

# SOBRE LA FORMA DE LA TIERRA

Enrique Cantera del Río

## 1-Introducción

Según el modelo de Copérnico la tierra es un cuerpo celeste con forma esférica como el sol, la luna y los planetas y se mueve en un círculo alrededor del Sol; que ocupa una posición central y fija. Para justificar la existencia de días y noches tenemos que aceptar que la tierra gira también respecto de un eje propio. Si el Sol, y en general las *estrellas fijas, esfera celeste, bóveda celeste o firmamento* sigue la trayectoria aparente Este-Oeste; entonces el eje de giro de la tierra debe estar en la dirección Norte-Sur. La inclinación del eje de rotación Norte-Sur de la tierra sobre el plano de la trayectoria de la tierra alrededor del sol o plano eclíptico es un hecho fácilmente constatable. En la

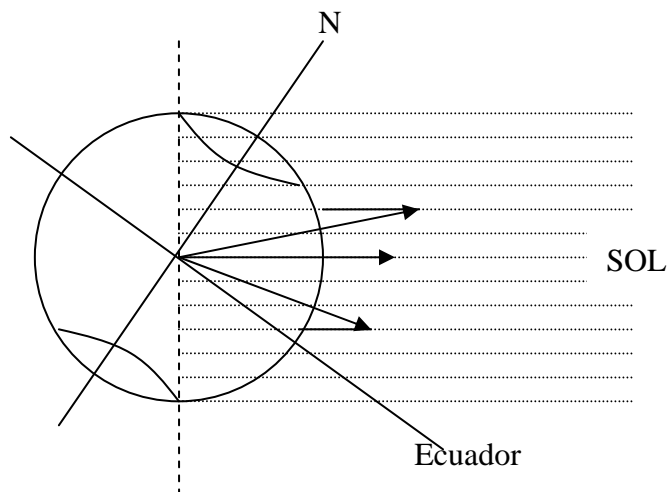


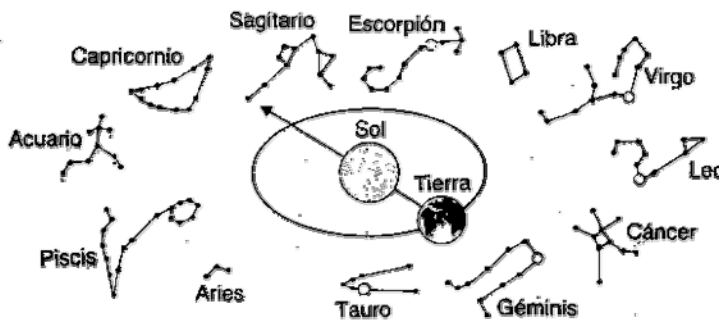
imagen vemos el efecto de los rayos de sol sobre la tierra inclinada. Los rayos son paralelos al plano eclíptico aproximadamente (sol muy lejano). La línea vertical punteada determina la región de sombra (noche) sobre la tierra. Vemos que existen unas zonas entorno a los polos Norte y Sur que, aunque la tierra gire, siempre luce el sol (día) o nunca lo hace (noche).

Este fenómeno está relacionado con el *sol de media noche* y está limitado geográficamente por los círculos polares ártico y antártico, cuya latitud está relacionada directamente con la inclinación del eje N-S sobre la eclíptica.

Por otra parte vemos el efecto de sombra sobre las tres flechas dibujadas. Las sombras apuntan hacia el sur o hacia el norte y existe una latitud en que la sombra no tiene componente norte o sur. Los puntos correspondientes sobre la tierra están la latitud de los trópicos de cáncer y capricornio y los puntos correspondientes en la tierra están sobre el plano eclíptico al mediodía.

Hay que decir que el dibujo corresponde al día del *solsticio de verano en el hemisferio norte* y con el sol de mediodía, en correspondencia con la anulación de la sombra en el punto correspondiente al *trópico de cáncer*. A lo largo de este día todos los puntos de este paralelo terrestre experimentan la anulación de la sombra al medio día. El nombre de *cancer* procede de la constelación del zodiaco sobre la que está el sol en este día. Las constelaciones son 12 grupos de estrellas enormemente alejadas (estrellas fijas) formando un círculo en el firmamento. A lo largo del año, según el mes, desde la tierra

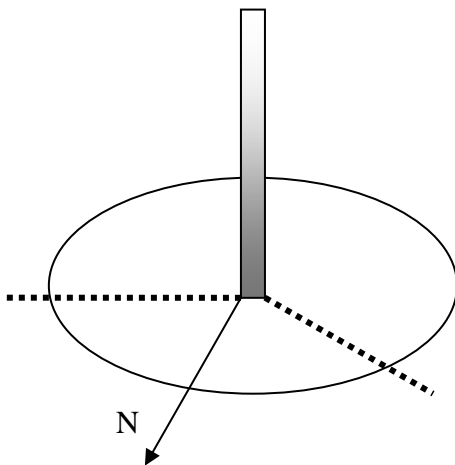
se vería al sol sobre el fondo de una de estas constelaciones, y se dice que el sol “está” en esa constelación. Esta visión es posible durante los eclipses de sol. Por la noche podemos ver la constelación opuesta; como si las constelaciones fuesen los números las horas en una esfera de reloj.



Debido a la conservación bastante aproximada en periodos anuales del momento angular de rotación de la tierra, el eje norte-sur se desplaza prácticamente paralelo a

sí mismo durante el desplazamiento de la tierra por el plano de la eclíptica. Por tanto el plano ecuatorial terrestre, perpendicular al eje norte-sur por definición, también se desplaza paralelamente a sí mismo. Este plano intersecta el plano de la eclíptica en una recta que va barriendo exhaustivamente el plano de la eclíptica. Necesariamente llega un momento en que el sol toca a dicha recta. En este momento los rayos solares llega a la tierra paralelos al plano ecuatorial y por tanto ahora en el ecuador terrestre la sombra se anula. Estos instantes se conocen como *Equinoccios* de primavera y otoño. La imagen correspondiente para la tierra se puede construir a partir de la anterior, pero girando los ejes norte-sur (*N*) y *Ecuador* de modo que *N* coincida con la línea de sombra y *Ecuador* sea paralela a los rayos solares.

Por otra parte, no es exacto decir que el sol sale por el este y se pone por el oeste. Lo correcto es decir que la trayectoria del sol es en dirección este-oeste. Esto se puede ver con un *gnomon* [3] que no es mas que una barra clavada en la vertical del suelo. Si anotamos en el círculo de referencia, tal como aparece en el dibujo, las sombras generadas por el sol al amanecer y al atardecer obtendremos un ángulo que, al dividirlo por la mitad, determina la dirección norte-sur, correspondiente a la sombra del sol de mediodía.

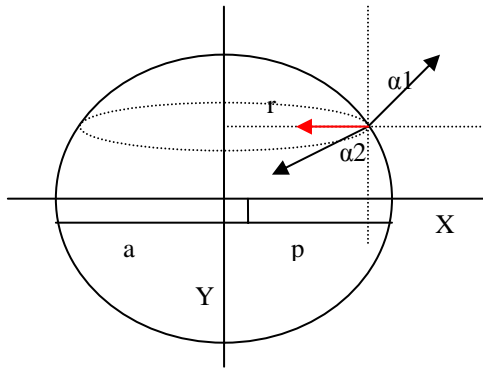


La antigua religión egipcia creía que el Sol, divinizado como *Ra*, atravesaba el “mundo subterráneo” por la noche y renacía a la mañana siguiente. Hubiese sido interesante la confrontación de las *opiniones* egipcias con la *experiencia* de las gentes que vivían por aquella época en los alrededores del círculo polar ártico. Sin embargo la religión egipcia (y otras antiguas), al presentarse socialmente como fuente de saber, no dudó en obtener de la experiencia disponible un saber sólido, que permitía predecir a los iniciados

acontecimientos como las crecidas del Nilo; destacando especialmente en Astronomía y Matemáticas. La *ocultación del conocimiento* es una corriente profunda de nuestra cultura que parece tocar a su fin en estos tiempos, en que el acceso al conocimiento es prácticamente público e inmediato gracias a las redes de comunicaciones, en especial Internet y es posible *acceder libremente al conocimiento cuando a uno le hace falta*.

## 2-Efecto del giro de la tierra en su forma.

Consideremos un cuerpo cualquiera sobre la superficie de la tierra. Visto desde un sistema de coordenadas inercial instantáneamente en reposo, dicho cuerpo describiría un movimiento circular uniforme con centro en el punto de intersección del eje de rotación de la tierra y el plano de dicha trayectoria circular. Si la tierra fuese perfectamente esférica, entonces la gravedad y fuerza de contacto normal sobre el cuerpo serían colineales sobre una línea que incluye el centro de la esfera. La composición vectorial de estas fuerzas, sin incluir rozamiento, claramente no



puede resultar en una fuerza neta centrípeta que justifique una trayectoria circular uniforme. Imaginemos una piscina con agua y sobre la que flota un objeto en reposo. En este caso la fuerza de contacto se atribuye a la presión del agua (y del aire), responsable del empuje que hace flotar al cuerpo, y según el principio clásico de Arquímedes debe ser colineal con el peso. Si en estas condiciones suponemos que el escenario propuesto debe ser posible, entonces lo más sencillo es suponer que la forma general de la tierra no puede ser esférica. En cambio una superficie en forma de elipsoide parece más en concordancia con la 2ª Ley de Newton en este caso, como se puede ver en el dibujo. El empuje, asociado a la *presión*, se mantendrá perpendicular a la superficie de contacto y el peso suponemos que sigue actuando en dirección al centro de la tierra no esférica. En lo relativo al principio de Arquímedes, esto supone considerar una *gravedad efectiva* que incluye la fuerza centrífuga inercial correspondiente.

Para completar el cálculo, primero aproximaremos la sección elíptica del dibujo utilizando las ecuaciones canónicas de la elipse[1]; en función de los parámetros de distancias máxima y mínima a los focos  $a$ ,  $p$ , utilizando un radio máximo  $R_{max}$  y un parámetro de pérdida de esfericidad  $\delta R$ :

$$x^2 4pa + y^2(a+p)^2 = ap(a+p)^2;$$

$$R_{max} = \frac{p+a}{2}, \quad \delta R = \frac{a-p}{2} \rightarrow$$

$$x^2(R_{max}^2 - \delta R^2) + y^2 R_{max}^2 = R_{max}^2(R_{max}^2 - \delta R^2)$$

derivando la expresión respecto de la coordenada  $x$

$$\frac{x}{y} \left( 1 - \frac{\delta R^2}{R_{max}^2} \right) + \frac{dy}{dx} = 0$$

introduciendo tangentes a la elipse y al círculo correspondiente en el sistema de coordenadas utilizado

$$\tan(\phi_{elipse}) = \frac{dy}{dx}; \quad \tan(\phi_{circulo}) = -\frac{x}{y} \rightarrow$$

$$\tan(\phi_{elipse}) = \left( 1 - \frac{\delta R^2}{R_{max}^2} \right) \tan(\phi_{circulo})$$

aplicando la regla de la diferencia de tangentes en trigonometría y en la aproximación en que  $\delta R \ll R_{max}$  y por tanto  $\Phi_{elipse}$  es muy próximo a  $\Phi_{circulo}$  tenemos

$$\delta\phi = \phi_{elipse} - \phi_{circulo} \approx \frac{\delta R^2}{2R_{max}^2} \text{Sen}(2\phi)$$

Ahora queda enlazar esto con el análisis mecánico planteado en el mismo dibujo anterior. Llamando  $N$  al empuje hidrostático,  $P$  al peso del objeto y  $R$  a la distancia entre el objeto y el centro de coordenadas, que podemos considerar aproximadamente como un valor medio entre el máximo y el mínimo. Como se ha dicho, se toma como aproximación que la dirección de  $P$  es hacia el centro de coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{N} + \bar{P} &= m\omega^2 r \bar{u}_r; \quad r = R \text{sen}(\alpha_2) \\ -G \frac{Mm}{R^2} \cos(\alpha_2) + N \cos(\alpha_1) &= 0; \\ G \frac{Mm}{R^2} \text{sen}(\alpha_2) - N \text{sen}(\alpha_1) &= m\omega^2 r; \end{aligned}$$

Eliminando  $N$  y aplicando la trigonometría elemental

$$\frac{GM}{R^2} \text{sen}(\alpha_1 - \alpha_2) = \omega^2 R \cos(\alpha_1) \text{sen}(\alpha_2)$$

Aplicando resultados anteriores a éste y con las siguientes aproximaciones:

$$\delta\phi = \alpha_1 - \alpha_2; \quad \alpha_1 \approx \alpha_2 \approx \pi - \phi \equiv \alpha; \quad R \approx R_{max}$$

obtenemos

$$\delta R \approx \frac{\omega R^2}{\sqrt{\frac{GM}{R}}}$$

Volviendo a la ecuación de la elipse, podemos comprobar que el radio mínimo viene dado por

$$R_{min} = \sqrt{pa} = \sqrt{R_{max}^2 - \delta R^2}$$

y por tanto el achatamiento  $A$  se puede aproximar por

$$A = R_{max} - R_{min} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega^2 R^4}{GM}$$

Podemos encontrar el achatamiento previsto para cuerpos celestes del sistema solar:

Cuerpo	Masa en kg	Radio Medio(km)	Frecuencia $\omega = 2\pi/T$ en $\text{seg}^{-1}$	A (km) medido	A (km) calculado	Error%
Sol	$1.9891 \times 10^{30}$	696.000	$2.78 \times 10^{-6}$	6.3	6.8	8
Mercurio	$3.302 \times 10^{23}$	2.440	$1.24 \times 10^{-6}$	0	0	-
Venus	$4.896 \times 10^{24}$	6.052	$3 \times 10^{-7}$	0	0	-
Tierra	$5.9736 \times 10^{24}$	6.371	$7.27 \times 10^{-5}$	22	11	50
Marte	$6.4186 \times 10^{23}$	3.387	$7.12 \times 10^{-5}$	20	8	60
Júpiter	$1.889 \times 10^{27}$	71.492	$1.76 \times 10^{-4}$	4.638	3.200	31
Saturno	$5.688 \times 10^{26}$	57.325	$1.64 \times 10^{-4}$	5.904	3.810	35
Urano	$8.686 \times 10^{25}$	25.559	$1.013 \times 10^{-4}$	586	376	36
Neptuno	$1.024 \times 10^{26}$	24.786	$1.085 \times 10^{-4}$	423	324	24
Luna	$7.3477 \times 10^{22}$	1.737	$2.66 \times 10^{-6}$	3	0	>>>100

## Conclusiones

Vemos que la mayor precisión del modelo corresponde al caso del sol y la menor al caso de la luna. En el caso de la tierra, se sabe por estudios de las huellas que dejaron las mareas sobre rocas de hace unos 3.000 millones de años que la duración del día era en aquella época de entre 18-20 horas; lo que produciría un achatamiento entorno a los 19 km. Debido a las fuerzas de marea el periodo de rotación de la tierra fue aumentando hasta las 24 horas actuales. Esta modificación de la velocidad de giro afectará a la forma general dependiendo de la capacidad elástica de la tierra[4]. Por otra parte los resultados apuntan a que el giro de los planetas no es la única causa de su achatamiento en el caso de los grandes planetas gaseosos; y en efecto sabemos que otra posible causa de esto son las fuerzas de tipo marea. Una fuerza de este tipo, causada por la gravedad de la tierra, se supone que actuó sobre la luna de modo que la rotación de la luna y la rotación de la tierra quedaron sincronizadas; lo que hizo que la luna muestre siempre la misma cara vista desde la tierra. Desde la tierra la existencia de estas fuerzas se evidencian en la regularidad de las mareas solares y lunares. Finalmente, se ha partido de una *aproximación* a la superficie de la tierra en forma de elipsoide. Sin embargo del análisis mecánico se puede derivar una ecuación diferencial para la forma de la tierra:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \left[ 1 - \frac{\omega^2}{GM} R^3 \right]; R = \sqrt{x^2 + y^2}$$

con la aproximación de un radio  $R$  aproximadamente constante, la ecuación diferencial corresponde con la de una elipse en su sistema de *coordenadas canónicas*. Note el lector que esta ecuación diferencial solo es válida en el sistema de referencia canónico de la elipse.

### **Apéndice : Precesión y Nutación en la rotación de la tierra**

En la propia tierra se pueden detectar los movimientos de precesión y nutación propios de la peonza. El movimiento de precesión se detectó inicialmente en el fenómeno de los equinoccios por astrónomos antiguos. El equinoccio corresponde a una fecha que se puede determinar de una forma precisa en la que la duración del día y de la noche son iguales y corresponden a los cambios de estación invierno-primavera y verano-otoño. En la antigüedad se constató que durante estas fechas, el sol estaba en la constelación de Aries en un caso y en la de Libra en el otro. Pero con el paso de los siglos se evidenció que el sol cambiaba de constelación durante los equinoccios y lo que antiguamente era Aries ahora es Piscis y Libra es Virgo. Esta precesión se realiza respecto al *polo eclíptico*, es decir, respecto a un eje ideal perpendicular al plano de la órbita terrestre y solidario al centro de la tierra. Actualmente se considera que el desplazamiento angular correspondiente es de 50,290966 segundos de arco por año, lo que supone un giro completo cada 25.776 años. Debido a esto también el eje de la tierra cambia de dirección y la estrella polar del firmamento nocturno ha ido cambiando de "titular" con el paso del tiempo. La estrella que ahora conocemos como *Polar*, en la constelación de la Osa Menor, hace 4.800 años era *Thuban*, en la constelación del Dragón.

El movimiento de nutación de la tierra tiene un periodo mucho mas corto que el de precesión : 18.6 años y se evidencia en la localización de los paralelos terrestres correspondientes a los trópicos y los círculos polares. Debido a la nutación la localización de estos paralelos varía periódicamente cada 18.6 años. La imagen adjunta, cortesía de wikipedia, muestra la posición del trópico de cáncer en años sucesivos en una zona de México. Por supuesto este movimiento también afecta a la



dirección del eje de rotación de la tierra, pero el efecto es relativamente pequeño.

## **Referencias**

[1] Análisis elemental del movimiento bajo fuerza central de tipo Newtoniano. En esta misma web por este mismo autor

[2] Datos del sol y los planetas tomados de wikipedia (inglés)

[3]Gnomon : <http://fr.wikipedia.org/wiki/Gnomon>

[4]Manto terrestre : [http://es.wikipedia.org/wiki/Manto\\_terrestre](http://es.wikipedia.org/wiki/Manto_terrestre)