se convierten en un nuevo sistema, a ser medido por la luz que emite la bombilla del laboratorio, etc. Al final de esta *cadena de von Neumann* se encuentra siempre un observador consciente, cuya “vida interior intelectual” es la última responsable de la selección de uno de los posibles resultados. Este razonamiento no es satisfactorio dado que la mente del observador está fuera del dominio de aplicación de la física, por tanto en algún punto hay que cortar la cadena, lo que se denomina *corte de Heisenberg* (del inglés, *Heisenberg’s cut*), para considerar que la medida ha sido realizada.

(Por completar)

⁴⁴Véase [3, caps. 1.6, 3.1.2, 3.2.2; 6, p.3; 7, p.5; 1 cap.14]

A.2. Consideraciones epistemológicas.

En tanto que el problema de la medida está íntimamente relacionado con el concepto de *interpretación* de la mecánica cuántica, vemos razonable dedicar algo de tiempo a intentar clarificar este concepto y sus distintos usos⁴⁵.

En general una teoría física consta de un *formalismo*, un *dominio de aplicación* y unas *reglas de correspondencia*. Por sí sólo el formalismo consiste en una estructura matemática de cálculo y en términos descriptivos, tales como ‘onda’ o ‘partícula’ carentes de significado empírico. No tienen más significado del que obtienen por ocupar un lugar determinado dentro del formalismo. El dominio de aplicación consiste en el conjunto de todas las situaciones físicas para las cuales la teoría hace predicciones que pueden ser corroboradas en base a observaciones y experimentos. Para que se pueda dar tal corroboración, las reglas de correspondencia asignan valor y significado empírico a los elementos del formalismo, pero no se expresan en el lenguaje del formalismo, si no en términos que se suponen entendidos en base a teorías físicas anteriores. Cuando las reglas de correspondencia R han establecido dichos nexos sobre el formalismo F , decimos que hemos *interpretado físicamente* el formalismo dando lugar a F_R .

Podemos adoptar una postura *positivista* y asumir que una teoría física no es más que “un sistema de proposiciones matemáticas cuyo objetivo es representar de la manera más simple, completa y exacta un conjunto de leyes experimentales”⁴⁶. Sin embargo, otras posturas incluyen más requerimientos, como que la teoría posea una función explicativa o que tenga el poder predictivo suficiente como para descubrir hechos todavía desconocidos. En este sentido F_R debe ser complementada por un ‘principio unificador’ que establezca una coherencia interna respecto de las características descriptivas de la teoría, dotándola de poder explicativo y predictivo. En este caso decimos que estamos realizando una *interpretación filosófica*, en tanto que interpretamos F_R , no F como en el párrafo anterior.

Claramente la completitud de una interpretación física (su capacidad de no dejar ningún elemento del formalismo sin significado empírico) impone restricciones sobre las posibles interpretaciones filosóficas, no obstante, por su misma naturaleza, siempre existirá una libertad residual de la interpretación filosófica que no podrá ser determinada unívocamente por la interpretación física. Por ello entendemos que las consideraciones filosóficas resultan relevantes cuando hablamos de interpretaciones de la mecánica cuántica. Tanto en un sentido puramente fundacional como también en tanto que puedan apuntar hacia nuevas líneas de investigación que quizá no fueran accesibles de otra manera.^[21]

⁴⁵Nos basaremos fundamentalmente en [1-3]

⁴⁶Pierre Duhem en [2] p. 11.

A.3. Teoría Clásica de la Medida.

En este apéndice establecemos los conceptos clave de la teoría clásica de la medida. Por un lado creemos que nos permitirá entender mejor las diferencias que existen entre ambas teorías y por otro lo consideramos apropiado ante la sorprendente escasez de bibliografía⁴⁷ encontrada por el autor respecto de esta última.

Para entender mejor las semejanza estructural entre las teorías clásica y cuántica de la medida, en esta sección adoptamos un punto de vista *operacionalista*⁴⁸ del proceso de medida, una versión un poco más dura del punto de vista empirista del que hablábamos en la sección A.1. En consecuencia optamos por entender que las probabilidades son subjetivas, en tanto que representan la *certidumbre* que tiene un observador sobre un determinado sistema, en lugar de describir *propiedades objetivas* intrínsecas al sistema⁴⁹.

En este sentido definimos el estado de un sistema clásico como una distribución de probabilidad en el espacio de fases. Así, esta distribución representa el estado de conocimiento del observador respecto de las variables dinámicas y, a no ser que sea exclusivamente distinta de cero para un cierto valor de dichas variables, diremos que representa un estado de conocimiento incompleto o de *incertidumbre*. Además se da la aparentemente incómoda consecuencia de que observadores con distinta información asignarán distintos estados al mismo sistema. No obstante, esto no supone ningún problema mientras que los diferentes estados sean *consistentes*, es decir, que los distintos observadores asignen una probabilidad no nula al menos a una configuración (unos valores determinados para las variables dinámicas) del sistema. Esto garantiza que existe al menos un estado de conocimiento completo accesible por el sistema en el que todos los observadores se pueden poner de acuerdo.

Considerando de momento que el proceso de medida no afecta a la magnitud física en cuestión, no debería sorprendernos que el estado del sistema sí se vea afectado por la medida. Tiene sentido porque, como hemos dicho, el estado del sistema representa el conocimiento que tiene el observador y precisamente el objetivo de hacer experimentos es aumentar dicho conocimiento. Lo que estamos buscando es una manera de cuantificar cómo cambia nuestro estado de conocimiento al obtener nueva información. Este es precisamente el cometido de la *inferencia Bayesiana*. En los siguientes párrafos describiremos superficialmente en qué consiste esta disciplina.

Inferencia Bayesiana.

Como hemos dicho, la inferencia Bayesiana nos permite cuantificar el cambio que se produce en nuestro conocimiento sobre una magnitud física x al obtener, por medio de los ex-

⁴⁷En la presente sección nos basaremos fundamentalmente en [1, 11, 12, 19].

⁴⁸“En última instancia lo que es un sistema físico es cuestión de decisión, es decir de objetivos prácticos, y las variables que la teoría define son en realidad el resultado de acciones operativas.” (Traducción del autor de [1] p. 21.). Para más detalles véase: [3] p. 101, [1] cap. 18 ó D. Hand, *Statistics and the Theory of Measurement*.

⁴⁹Estos dos interpretaciones sobre la probabilidad suelen referirse a los enfoques Bayesiano y frecuentista de la estadística, en este último las probabilidades están directamente relacionadas con la frecuencia que se da un suceso, mientras que el primero las entiende como la certidumbre que tiene un observador de que se vaya a producir tal suceso.

perimentos, cierta información y , relacionada con dicha magnitud. En tanto que *a priori* no conocemos el valor de x (por eso hacemos experimentos) ni de y , asumimos que son *variables aleatorias* que, por simplicidad, pueden tomar cualquier valor real. Nuestro conocimiento acerca de x está representado por una *distribución de probabilidad*, $P(x)$, que cuantifica, en función de la información disponible, cuán probable es que x tome cierto valor. Nos referimos a esta distribución como nuestro *estado de conocimiento* de x .

Dado que necesitamos realizar experimentos, y estos nunca son infinitamente precisos, asumimos que x e y están relacionadas probabilísticamente, y esperamos que la distribución de probabilidad para y alcance su máximo en $y = x$. Dado que esta distribución de probabilidad depende de x , es una distribución de probabilidad *condicional* o *condicionada*, se escribe $P(y|x)$, se lee “la probabilidad de y dado x ” y en este caso la denominaremos directamente *función de verosimilitud* o simplemente *verosimilitud*⁵⁰. Ésta es determinada específicamente por el procedimiento físico y el montaje experimental empleados en la medida, y su conocimiento, provisto el valor que toma x , define la medida completamente.

Para determinar el cambio de nuestro estado de conocimiento sobre x , $P(x)$, al obtener información y relacionada con x , emplearemos la siguiente expresión entre las probabilidades condicionales, $P(x|y)$ y $P(y|x)$, y la probabilidad *conjunta* (es decir, que se den x e y simultáneamente),

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x). \quad (61)$$

A $P(x)$ y $P(y)$ se las conoce como distribuciones *marginales*, y representan las distribuciones de probabilidad para cada variable sin tener en cuenta el valor que pueda tomar la otra, formalmente,

$$P(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)dy \quad P(y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x, y)dx \quad (62)$$

Reorganizando (61), obtenemos el *teorema de Bayes*,

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{P(y)}, \quad (63)$$

donde $P(y) = \mathcal{N}$ juega el papel de factor de normalización,

$$\mathcal{N} = \int_{-\infty}^{\infty} P(x|y)P(x)dx = P(y) \quad \rightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(y|x)P(x)}{\mathcal{N}}. \quad (64)$$

En el lado de la derecha de esta última expresión tenemos nuestro estado de conocimiento $P(x)$ antes de haber obtenido la información y , en el de la izquierda la probabilidad de obtener x dado y , es decir, en la derecha $P(x)$ representa la probabilidad *a priori* y en la izquierda $P(x|y)$ la probabilidad *a posteriori*. Por tanto ya sabemos como cambia nuestro

⁵⁰Técnicamente la función de verosimilitud no es equivalente a la probabilidad condicional sino a $\alpha P(A|B = b)$, donde α es una constante de proporcionalidad y b el valor concreto que toma la variable aleatoria B . Aquí hemos optado por no diferenciar entre la variable aleatoria en sí y su valor concreto. No obstante, esta falta de rigor no es relevante para nuestros propósitos (véase [11] p. 5.).

estado de conocimiento cuando obtenemos nueva información, el teorema de Bayes nos dice que lo único que tenemos que hacer es multiplicar nuestro estado de conocimiento actual por la verosimilitud $P(y|x)$ y normalizar el resultado. El teorema de Bayes (64) es el teorema fundamental de la teoría clásica de la medida^[11].

Ejemplo Bayesiano.

Pongamos un ejemplo para entender mejor esto último. Supongamos que x representa el estado de un gato $x = \{\text{dentro de la caja, fuera de la caja}\}$ e y el estado de ánimo de Schrödinger $y = \{\text{enfadado, alegre}\}$ y asumimos que Schrödinger casi nunca está enfadado, pero que prácticamente siempre que lo está, mete a su gato en la caja. Tendríamos entonces que la probabilidad conjunta $P(x = \text{dentro}, y = \text{enfadado})$ es muy pequeña dado que *entre todos* sus estados de ánimo, pasa muy poco tiempo enfadado, pero sin embargo la probabilidad condicional $P(x = \text{dentro} | y = \text{enfadado}) = 1$, porque en el *caso particular* de que esté enfadado, el gato siempre está en la caja. Ahora para ilustrar cómo cambia nuestro estado de conocimiento al recibir cierta información vamos a cambiar un poco las cosas. Supongamos primero que no tenemos ninguna información sobre el sistema, es decir nuestro estado de conocimiento *a priori* es plano $P(x = \text{dentro}) = P(x = \text{fuera}) = 1/2$ y que nos dan la función de verosimilitud siguiente,

$P(y x)$	$x = d$ (dentro)	$x = f$ (fuera)
$y = e$ (enfadado)	0.999	0
$y = a$ (alegre)	0.001	1

Tabla 1: Función de verosimilitud. Schrödinger siempre está alegre si el gato está fuera de la caja, mientras que cuando está dentro Schrödinger estará enfadado casi siempre.

Si ahora hablamos con Schrödinger y nos damos cuenta de que está alegre (obtenemos nueva información), la probabilidad (condicional) de que el gato esté fuera de la caja será,

$$P(x = f | y = a) = \frac{P(a|f)P(f)}{P(a|d)P(d) + P(a|f)P(f)} = \frac{1}{1,001} \approx 1. \quad (65)$$

Suponiendo ahora que sabemos que el gato de Schrödinger suele estar dentro de la caja, es decir, que nuestro estado de conocimiento *a priori* está fuertemente desplazado hacia $x = d$, por ejemplo $P(x = d) = 0,99$, cuando recibimos la información de que $y = a$, resulta,

$$P(x = f | y = a) = \frac{P(a|f)P(f)}{P(a|d)P(d) + P(a|f)P(f)} = \frac{0,01}{0,0199} \approx \frac{1}{2}. \quad (66)$$

En resumen, la moraleja es que las probabilidades que calculemos están influenciadas por la información que tengamos en cada momento. Si queremos que dos observadores se pongan de acuerdo en las probabilidades que calculan, tendremos que asegurarnos de *actualizar* su estado de conocimiento.

Una de las principales críticas al enfoque Bayesiano es precisamente la dificultad en la elección de estados previos de conocimiento $P(x)$, dado que el observador normalmente tiene

cierta información antes de hacer medidas pero no siempre es posible cuantificar este conocimiento. Una posible solución es asumir que el observador no tiene ninguna información, no obstante tampoco es sencillo determinar que $P(x)$ cuantifica la ausencia total de conocimiento⁵¹. Además merece la pena resaltar que nuestro conocimiento no se vuelve necesariamente más certero cuando realizamos una medida. No obstante, todas las medidas clásicas tienen la propiedad de que al hacer medidas, nuestro conocimiento sobre el valor de magnitud medida se vuelve más certero *en promedio*.

El problema de la medida clásico.

La mecánica clásica asume que las variables siempre tienen unos valores determinados y que realizando medidas podemos aproximarnos arbitrariamente a dichos valores. Es decir, que la precisión de las medidas se puede aumentar sin límite. Pero incluso asumiendo esta afirmación la mecánica clásica también tiene un problema de la medida:

Problema de la medida clásico. Es imposible medir simultáneamente con infinita precisión un par de variables conjugadas.

Si queremos realizar una medida de posición en un sistema es necesario un instrumento acoplado rígidamente al aparato de medida que defina el sistema de referencia espacial. Por el contrario, si queremos medir el momento de un sistema necesitamos un instrumento que no esté rígidamente acoplado al aparato, de tal manera que conociendo el momento del instrumento antes y después de la medida seamos capaces, aplicando conservación del momento, de determinar el momento del sistema exactamente. Dado que el coeficiente elástico del aparato puede ser arbitrariamente grande o pequeño, en física clásica es posible reducir la incertidumbre arbitrariamente. Por otro lado si solo conociéramos una de las variables conjugadas, no tendríamos una descripción completa del sistema.

No obstante, este problema se resuelve apelando al postulado de continuidad. Como los sistemas clásicos tienen una evolución temporal continua, podemos medir el valor de la posición en un cierto instante t_1 y el momento en un instante posterior t_2 . Teniendo en cuenta las ecuaciones de Hamilton y el postulado de continuidad, es posible determinar con suficiente precisión la posición en t_2 y el momento en t_1 obteniendo así una descripción completa del sistema.

Sin embargo en mecánica cuántica no ocurre lo mismo dado que tenemos un límite de incertidumbre impuesto por la finitud de la constante de Planck por tanto no podemos invocar ni el postulado de continuidad ni el de precisión arbitraria.

⁵¹Por ejemplo, no está claro como cuantificar nuestra ignorancia sobre el valor de una magnitud positiva como puede ser el volumen, una $P(x)$ que fuera constante en el intervalo $(0, \infty)$ no es la elección correcta. Una estrategia para solucionar este problema es la idea de que nuestro conocimiento *a priori* $P(x)$ ha de ser invariante frente a cierta transformación: si no sabemos nada acerca de una cantidad positiva, multiplicarla por cualquier número positivo no debería cambiar nuestro estado de conocimiento. Por tanto uno ignora la *escala* de λ y solo hay una $P(x)$ que sea invariante ante transformaciones de escala, esta es $P(x) = a/x$, donde a es una constante sin dimensiones. Para más información ver [11] p. 12.

Referencias

- [1] G. Auletta, *Foundations and Interpretation of Quantum Mechanics* (World Scientific Publishing Co., 2001).
- [2] M. Jammer, *The Philosophy of Quantum Mechanics: The Interpretations of QM in historical perspective.* (John Wiley and Sons, 1974).
- [3] W. M. de Muynck, *Foundations of Quantum Mechanics, an Empiricist Approach* (Kluwer Academic Publishers, 2002).
- [4] J. Wheeler, W. Zurek (editores), *Quantum Theory and Measurement* (Princeton University Press, 1983).
- [5] M. Schlosshauer (editor), *Elegance and Enigma. The Quantum Interviews.*, (Springer, 2011).
- [6] K. Landsman, *Fundamental Theories of Physics*, Vol. 188 (Springer Open, 2017).
- [7] Standford Encyclopedia of Physics, *Measurement in Quantum Theory* (<https://stanford.library.sydney.edu.au/archives/sum2010/entries/qt-measurement/>, 2007).
- [8] P. Mayer, *Guidelines for writing a Review Article* (ueberfachliche-kompetenzen.ethz.ch/dopraedi/pdfs/Mayer/guidelines_review_article.pdf).
- [9] C. Rovelli, *Physics Needs Philosophy. Philosophy Needs Physics*, (arXiv:1805.10602v1 [physics.hist-ph], 2017).
- [10] G. Auletta, M. Fortunato, G. Parisi, *Quantum Mechanics* (Cambridge University Press, 2009).
- [11] K. Jacobs, *Quantum Measurement Theory and its Applications* (Cambridge University Press, 2014).
- [12] H. Wiseman, G. Wilburn, *Quantum Measurements and Control* (Cambridge University Press, 2010).
- [13] H. Breuer, F. Petruccione, *The Theory Of Open Quantum Systems*, p. 111, (Oxford University Press, 2003).
- [14] B. C. Hall, *Quantum Theory for Mathematicians*, p. 429, (Springer, 2013).
- [15] M. Schlosshauer, *Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics*, (arXiv:0312059v4 [quant-ph], 2005)
- [16] M. Schlosshauer, *Decoherence, and the Quantum-to-Classical transition*, (Springer, 2007).
- [17] W. Zurek, *Decoherence, Einselection, and the Quantum Origins of the Classical* (arXiv:0105127v3 [quant-ph], 2003).
- [18] T. Maudlin, *Three Measurement Problems* (<https://doi.org/10.1007/BF00763473>, 1995).
- [19] M. Namiki, S. Pascazio, H. Nakazato, *Decoherence and Quantum Measurements* (World Scientific Publishing Co., 1999).
- [20] A. Khrennikov, *Von Neumann and Luders Postulates and Quantum Information Theory* (International Journal of Quantum Information vol. 7, no. 7, 2009).
- [21] C. Rovelli, *Space is blue and birds fly through it*, (arXiv:1712.02894v3, 2017).
- [22] A. Elby, J. Bub, *Triorthogonal uniqueness theorem and its relevance to the interpretation of quantum mechanics* (Physical Review A, vol. 49, no. 5, 1994).
- [23] W. Zurek, *Environment-induced superselection rules* (Physical Review D, vol. 26, no. 8, 1982).
- [24] O. Pessoa Jr., *Can the decoherence approach help to solve the measurement problem?* (Synthese, 113, p. 323-346, 1998).
- [25] S. Fortín, O. Lombardi, *Partial Traces in Decoherence and in Interpretation: What Do Reduced States Refer to?* (arXiv:1404.3264v1 [quant-ph], 2014).
- [26] S. Adler, *Why decoherence has not solved the measurement problem: a response to P.W. Anderson.* (arXiv:quant-ph/0112095v3, 2003).
- [27] A. Hobson, *Why decoherence solves the measurement problem* (arXiv:1308.4055v2 [quant-ph], 2013).
- [28] U. Mohrhoff, *Probabilities from envariance?* (arXiv:quant-ph/0401180v1, 2004).
- [29] S. Wolfram, *A New Kind of Science*, p. 737, (Wolfram Media Inc., 2002).