FÍSICA: Teoría de la gravitación newtoniana. Electromagnetismo.

Narciso Román Roy
Departamento de Matemáticas.
Edificio C-3, Campus Norte UPC
C/ Jordi Girona 1. 08034 Barcelona. Spain
e-*mail: narciso.roman@upc.edu*

8 de julio de 2021

Índice general

Introducción

Estas notas constituyen una guía de la segunda parte del programa de la asignatura **Física** que se imparte en el segundo curso del Grado de MATEMÁTICAS de la *Universitat Politècnica de Catalunya* (UPC).

Esta parte está dedicada al estudio de las dos teorías de campos clásicas de la Física: la *Gravitación newtoniana* y el *Electromagnetismo*. Mientras que de la primera se va a hacer una presentación bastante amplia de sus fundamentos y sus principales características; de la segunda sólo se van a tratar sus aspectos esenciales y los fenómenos más relevantes, ya que un estudio pormenorizado de la misma requeriría un curso completo.

En estas notas se va a prestar especial atención a la fundamentación matemática de estas teorías, utilizando las herramientas del cálculo diferencial e integral de una y varias variables, así como del cálculo tensorial, estudiadas en los cursos previos del Grado. También se suponen bien asumidos los conceptos de Mecánica newtoniana desarrollados en la primera parte de este curso.

Capítulo 1

Teoría de Newton de la Gravitación

Introducción

En este capítulo se presenta la teoría de Newton de la Gravitación. Tras un breve repaso a los antecedentes históricos (*modelos geocéntrico* y *heliocéntrico* y *Leyes de Kepler*) y a la formulación original de la teoría (*Ley de la Gravitación Universal*), se establecerán las ecuaciones de campo de la teoría y la ecuación de las trayectorias. A partir de ellas se estudiará el movimiento en campos centrales y newtonianos y se recuperarán las leyes de la Gravitación y de Kepler.

1.1. Gravitación newtoniana

En esta sección se estudian los principios y consecuencias de la teoría clásica de Newton de la Gravitación. Hay que aclarar, no obstante, que la teoría original de Newton (de 1687) sólo se refiere a la ecuación de la fuerza gravitatoria (*ley de la Gravitación Universal*). Sin embargo, en este capítulo se presentará la gravitación en su forma moderna, como una *teoría de campos*.

1.1.1. Antecedentes y motivaciones históricas. Leyes de Kepler

Los antecedentes de la *teoría de la Gravitación de Newton* se remontan al astrónomo prusiano *Nicolás Copérnico* (1473–1543) quien propuso su *modelo heliocéntrico* [1] del sistema solar y del Universo, en su obra “De Revolutionibus Orbium Coelestium” (publicada en el año de su muerte, 1543). Las ideas básicas de esta teoría eran las siguientes:

- El centro del Universo está en el Sol.

- Alrededor del Sol orbitan, en el siguiente orden, los planetas Mercurio, Venus, la Tierra (con su satélite, la Luna), Marte, Júpiter y Saturno (Urano y Neptuno eran aún desconocidos entonces).

- Los movimientos de los cuerpos celestes son uniformes, eternos, y circulares o compuestos de diversos ciclos (*epiciclos*).

- Las estrellas son objetos distantes que permanecen fijos y, por tanto, no orbitan alrededor del Sol.

[1] Propuesto inicialmente por el astrónomo y matemático griego *Aristarco de Samos* (310–230 a.C.).

- La Tierra tiene dos movimientos periódicos: la *rotación* en torno a su eje (de periodo un día), y la *traslación* en torno al Sol (de periodo anual).

- El movimiento retrógrado observado de los planetas es un efecto del movimiento de la Tierra.

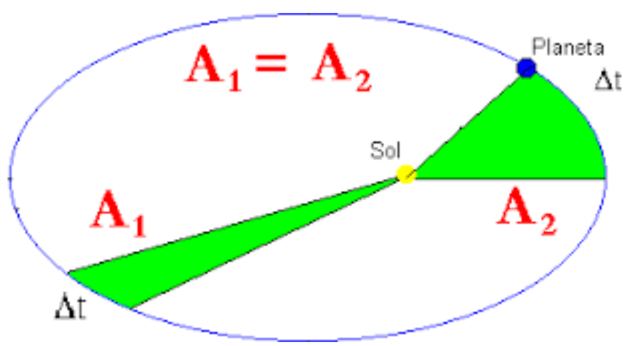
- La distancia de la Tierra al Sol es pequeña comparada con la distancia a las estrellas.

Este modelo sustituía el anterior *modelo geocéntrico* (140) del astrónomo y matemático griego *Claudio Ptolomeo* (100–170), en el cuál la Tierra como centro del Universo, el Sol y las estrellas se movían en torno a la Tierra siguiendo órbitas circulares y los planetas lo hacían siguierdo órbitas más complicadas (compuestas por circunferencias dentro de otras circunferencias).

Posteriormente, entre los años 1576–1597, el astrónomo danés *Tycho Brahe* (1546–1601) realizó una serie de numerosas observaciones de gran exactitud sobre el movimiento de los planetas. Estos datos fueron recogidos y analizados por el astrónomo y matemático alemán *Johannes Kepler* (1571–1630) quien, basándose en ellos, modificó la teoría de Copérnico sobre el movimiento de los planetas en torno al Sol, postulando que sus órbitas no eran circulares, sino elípticas, y que su velocidad no era constante, sino que se movían más rápidamente cuanto menor era su distancia al Sol. También estableció, con posterioridad, una relación matemática que vinculaba el periodo de una órbita con su distancia media al Sol. Todos estos resultados los estableció en tres leyes de carácter empírico que hoy se denominan *leyes de Kepler* y cuyo enunciado es el siguiente:

Primera Ley de Kepler: Los planetas se mueven en torno al Sol siguiendo órbitas elípticas, con el Sol situado en uno de sus focos.

Segunda Ley de Kepler: La recta que une un planeta con el Sol barre areas iguales en tiempos iguales; es decir, la *velocidad areolar* de los planetas es constante.



Tercera Ley de Kepler: El cuadrado del periodo de la órbita de un planeta es proporcional al cubo de su distancia media al Sol.

A lo largo de una órbita elíptica, el punto para el que un planeta está a la distancia más próxima al Sol se denomina *perihelio* y el más alejado *afelio* [2]; mientras que la distancia media es la semisuma de estos valores que es el semieje mayor de la elipse [3].

Como se ha mencionado. las leyes de Kepler son de carácter experimental (deducidas de las observaciones de Brahe). No es hasta la llegada del gran físico y matemático inglés *Isaac Newton* (1642–1727) que en sus "Philosophia Naturalis Principia Mathematica" (1687) elabora una teoría completa sobre la Gravitación de la que se deducen, de manera natural, las tres Leyes de Kepler. En particular, Newton postula que entre el Sol y los planetas existe una fuerza (atractiva) que es responsable del movimiento de estos últimos y se da cuenta de que la primera y

[2] Para el caso de objetos orbitando en torno a la Tierra se denominan *perigeo* y *apogeo*, respectivamente.
[3] Por ejemplo, para la Tierra estos valores son $147,2\cdot 10^6$ Km, $152,1\cdot 10^6$ Km y $149,6\cdot 10^6$ Km, respectivamente.

tercera ley requieren que dicha fuerza sea inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre el Sol y el planeta en cuestión; mientras que la segunda es consecuencia de la conservación del momento angular. Además establece la hipótesis de que esa fuerza se ejerce, no sólo entre el Sol y los planetas, sino entre cualquier par de objetos materiales en el Universo [4]; en particular, esta fuerza es la responsable de la caída de los cuerpos masivos en la superficie de la Tierra y del movimiento de los planetas en torno al Sol y de la Luna en torno a la Tierra [5]. Los fundamentos de la teoría de Newton de la Gravitación se recogen en el siguiente enunciado:

Ley de la Gravitación Universal: Dos cuerpos masivos (puntuales) se ejercen una fuerza mutua de atracción, en la dirección de la recta que los une, cuyo valor es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional a la distancia de separación entre ambos cuerpos.

Es decir, si las masas de los cuerpos son m_1 y m_2, esta fuerza es

$$\mathbf{F} = -G\,\frac{m_1\,m_2}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\ ; \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de un cuerpo respecto al otro, r es su módulo, por tanto $\mathbf{u}_r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, y G es una constante positiva que recibe el nombre de *constante universal de la Gravitación*, cuyo valor es $G = 6,6738480 \cdot 10^{-11} m^3/Kg\,s^2$ [6]. A partir de esta ley, como se verá posteriormente, Newton derivó las expresiones matemáticas de las tres leyes de Kepler. Una observación importante es que, como puede comprobarse a partir de su expresión, la *fuerza gravitatoria* descrita por (1.1) es un campo de tipo *conservativo*.

En la teoría de Newton se asumía también, de manera implícita, que la fuerza gravitatoria era *instantánea* y se trataba, además, de una teoría “de acción a distancia”; es decir, la fuerza actúa directamente entre los cuerpos sin que haya ningún otro agente físico que la implemente. La primera asunción quedó superada con el advenimiento de la *teoría de la Relatividad* (a principios del siglo XX). En cuanto a la segunda, la idea de “acción a distancia” era controvertida entre muchos físicos, pero no fué hasta el siglo XIX que pudo sustituirse introduciendo el concepto de *campo* mediador de las interacciones.

En los siguientes apartados se va a presentar la teoría de Newton de la Gravitación entendida como una teoría de campos.

1.1.2. Postulados de la teoría de Newton de la Gravitación

Los postulados en los que se basa la teoría de Newton de la Gravitaciónl son, esencialmente, los de la mecánica newtoniana, añadiendoles las ecuaciones de la gravitación. Son los siguientes:

0 (Postulado “Cero”): *El* espacio *y el* tiempo *son independientes. El tiempo es absoluto y, en cada instante de tiempo, el espacio es absoluto.*

Un modelo matemático es el siguiente: *el tiempo es un espacio afín unidimensional que se identifica con* $\mathbb{R}$ *y el espacio, para cada instante de tiempo, es un espacio afín tridimensional*

[4] Ésta era una idea muy atrevida para la época, ya que entonces no se creía que las leyes físicas aplicables en la Tierra fueran válidas, en general, para los objetos celestes.

[5] Newton razona que los planetas siguen órbitas elípticas en torno al Sol (y también la Luna en torno a la Tierra) a causa de esta fuerza que los desvía de la *trayectoria inercial* (recta) que seguirían si tal fuerza no actuara (de acuerdo con su Primera Ley del Movimiento, que previamente había establecido). De esta manera la Luna y los planetas, en su movimiento elíptico, estarían realmente “cayendo” hacia el Sol o la Tierra “desde sus trayectorias rectas inerciales”.

[6] La primera estimación de su valor fué efectuada por el fśico inglés *Henry Cavendish* (1731–1810), en 1798, usando péndulos de torsión.

que se identifica con $\mathbb{R}^3$*. En los espacios vectoriales asociados, las distancias se miden usando la* métrica euclídea*.*

1 (Principio de Relatividad de Galileo o de equivalencia de los sistemas inerciales): *Existe una clase de sistemas de referencia denominados* sistemas inerciales *en los cuáles son válidas las leyes de la Mecánica (de Newton* [7]*).*

Los sistemas inerciales se desplazan entre ellos a velocidad constante o están en reposo relativo y son equivalentes.

El significado y consecuencias de estos postulados son los siguientes:

- El tiempo es homogéneo y la simultaneidad es un concepto absoluto.

  Ésto quiere decir que todos los observadores (o sistemas de referencia) miden el mismo intervalo temporal entre dos sucesos cualesquiera o, lo que es lo mismo, que hay una escala en $\mathbb{R}$ para medir el tiempo que es la misma para todos los sistemas de referencia, pudiéndose elegir el origen arbitrariamente (no hay instantes de tiempo privilegiados).

  Matemáticamente significa que la distancia temporal en $\mathbb{R}$ es invariante por traslaciones.

- El espacio es homogéneo e isótropo, es decir, invariante por traslaciones y rotaciones.

  Ésto quiere decir que no hay puntos ni direcciones privilegiadas en el espacio y que todos los observadores inerciales miden la misma separación espacial entre dos puntos cualesquiera de $\mathbb{R}^3$. Para dos puntos en el espacio, de coordenadas (x_p, y_p, z_p), (x_q, y_q, z_q), su distancia se calcula usando la métrica euclídea g_{ij} y su cuadrado es

$$\begin{aligned}(\Delta l)^2 &= (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &\equiv \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}\Delta x^i \Delta x^j \quad , \quad (\text{donde } x^1 = x,\ x^2 = y,\ x^3 = z) \ . \end{aligned} \tag{1.2}$$

  Matemáticamente ésto significa que la distancia euclídea en $\mathbb{R}^3$ es invariante por estas transformaciones.

Como ya se ha estudiado en la primera parte del curso, el conjunto de transformaciones que preservan la distancia temporal y espacial y la forma de las ecuaciones de la mecánica newtoniana (y de la gravitación) incluye *traslaciones temporales, traslaciones espaciales, rotaciones* y las denominadas *transformaciones puras de Galileo* o *"boosts galileanos"*. Para sendos sistemas inerciales S y $\tilde{S}$ con coordenadas (t, x, y, z) y $(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ respectivamente, cuya velocidad relativa es $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$, estas transformaciones son:

$$\tilde{t} = t \quad ; \quad \tilde{x} = x + v_x t \quad , \quad \tilde{y} = y + v_y t \quad , \quad \tilde{z} = z + v_z t \quad .$$

A todas ellas habría que añadir también las *transformaciones de paridad* (las que invierten la orientación de los ejes espaciales) y las inversiones temporales; aunque éstas no son de interés desde el punto de vista de la física clásica. Con ello se obtienen todas las transformaciones que dejan invariante la distancia en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^3$, medida con la métrica euclídea; es decir, las isometrías de la métrica euclídea en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^3$.

Dado que la composición de dos de estas transformaciones es otra del mismo tipo, es una operación asociativa, la identidad está incluída como caso particular y existe la inversa de cualquiera de ellas; este conjunto tiene estructura de grupo y se denomina *grupo de Galileo extendido*, $\mathcal{G}$.

[7] O su generalización, la *Mecánica Analítica*.

La expresión general de una de estas transformaciones, dada en forma matricial, es

$$\begin{pmatrix} \tilde{t} \\ \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_x & R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ v_y & R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ v_z & R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

y se trata, por tanto, de *transformaciones afines* en $\mathbb{R}^4$. En esta expresión, $R = \begin{pmatrix} R_1^1 & R_1^2 & R_1^3 \\ R_2^1 & R_2^2 & R_2^3 \\ R_3^1 & R_3^2 & R_3^3 \end{pmatrix}$ representa un elemento genérico del *grupo ortogonal*

$$O(3,\mathbb{R}) = \{R \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ \mid \ R^T R = I\} \ ,$$

que es un subgrupo de $\mathcal{G}$ que incluye las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ y las transformaciones de paridad. Las rotaciones en $\mathbb{R}^3$ son, a su vez, un subgrupo de este último que se denomina *grupo ortogonal especial*

$$SO(3,\mathbb{R}) = \{R \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}) \ \mid \ R^T R = I, \ \det \mathrm{R} = 1\} \ .$$

Asimismo, las transformaciones puras de Galileo, las traslaciones espaciales y las traslaciones temporales también son subgrupos de $\mathcal{G}$. La unión de estos cuatro últimos forma el denominado *grupo de Galileo propio ortocrono* que contiene los tipos de transformaciones que son relevantes en la Mecánica newtoniana.

1.1.3. Ecuaciones de la teoría de Newton de la Gravitación. Potencial gravitatorio y ecuación de Poisson

Matemáticamente un *campo* es una función de varias variables (escalar o vectorial), definida en una región de $\mathbb{R}^n$. Físicamente esas variables suelen ser coordenadas espaciales y, eventualmente, el tiempo, y el campo representa la distribución espacio-temporal de una magnitud física o, lo que es lo mismo, una propiedad física que puede medirse en el entorno de cada punto de una región del espacio en cada instante del tiempo [8]. El campo es creado por entidades físicas (partículas) que tienen una determinada propiedad [9] y se manifiesta físicamente por la *fuerza* a que se ven sometidas las partículas que son sensibles a la acción de dicho campo [10]. La "acción a distancia" queda, entonces, obviada porque la partícula creadora del campo interacciona con éste y el campo lo hace con las otras partículas sometidas a su acción.

Así pués, las ecuaciones de una teoría de campos estándar como la gravitación newtoniana o el electromagnetismo clásico deben ser del siguiente tipo:

- Una ecuación sobre la *divergencia* del campo, que, teniendo en cuenta la interpretación de este operador, da información sobre el origen o las fuentes del campo.
- Una ecuación que da información sobre las características del campo, como el hecho de ser o no *conservativo* (y, por consiguiente, variacional), y que sería una ecuación sobre el *rotacional* del campo.

[8] Desde el punto de vista histórico, se introdujo esta noción precisamente para explicar la acción a distancia de las fuerzas gravitatoria, eléctrica y magnética, aunque, posteriormente, se extendió su significado para describir una amplísima variedad de fenómenos físicos como son: variaciones de temperatura, propagación de ondas, movimiento de fluidos, etc.

[9] Masa, en el caso de la gravitación newtoniana, o carga si se trata del campo eléctrico.

[10] De nuevo, particulas masivas, en el caso de la gravitación newtoniana, o cargadas, en el caso del electromagnetismo.

Éstas son propiamente las *ecuaciones de campo*, y son ecuaciones en derivadas parciales que determinan el campo, conocidas sus condiciones de contorno [11]. Estas ecuaciones han de postularse o, alternativamente, si se trata de ecuaciones de tipo variacional (como ocurre en el caso de campos conservativos), se ha de postular la *función lagrangiana* de la que derivan. Las ecuaciones de campo han de ser complementadas con:

- Una ecuación sobre la *fuerza* que genera el campo sobre las partículas.

  Esta ecuación, combinada con la segunda Ley de Newton, da lugar a la *ecuación de las trayectorias* que siguen las partículas sometidas a la acción del campo.

Esta ecuación tambiés se postula y las ecuaciones de las trayectorias asociadas son ecuaciones diferenciales ordinarias que, en particular, pueden ser de tipo variacional (derivan de una lagrangiana), si el campo es conservativo.

En lo que respecta ya a la teoría de la Gravitación, el último de sus postulados ha de establecer las ecuaciones de la misma. Entonces:

2 (Ecuaciones de la gravitación): Una distribución de masa de densidad $\rho(t,\mathbf{x})$ origina un campo vectorial $\mathbf{g}(t,\mathbf{x})$, denominado ***campo gravitatorio***, que está determinado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) &= -4\pi G\rho(t,\mathbf{x}) \ , \qquad (1.3)\\ \nabla\times\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) &= 0 \ , \qquad (1.4)\end{aligned}$$

donde G es la constante universal de la Gravitación (y los operadores diferenciales actúan en $\mathbb{R}^3$; es decir, las derivaciones se realizan respecto a las coordenadas espaciales).

El campo gravitatorio $\mathbf{g}$ actúa sobre las partículas materiales ejerciendo una ***fuerza gravitatoria*** que es proporcional al campo:

$$\mathbf{F} = m_g\,\mathbf{g} \ , \qquad (1.5)$$

donde la constante de proporcionalidad m_g es la ***masa gravitatoria*** *(pasiva)* de la partícula [12]. Cuando la ecuación (1.5) se combina con la Segunda Ley de Newton de la Mecánica da la ecuación dinámica o del movimiento de las partículas en el seno de campos gravitatorios

$$m_i\,\ddot{\mathbf{x}} = m_g\,\mathbf{g} \ , \qquad (1.6)$$

en la que la constante m_i es la *masa inercial* de la partícula [13].

De la ecuación (1.4) se infiere que, en regiones simplementes conexas, el campo gravitatorio $\mathbf{g}$(t,$\mathbf{x}$) es conservativo, luego

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{x}) = -\nabla V_{\mathbf{g}}(t,\mathbf{x}) \ , \qquad (1.7)$$

donde $V_{\mathbf{g}}(t,\mathbf{x})$ es un potencial escalar que se denomina ***potencial gravitatorio*** (obviamente este potencial no es único). Teniendo ésto en cuenta resulta que:

[11] En general, desde un punto de vista más puramente matemático, se suele denominar *teoría de campos* a cualquier fenómeno o problema descrito por ecuaciones en derivadas parciales, aunque no sean exactamente como las aquí descritas (p. ej., la *teoría de fluidos*, la *Relatividad General*, u otros problemas de índole matemático).

[12] Ésto es así porque, fijadas las unidades de la constante gravitatoria G, las del campo gravitatorio son $[LT^{-2}]$ y, entonces, m_g tiene unidades de masa. Esta constante da cuenta de una característica intrínseca de las partículas materiales que es la medida de la reacción de la materia a la acción de la gravedad.

[13] Que da cuenta de la reacción de la materia a la acción de fuerzas cualesquiera.

Teorema 1 *La ecuación (1.3) es equivalente a*

$$\nabla^2 V_{\mathbf{g}}(t,\mathbf{x}) = 4\pi G\rho(t,\mathbf{x}) \ , \tag{1.8}$$

que recibe el nombre de ***ecuación de Poisson****. Cuando $\rho(t,\mathbf{x}) = 0$ se reduce a la* ***ecuación de Laplace****, $\nabla^2 V_{\mathbf{g}}(t,\mathbf{x}) = 0$.*

En función del potencial gravitatorio, la ecuación de la fuerza gravitatoria es

$$\mathbf{F} = -m_g \, \nabla V_{\mathbf{g}} \ , \tag{1.9}$$

y la de las trayectorias dinámicas es

$$m_i \, \ddot{\mathbf{x}} = -m_g \, V_{\mathbf{g}} \ . \tag{1.10}$$

Conocido el campo escalar densidad $\rho(t,\mathbf{x})$, las soluciones de las ecuaciones (1.3) y (1.4), o equivalentemente de (1.8), darían el campo o, equivalentemente, el potencial gravitatorio creado por esa distribución de materia, y las de (1.10) darían las trayectorias de las partículas bajo la acción de ese campo.

Comentario 1 Como el campo gravitatorio $\mathbf{g}$ es conservativo, la propia ecuación (1.5)muestra que la fuerza gravitatoria es también un campo conservativo y $\mathbf{F} = -\nabla U$, siendo su potencial escalar

$$U = m_g \, \nabla V_{\mathbf{g}} \ ,$$

que se denomina ***energía potencial del campo gravitatorio***.

1.1.4. Ley de Gauss del campo gravitatorio. Ley de la Gravitación Universal

Para poder interpretar físicamente las ecuaciones de la Gravitación es conveniente expresarlas en forma integral. Para ello se utiliza el *teorema de la divergencia o de Gauss-Ostrogradskii* del Análisis Vectorial.

Teorema 2 (Ley de Gauss de la Gravitación)*: Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ es una región compacta en la que hay una distribución de masa de densidad ρ, cuyo borde $S = \partial V$ es una superficie regular (a trozos). Entonces la ecuación* (1.3) *es equivalente a*

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = -4\pi G M \ . \tag{1.11}$$

Es decir, el flujo del campo gravitatorio que atraviesa cualquier superficie cerrada (regular, a trozos) es proporcional a la masa total encerrada por dicha superficie.

(*Dem.*): Partiendo de la ecuación (1.3), se toma una superficie regular (a trozos) cualquiera que encierre un volumen V que contenga la distribución de masa de densidad ρ. Integrando ambos miembros de la ecuación en V, el miembro de la derecha permite obtener la masa total M presente,

$$-\int_V 4\pi G\rho \, dV = -4\pi G M \ ,$$

mientras que en el de la izquierda, la utilización del *teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradskii* da como resultado el *flujo del campo gravitatorio* o *flujo gravitatorio* que atraviesa la superficie S,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{g}\, dV = \int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} \ .$$

Recíprocamente, partiendo de la ecuación (1.11), utilizando de nuevo el teorema de Gauss-Ostrogradskii y teniendo en cuenta que la igualdad vale para cualquier superficie cerrada S (y, por tanto, para cualquier región V) que contenga la distribución de masa, se recupera la ecuación (1.3). ■

Comentario 2 El flujo del campo gravitatorio, $\mathcal{F}_g = \int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s}$ es una medida de la "cantidad de líneas de corriente del campo gravitatorio" que atraviesan la superficie [14]. Dado que $G > 0$ y $M > 0$, el signo negativo en el miembro derecho de la ecuación (1.11) significa que el flujo del campo gravitatorio 'entra' en la región donde está la distribución de masa y que, por tanto, las masas originan los campos gravitatorios y, concretamente, confluyen en ellas [15].

Para una distribución de masa estática y esféricamente simétrica, de densidad ρ y radio R, a partir de la ecuación (1.3), expresada en forma integral como se acaba de ver, se obtiene la ley de la Gravitación Universal. En efecto; si en la ecuación de la ley de Gauss (1.11) se toma una región esférica V, de radio r, que contenga la distribución de masa ($r > R$) y sea concéntrica con ella, teniendo en cuenta la simetría esférica del problema, resulta que el campo gravitatorio es radial y su módulo sólo depende de la coordenada radial r, por consiguiente es $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\mathbf{u}_r$, donde $g(r) = \|\mathbf{g}(\mathbf{r})\|$ y $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ es el vector unitario radial. Entonces en el miembro de la izquierda de la ecuación (1.11) se obtiene que

$$\int_S \mathbf{g} \cdot d\mathbf{s} = \int_S g(r)\, \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r\, ds = \int_S g(r)\, ds = g(r)\, 4\pi r^2 \ ,$$

ya que la función $g(r)$ es constante sobre la esfera S. De aquí se llega a que

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{g}(r) = -\frac{GM}{r^2}\, \mathbf{u}_r \tag{1.12}$$

y, finalmente, de la expresión (1.5) se obtiene

$$\mathbf{F} = \mathbf{g}\, m_g = -\frac{GMm_g}{r^2}\, \mathbf{u}_r \ , \tag{1.13}$$

que es la ecuación de la ley de la Gravitación Universal. Obsérvese que, además, de (1.7) y (1.12) se obtiene también que, salvo constantes aditivas, el potencial y la energía potencial gravitatorios son

$$V_{\mathbf{g}} = -\frac{GM}{r} \quad , \quad U = -\frac{GMm_g}{r} \ .$$

Comentario 3 Dado que este resultado es válido para cualquier R, tomando el radio de la distribución de masa tan pequeño como se desee ($R \to 0$) se recuperara la idea física de *partícula puntual* y la ecuación (1.13) es la ley de la Gravitación Universal para partículas puntuales (1.1)

[14] Las *líneas de corriente* son las curvas integrales del campo y físicamente son las trayectorias que, partiendo del reposo, seguirían las partículas masivas sometidas a la acción del campo.

[15] En ese sentido se interpretan como "sumideros" de dichos campos.

[16]. De este modo se ha probado también que la fuerza gravitatoria generados por una distribución esférica, estática y uniforme de masa es la misma que crearía una partícula puntual situada en el centro de la esfera y que tuviera la misma masa total.

De hecho, este resultado se generaliza para cualquier distribución de masa, sea cual sea su forma y su densidad. En ese caso, el campo y la fuerza gravitatoria creados por la distribución en un punto exterior a la misma es el que crearía una partícula situada en el centro de masa de la distribución, cuya masa fuera la masa total y estuviera situada a distancia r del punto.

De este modo se ha probado que:

Proposición 1 *La ley de la Gravitación Universal* (1.1) *es una consecuencia de la ecuación del campo gravitatorio (1.3), y de la ecuación de la fuerza gravitatoria* (1.5)*.*

Comentario 4 Resumiendo, las ecuaciones (1.3) y (1.4) que determinan el campo gravitatorio tienen una clara interpretación física. La primera indica que está originado por la presencia de masa y, junto con la ecuación de la fuerza gravitatoria (1.5), conducee a la ley de la Gravitación Universal. La segunda indica que el campo es conservativo y, por tanto, que existe potencial gravitatorio [17].

La teoría de Newton de la Gravitación es compatible con la mecánica newtoniana en el sentido de que sus ecuaciones son invariantes por las transformaciones de Galileo (extendidas). Sin embargo, la teoría de Newton de la Gravitación adolece de serias limitaciones. La principal es que es incompatible con la Teoría de la Relatividad Especial [18]. Pero, además de ello, ciertas observaciones experimentales eran inexplicables en el marco de la teoría newtoniana. En particular, era bien conocido que, debido a diversas causas como son la no esfericidad exacta del Sol y la influencia gravitatoria de los otros cuerpos del sistema solar, entre otras, las órbitas de los planetas no son cerradas (elipses), sino que hay una precesión del perihelio de dichas órbitas. Esta precesión había sido medida con bastante precisión para la órbita de Mercurio, en 1859, observándose que había un avance anómalo que no podía ser explicado con la teoría de Newton teniendo sólo en cuenta las causas señaladas. No fué hasta el advenimiento de una teoría mucho más general de la Gravitación (la *teoría de la Relatividad General*) que dichas limitaciones quedaron superadas.

1.1.5. Reflexiones sobre el concepto de 'masa'. Principio de Equivalencia de Galileo

Es importante señalar que, en principio, en la teoría de Newton de la Gravitación se están utilizando dos acepciones diferentes del concepto de "masa":

- La *masa gravitatoria pasiva* m_g de una partícula que, como ya se ha comentado, da cuenta de una característica intrínseca de las partículas materiales que es la medida de la reacción

[16] Las partículas puntuales son idealizaciones que no tienen sentido físico, ya que tendrían densidad de masa infinita. No obstante, pueden ser modelizadas matemáticamente usando la *delta de Dirac*.

[17] La no unicidad en su elección, por adición de funciones constantes, significa que se puede elegir libremente el origen de potenciales.

[18] Ya que, por ejemplo, la acción gravitatoria entre partículas es instantánea, lo cual está en contradicción con el hecho de que, según la Relatividad Especial, cualquier señal se transmite a velocidad menor o igual que la velocidad de la luz. Además, en la ley de la Gravitación Universal, las posiciones de las partículas se miden simultáneamente, lo que significa que dicha ley sólo es válida en un sistema de referencia distinguido y las distancias entre las partículas son iguales para todos los observadores.

de la materia a la acción de un campo gravitatorio (ésto es, la partícula como “receptora” de la gravedad).

- La *masa gravitatoria activa* $M \equiv M_g$ de una partícula que da cuenta de otra característica intrínseca de las partículas materiales que es la medida de la intensidad del campo gravitatorio creado por una partícula (la partícula como “fuente productora” de la gravedad).

Estas dos masas son realmente la misma. En efecto, si se considera un sistema aislado formado por dos partículas, la fuerza gravitatoria que una partícula de masa gravitatoria activa M_g^1 y masa gravitatoria pasiva m_g^1 ejerce sobre otra de masa gravitatoria activa M_g^2 y masa gravitatoria pasiva m_g^2 es, de acuerdo con (1.5) y (1.13),

$$\mathbf{F}^{12} = \mathbf{g}^1\, m_g^2 = -\frac{G M_g^1 m_g^2}{r^2}\, \mathbf{u}_r \ .$$

Del mismo modo, la fuerza gravitatoria que la partícula 2 ejerce sobre la 1 es,

$$\mathbf{F}^{21} = \mathbf{g}^2\, m_g^1 = \frac{G M_g^2 m_g^1}{r^2}\, \mathbf{u}_r \ .$$

Al ser el sistema aislado, estas son las únicas dos fuerzas que actúan sobre las partículas y, como consecuencia de la *Tercera Ley de Newton* (*acción y reacción*), se tiene que $\mathbf{F}^{21} = -\mathbf{F}^{12}$ y de aquí se obtiene que

$$\frac{m_g^1}{M_g^1} = \frac{m_g^2}{M_g^2} \ ,$$

con lo que, al ser este resultado válido para dos partículas cualesquiera, se ha de concluir que $\dfrac{m_g}{M_g}$ es una constante universal que, ajustando las unidades de medida (o, lo que es lo mismo, ajustando el valor de la constante G [19]), puede ser tomada igual a 1; es decir

$$m_g = M_g \ ,$$

con lo que la masa gravitatoria activa y pasiva son iguales y se denomina simplemente ***masa gravitatoria***.

La siguiente cuestión a discutir es la relación entre la *masa gravitatoria* y la *masa inercial*. De acuerdo con la Segunda Ley de Newton, la fuerza gravitatoria que actúa sobre una partícula le provoca una aceleración que es proporcional a dicha fuerza; escribiéndose esta relación en la forma $\mathbf{F} = m_i\, \mathbf{a}$, donde la constante de proporcionalidad m_i es la *masa inercial* de la partícula. Esta constante da cuenta de una característica intrínseca de las partículas materiales que es la medida de la resistencia de la materia a cambiar su estado dinámico o de movimiento. Combinando esta última ecuación con (1.5) se obtiene (1.6); es decir,

$$m_i\, \mathbf{a} = m_g\, \mathbf{g} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{a} = \frac{m_g}{m_i}\, \mathbf{g} \ ; \tag{1.14}$$

(el factor $\dfrac{m_g}{m_i}$ se denomina *carga gravitatoria* de la partícula). Experimentos realizados ya inicialmente por *Galileo Galilei* (1564–1642) sobre la caída de objetos de diversa masa y composición desde la torre de Pisa, y más recientemente por el físico húngaro *Loránd Eötvös* (1848–1919) entre 1906 y 1909, posteriormente refinados por otros investigadores usando péndulos de torsión, llevan a la conclusión de que la aceleración $\mathbf{a}$ medida para partículas distintas, es la misma (con una precisión de 10^{-11}), por lo que la carga gravitatoria $\dfrac{m_g}{m_i}$ resulta ser una constante universal

[19] Nótese que la elección de la unidad de masa fija el valor de esta constante G, y recíprocamente.

que, ajustando las unidades de medida, puede ser tomada igual a 1 [20]. De este modo se concluye que ambas constantes son iguales, $m_i = m_g \equiv m$ y se denomina simplemente ***masa***. Por tanto, la aceleración producida por la fuerza gravitatoria es $\mathbf{a} = \mathbf{g}$; esto es, la misma e independiente de la masa m de las partículas.

A esta conclusión llegó el propio *Galileo* tras hacer el siguiente extraordinario razonamiento: Considérense dos cuerpos cualesquiera de masas respectivas M, m y sea $M > m$. Asumamos como primera hipótesis que *el cuerpo más masivo cae más rápidamente*; en este caso, dejando caer los dos cuerpos simultáneamente después de haberlos unido con una cuerda inextensible de masa despreciable, se vería que M se sitúa rápidamente por debajo de m hasta que la cuerda se tensa; momento a partir del cual constituyen un único cuerpo de masa $M + m$. Desde este instante, por efecto de la tensión de la cuerda, M disminuye su aceleración de caída, mientras que m la incrementa en la misma magnitud (a causa de la *la ley de acción y reacción*). Por consiguiente, $M + m$ caería un poco más lentamente que M. Pero esto es absurdo porque $M + m > M$ y debería caer con más rapidez, en virtud de la hipótesis de la que hemos partido. Esta posibilidad debe ser, pués, descartada". Asumiendo la hipótesis opuesta de que *el cuerpo menos masivo cae más rápidamente* y razonando del mismo modo se llegaría a una contradicción similar. Así pués, debe concluirse que ambos cuerpos caen con la misma velocidad.

Estos resultados constituyen lo que se conoce como:

Principio de Equivalencia (débil o de Galileo): La masa inercial y la masa gravitatoria son iguales. Como consecuencia, en un campo gravitatorio, todas las partículas materiales experimentan la misma aceleración independientemente de sus masas.

Un cuerpo se dice que está "en caída libre" en un campo gravitatorio cuando está sometido únicamente a la acción de la gravedad (no sometido a ninguna otra fuerza y sin rotación).

1.2. Movimiento en campos centrales y newtonianos

En esta sección se analizará el movimiento de las partículas materiales sometidas a la acción de los campos gravitatorios; esto es, bajo campos centrales y newtonianos.

1.2.1. Ecuaciones de las cónicas en coordenadas cartesianas y polares

Previamente hay que hacer un repaso de las definiciones y las ecuaciones de las curvas cónicas.

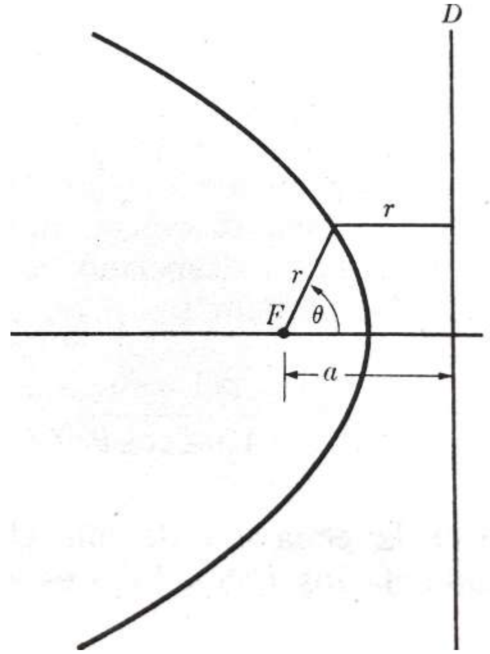
Definición 1 *La* **parábola** *es el lugar geométrico de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que sus distancias a un punto fijo F, que se denomina* ***foco****, y a una recta fija D (con $F \notin D$), que se denomina* ***directriz****, es la misma, r.*

La distancia a *del foco a la directriz se denomina* ***parámetro****.*

La recta que es perpendicular a la directriz y contiene el foco se denomina ***eje focal*** *(y es el eje de simetría de la curva).*

El punto de la parábola que pertenece al eje focal y que está a la mínima distancia, a/2*, de la directriz es el* ***vértice*** *de la parábola.*

[20] Ésto no es sino ajustar la unidad de medida de la masa gravitatoria, lo cuál se consigue fijando el valor de la constante universal G, como ya se ha comentado.



Tomando coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$ con origen en el vértice de la parábola y tomando como uno de los ejes coordenados la recta focal, la ecuación (canónica) de la parábola es

$$y^2 = 2\mathrm{a}x \text{ (eje focal } OX\text{, rama hacia la derecha)} \quad ; \quad x^2 = 2\mathrm{a}y \text{ (eje focal } OY\text{, rama hacia arriba)}$$
$$y^2 = -2\mathrm{a}x \text{ (eje focal } OX\text{, rama hacia la izda.)} \quad ; \quad x^2 = -2\mathrm{a}y \text{ (eje focal } OY\text{, rama hacia abajo).}$$

Para obtener la ecuación en coordenadas polares situaremos el origen en el foco, F, como en la figura. En este caso directamente se ve que

$$r\cos\theta + r = \mathrm{a} \ ,$$

de donde

$$r = \frac{\mathrm{a}}{1+\cos\theta} \ . \tag{1.15}$$

Definición 2 *La* **elipse** *es el lugar geométrico de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ tales que la suma de sus distancias r y r' a dos puntos fijos F y F', denominados* ***focos****, es constante: $r + r' = 2\mathrm{a}$.*

El punto medio del segmento que une los focos se denomina ***centro****.*

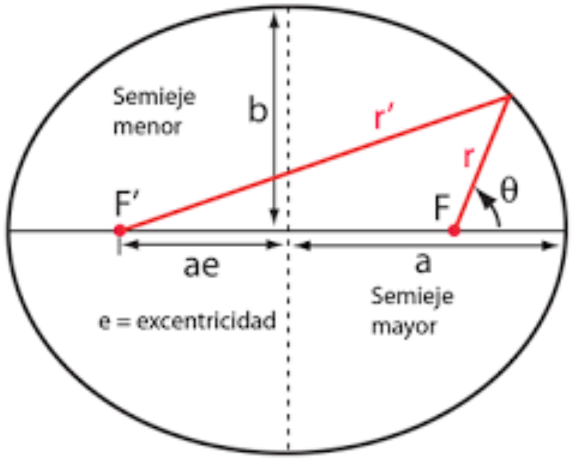
Los puntos de la elipse que están a máxima y mínima distancia del centro se llaman ***vértices****.*

Los segmentos rectilíneos que unen cada uno de los vértices a máxima distancia, a*, con el centro son los* ***semiejes mayores*** *de la elipse. Análogamente, los segmentos de recta que unen cada uno de los vértices a mínima distancia,* b*, con el centro son sus* ***semiejes menores****.*

El valor $e < 1$ tal que ae *es la distancia del centro a los focos se denomina* ***excentricidad****.*

Los vértices que están a mínima distancia del centro distan a de cada foco de la elipse, luego se tiene que $\mathrm{b} = \mathrm{a}\sqrt{1-e^2}$. Por otra parte, si r_{max} y r_{min} denotan la máxima y mínima distancia de los puntos de la elipse a uno de sus focos, resulta que

$$2a = r_{max} + r_{min} \quad , \quad 2ae = r_{max} - r_{min} \quad \Longrightarrow \quad e = \frac{r_{max} - r_{min}}{r_{max} + r_{min}} \quad \Longrightarrow \quad b = \sqrt{r_{max}\, r_{min}} \ .$$



Tomando coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$ con origen en el centro de la elipse y ejes dirigidos según los semiejes, la ecuación (canónica) de la elipse es

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1 \ .$$

Para obtener la ecuación en coordenadas polares situaremos el origen en uno de los focos, F, tal como se indica en la figura. Usando el teorema del coseno se tiene que

$$r'^2 = r^2 + 4\mathrm{a}^2 e^2 + 4r\mathrm{a}e\cos\theta = r^2 + 4\mathrm{a}e(\mathrm{a}e + r\cos\theta) \ ,$$

y teniendo en cuenta que $r' = 2\mathrm{a} - r$, se tiene que

$$r^2 + 4\mathrm{a}^2 - 4\mathrm{a}r = r^2 + 4\mathrm{a}e(\mathrm{a}e + r\cos\theta) \iff 4\mathrm{a}r(1 + e\cos\theta) = 4\mathrm{a}^2(1 - e^2) \ ,$$

de donde

$$r = \frac{\mathrm{a}(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \ . \tag{1.16}$$

Como casos particulares se tienen:

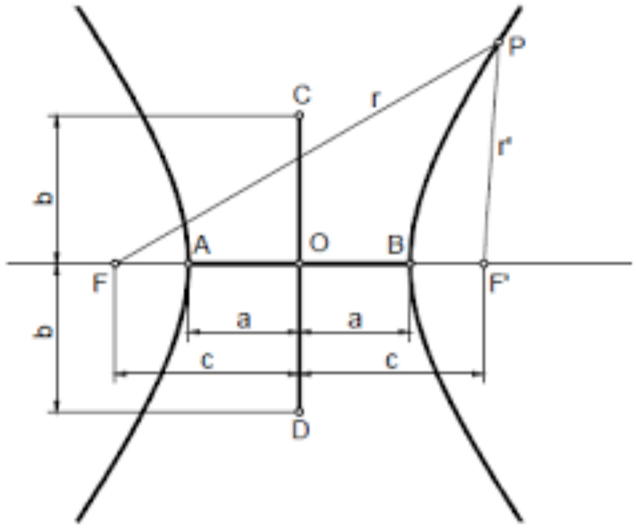
- Si $e = 0$ ($F = F'$), se obtiene $r = a$, que es la ecuación de una *circunferencia*.
- Si $e \to 1$ entonces la elipse degenera en un *parábola*, cuando F' se aleja hacia el infinito, o en una recta, cuando F' permanece a distancia finita de F.

Definición 3 *La* **hipérbola** *es el lugar geométrico de los puntos del plano* $\mathbb{R}^2$ *tales que la diferencia de sus distancias* r *y* r' *a dos puntos fijos* F *y* F'*, denominados* ***focos****, es constante. Una hipérbola tiene dos ramas: cuando* $r - r' = 2\mathrm{a}$*, que denominaremos* ***rama positiva****, y cuando* $r - r' = -2\mathrm{a}$*, que denominaremos* ***rama negativa****;* ($\mathrm{a} > 0$)*.*

El punto medio del segmento que une los focos se denomina ***centro****.*

Los puntos de la hipérbola que están a mínima distancia, a*, del centro se denominan* ***vértices****. Los segmentos rectilíneos (de longitud* a*) que unen cada vértice con el centro son los* ***semiejes transversales*** *de la hipérbola.*

El valor $e > 1$ *tal que* $\mathrm{a}e = \mathrm{c}$ *es la distancia del centro a los focos se llama* ***excentricidad****.*



Tomando coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$ con origen en el centro y eligiendo como uno de los ejes coordenados la recta que contiene los focos, la ecuación (canónica) de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{y^2}{\mathrm{b}^2} = 1 \quad \text{(ramas horizontales)} \quad ; \quad \frac{y^2}{\mathrm{a}^2} - \frac{x^2}{\mathrm{b}^2} = 1 \quad \text{(ramas verticales)} \quad ,$$

donde $\mathrm{b}^2 = \mathrm{c}^2 - \mathrm{a}^2 = \mathrm{a}^2(e^2 - 1)$. Para obtener la ecuación en coordenadas polares situaremos el origen en uno de los focos, F, como se indica en la figura. Como en el caso anterior, por el teorema del coseno se tiene

$$r'^2 = r^2 + 4\mathrm{a}^2 e^2 - 4r\mathrm{a}e\cos\theta = r^2 + 4\mathrm{a}e(\mathrm{a}e - r\cos\theta) \ ,$$

luego, procediendo como antes y teniendo en cuenta que $r' = r \pm 2a$, resulta que

$$r^2 + 4\mathrm{a}^2 \pm 4\mathrm{a}r = r^2 + 4\mathrm{a}e(\mathrm{a}e - r\cos\theta) \iff 4\mathrm{a}r(\pm 1 + e\cos\theta) = 4\mathrm{a}^2(e^2 - 1) \ ,$$

de donde

$$r = \frac{\mathrm{a}(e^2 - 1)}{\pm 1 + e\cos\theta} \ . \tag{1.17}$$

que es la ecuación de la hipérbola: el signo negativo da la rama positiva, que es la que está más próxima a F'; mientras que el positivo da la rama negativa, que está más próxima a F.

Con todo ésto se ha probado que:

Proposición 2 *La ecuación general de una cónica en coordenadas polares con centro en el foco (o en uno de ellos) es*

$$\frac{1}{r} = B + A\cos(\theta - \theta_o) \quad , \quad (A > 0) \ . \tag{1.18}$$

donde θ_o el ángulo formado por el semieje OX^+ y el eje de la cónica (o uno de ellos). Si $\theta_o = 0$, el eje de la cónica coincide con el eje OX y su ecuación es $\frac{1}{r} = B + A\cos\theta$.

1. *Si $B > A$ es una elipse y $B = \frac{1}{\mathrm{a}(1 - e^2)}$, $A = \frac{e}{\mathrm{a}(1 - e^2)}$.*

2. *Si $B = A$ es una parábola y $B = A = \frac{1}{\mathrm{a}}$.*

3. Si $0 < B < A$ *es la rama negativa de una hipérbola y* $B = \dfrac{1}{\mathrm{a}(e^2-1)}$, $A = \dfrac{e}{\mathrm{a}(e^2-1)}$.

Si $-A < B < 0$ [21] *es la rama positiva de una hipérbola y* $B = -\dfrac{1}{\mathrm{a}(e^2-1)}$, $A = \dfrac{e}{\mathrm{a}(e^2-1)}$.

En todos los caso se tiene que la excentricidad es $e = \dfrac{A}{|B|}$ [22]. *Además, para las elipses y las hipérbolas, se verifica que* $a = \left|\dfrac{B}{A^2-B^2}\right|$.

Los puntos a máxima y mínima distancia del foco se obtienen cuando $\cos(\theta-\theta_o) = \pm 1$ *y los valores de dichas distancias son, por tanto* [23],

$$\frac{1}{r_{max}} = B - A \quad , \quad \frac{1}{r_{min}} = B + A \ .$$

1.2.2. Campos centrales y newtonianos. Movimiento en campos centrales. Potencial efectivo

El estudio del movimiento de dos partículas de masas M y m sometidas a la acción de los campos gravitatorios creados por ambas masas es el denominado *problema de los dos cuerpos*. En este curso se considerará sólo la situación en que $M >> m$, en cuyo caso se puede asumir que:

- el campo gravitatorio creado por m es despreciable respecto al creado por M [24],

- la masa M está fija en un punto (que se toma como origen de coordenadas espaciales).

Según se ha visto en la sección precedente, el campo gravitatorio creado por la masa M depende de la inversa del cuadrado de la distancia al origen y, siendo conservativo, el potencial gravitatorio es inversamente proporcional a esa distancia. En este contexto se define:

Definición 4 *Un campo vectorial* $\mathbf{F}$ *es un* ***campo central*** *si es conservativo y su potencial escalar (y, por tanto, el módulo del campo) sólo depende de la distancia* r *a un punto fijo denominado* ***centro del campo****; esto es, se tiene que*

$$-\nabla U(r) = \mathbf{F}(r) = F(r)\mathbf{u}_r \ .$$

En particular, un campo central se denomina ***newtoniano*** *o* ***coulombiano*** *si su potencial escalar es inversamente proporcional a* r *y, por tanto, el campo depende inversamente de* r^2*; es decir, es*

$$-\nabla U\left(\frac{1}{r}\right) = \mathbf{F}\left(\frac{1}{r^2}\right) = F\left(\frac{1}{r^2}\right)\mathbf{u}_r \ .$$

Las trayectorias [25] *de las partículas bajo la acción de campos centrales se denominan* ***órbitas***.

[21] (El caso $A < -B$ no puede darse, ya que r no puede ser negativo).
[22] Y la parábola sería la cónica para la que la excentricidad es $e = 1$.
[23] Si $A > |B|$, sólo existe r_{min} (ya que r no puede ser negativo).
[24] Equivalentemente, las fuerzas gravitatorias de M sobre m y de m sobre M son iguales y opuestas (tercera Ley de Newton), y como $M >> m$, la aceleración de M es mucho menor que la de m y se puede despreciar frente a esta última.
[25] Recuérdese que una *trayectoria* es una curva parametrizada orientada (en Física, por el tiempo).

Éste es, por tanto, el problema de estudiar el movimiento en campos centrales newtonianos y se denomina *problema de Kepler*.

Comenzaremos analizando el movimiento de una partícula de masa m en un campo (de fuerzas) central $\mathbf{F}$, en general. Nos situaremos en el sistema de referencia en el que el centro del campo está en reposo. Como primer resultado se tiene:

Teorema 3 *El momento angular de la partícula es constante. Como consecuencia, la trayectoria de la partícula está contenida en un plano que contiene al centro del campo.*

(*Dem.*): Si $\mathbf{r}$ es el vector de posición de la partícula respecto al centro del campo, el momento de la fuerza central que actúa sobre la partícula es

$$\mathbf{N} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F(r)\mathbf{u}_r = 0 \ ,$$

con lo que, de acuerdo con la ecuación de la dinámica de rotación, para el momento angular se tiene que

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L} = \mathbf{N} = 0 \ ;$$

luego $\mathbf{L}$ es constante. Por otra parte, se sabe que $\mathbf{L} = m(\mathbf{r} \times \mathbf{v})$, y como el vector $\mathbf{L}$ es constante, $\mathbf{r}$ y $\mathbf{v}$ han de permanecer en el plano fijo perpendicular a $\mathbf{L}$ que contiene el centro del campo. ■

Dado que el campo es radial, el sistema es invariante por rotaciones en el plano del movimiento, y se pueden elegir las coordenadas cartesianas para que éste sea $z = 0$. Ésto sugiere hacer el cambio a coordenadas cilíndricas en $\mathbb{R}^3$ con origen en el centro del campo (esto es, a polares en dicho plano). Dado que la fuerza está dirigida según la recta que une el centro del campo con la partícula, sus componentes son $F_x = F(r)\cos\theta$, $F_y = F(r)\sin\theta$, $F_z = 0$, y se puede obviar la dirección OZ. Entonces, de la ecuación de Newton de la dinámica (segunda Ley de Newton) para una trayectoria $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$,

$$m\ddot{x} = F(r)\cos\theta \quad , \quad m\ddot{y} = F(r)\sin\theta \ ,$$

haciendo el cambio $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y(t) = r(t)\sin\theta(t)$, derivando y combinando las ecuaciones se obtiene

$$m(\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) = m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = F(r) \quad ; \quad m(-\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) = mr\ddot{\theta} + 2m\dot{r}\dot{\theta} = 0 \ , \tag{1.19}$$

que es la expresión de las ecuaciones dinámicas en coordenadas polares en el plano $z = 0$ [26].

Teorema 4 *El módulo del momento angular, $L = \|\mathbf{L}\|$, y la energía mecánica total de la partícula, $E = K + U$, son constantes del movimiento (o cantidades conservadas).*

(*Dem.*): La conservación del módulo del momento angular es una consecuencia del teorema precedente. También se obtiene multiplicando por r la segunda ecuación ya que

$$0 = mr^2\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = \frac{dL}{dt} \implies mr^2\dot{\theta} = L \ (cte) \ . \tag{1.20}$$

La energía mecánica total, es una constante del movimiento como consecuencia de que el campo es conservativo. En efecto; el trabajo realizado por una partícula al desplazarse desde un estado

[26] Obsérvese que, al ser la fuerza radial, sus componentes en coordenadas polares son $\mathbf{F} = (F(r), 0)$.

inicial (i) a otro final (f) es $W = K(f) - K(i)$; pero, al ser el campo de fuerzas conservativo, $\mathbf{F} = -\nabla U$, este trabajo es

$$W = \int_{i\,C}^{f} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{i\,C}^{f} -\nabla U \cdot d\mathbf{l} = -(U(f) - U(i))$$

luego $K(f) - K(i) = -(U(f) - U(i))$ y, de ahí, $K(f) + U(f) = K(i) + U(i)$; es decir, la energía mecánica total $E = K + U$ se conserva. ∎

Los valores de L y E se obtienen de las condiciones iniciales $r = r_o$, $\theta = \theta_o$, $\dot{r} = \dot{r}_o$, $\dot{\theta} = \dot{\theta}_o$.

Proposición 3 *La solución de las ecuaciones del movimiento* (1.19) *es*

$$\int_{r_o}^{r} \frac{dr}{\left(E - U(r) - \dfrac{L^2}{2mr^2}\right)^{1/2}} = \sqrt{\frac{2}{m}}t \quad , \quad \theta = \theta_o + \int_{t_o}^{t} \frac{L}{mr^2} dt \ . \tag{1.21}$$

En el caso particular en que $L = 0$, la solución es una semirrecta.

(*Dem.*): De la ecuación (1.20) se tiene que $\dot{\theta} = \dfrac{L}{mr^2}$, e integrando se obtiene la solución para $\theta(t)$. Por otra parte, sustituyendo en la expresión de la energía en coordenadas polares se obtiene

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + U(r) \ , \tag{1.22}$$

de donde

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\left(E - U(r) - \frac{L^2}{2mr^2}\right)^{1/2}$$

y de aquí, integrando, se llega a la solución para $r(t)$. ∎

Comentario 5 Si $L = 0$, de aquí y también directamente de (1.20), se obtiene que θ es constante y la trayectoria es una semirrecta.

Comentario 6 Llevando (1.20) a la primera de las ecuaciones (1.19) resulta

$$m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3} \equiv \tilde{F}(r) \ , \tag{1.23}$$

donde el sumando L^2/mr^3 se identifica con la "fuerza centrífuga" y es una fuerza ficticia que realmente forma parte del producto "masa por aceleración" cuando se expresa en coordenadas polares. De esta manera, se puede tratar este problema dinámico como el de un movimiento unidimensional con una fuerza $\tilde{\mathbf{F}}(r) = \tilde{F}(r)\mathbf{u}_r$ que es también conservativa, $\tilde{\mathbf{F}}(r) = -\nabla\tilde{U}(r)$, cuyo potencial es

$$\tilde{U}(r) = -\int \left(F(r) + \frac{L^2}{mr^3}\right) dr = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} + k$$

y donde el segundo sumando sería la "energía potencial asociada a la fuerza centrífuga". Se puede tomar la constante $k = 0$ fijando convenientemente el origen del potencial. Este potencial $\tilde{U}(r)$ es pués la energía potencial asociada a la fuerza $\tilde{\mathbf{F}}(r)$ y, de (1.22) se tiene que $E = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \tilde{U}(r)$.

Definición 5 *La función $\tilde{U}(r) = U(r) + \dfrac{L^2}{2mr^2}$ se denomina **potencial efectivo** del campo.*

La primera de las ecuaciones (1.21) es, en general, difícil de integrar para un campo central genérico, por lo que es muy difícil obtener analíticamente la parametrización de las trayectorias en función del tiempo. En algunos casos es más fácil obtener las ecuaciones de las órbitas en la forma $r = r(\theta)$ integrando una ecuación diferencial equivalente:

Proposición 4 *Sea la función* $u(\theta) = \dfrac{1}{r(\theta)}$. *Si* $L \neq 0$, *la primera de las ecuaciones dinámicas* (1.19) *es equivalente a la ecuación (para* $u(\theta)$*)*

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -u - \frac{m}{L^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right) \ . \tag{1.24}$$

(*Dem.*): Usando (1.20) en la primera de las ecuaciones (1.19) se llega a la ecuación (1.23). Como $r(t) = r(\theta(t))$, aplicando la regla de la cadena se obtiene $\dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{\dot r}{\dot\theta}$, con lo que

$$\begin{aligned}
\frac{du}{d\theta} &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r(\theta)}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot r}{\dot\theta} = -\frac{m}{L}\dot r \ , \\
\frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{m}{L}\frac{dr}{d\theta}\ddot r = -\frac{m}{L}\frac{1}{\dot\theta}\ddot r = -\frac{m^2r^2}{L^2}\ddot r = -\frac{m^2}{L^2u^2}\ddot r \ ,
\end{aligned}$$

donde se ha usado, de nuevo, (1.20). Utilizando, ahora, (1.23) se llega al resultado. ■

En el caso general, la ecuación (1.24) puede ser difícil de resolver, pero aún entonces se puede obtener información cualitativa sobre el movimiento analizando el potencial efectivo [27].

1.2.3. Órbitas en un campo newtoniano

Considérese el caso de un potencial newtoniano $U(r) = \dfrac{K}{r}$, $(K \neq 0)$, que origina un campo de fuerzas $\mathbf{F}(r) = -\nabla U(r) = F(r)\,\mathbf{u}_r = \dfrac{K}{r^2}\,\mathbf{u}_r$. Analizando el potencial efectivo asociado, que es

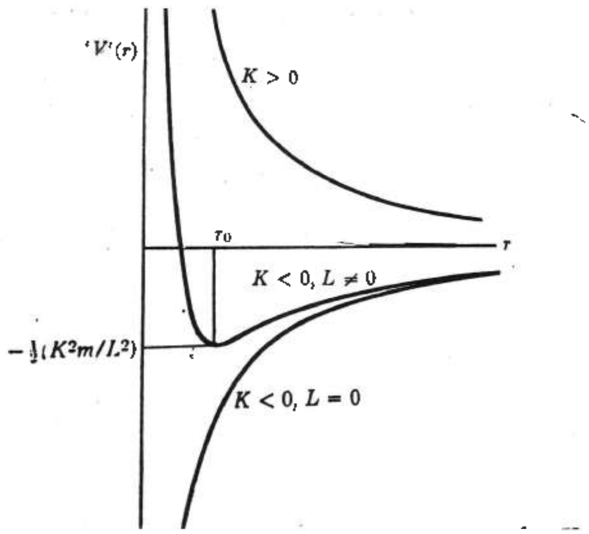
$$\tilde U(r) = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \ ,$$

se puede hacer un estudio cualitativo del movimiento. Se tienen los siguientes casos posibles:

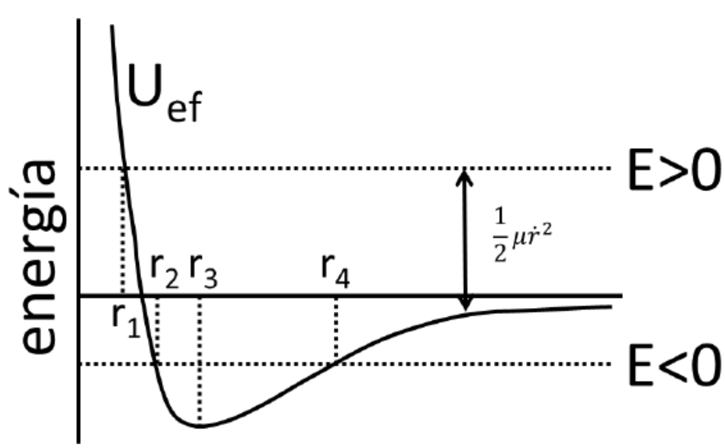
- Si $K > 0$, la fuerza es repulsiva. En este caso necesariamente $E > 0$, el movimiento es no periódico y la órbita (que será una semirrecta si $L = 0$) tiene un punto de retorno para $r = r_1$ solución de $E = \tilde U$: la partícula se acerca al centro del campo desde $r = r_i$, hasta $r = r_1$ y retorna al infinito, o bien se aleja indefinidamente (con velocidad creciente), dependiendo de si la componente radial de su velocidad inicial es $\dot r_i < 0$ o $\dot r_i \geq 0$, respectivamente.
- Si $K < 0$, la fuerza es atractiva (por ejemplo, en el caso del potencial gravitatorio es $K = -GMm$). Hay varias posibilidades:
  - Si $L = 0$, el movimiento es rectilíneo, como ya se ha indicado en el apartado anterior, y no ligado.
    - Si $E > 0$, la partícula cae al centro de potencial o escapa al infinito (con velocidad decreciente), dependiendo de si la velocidad inicial, que sólo tiene componente radial, es $\dot r_i < 0$ o $\dot r_i > 0$, respectivamente [28].

[27] Ver, por ejemplo, [4].
[28] Observar que, si $E \geq 0$, necesariamente $\dot r_i \neq 0$.

- Si $E < 0$, la partícula cae siempre al centro de potencial: si $\dot{r}_i > 0$ se aleja hasta una distancia $r_l > r_i$ y retorna hacia $r = 0$; mientras que si $\dot{r}_i \leq 0$ cae directamente hacia $r = 0$.



- Si $L \neq 0$, entonces la función $\tilde{U}(r)$ tiene un mínimo en $r_3 = -\dfrac{L^2}{Km}$, con valor $\tilde{U}(r_3) = -\dfrac{K^2 m}{2L^2}$ y las características del movimiento dependen del valor de E:
  - Si $E > 0$, el movimiento es no ligado (no periódico) y la órbita tiene un punto de retorno para $r = r_1$ solución de $E = \tilde{U}$: si $\dot{r}_i \leq 0$ la partícula se acerca al centro del campo desde $r_i \geq r_1$ hasta $r = r_1$ y retorna al infinito (con $\dot{r}_\infty > 0$) [29], y si $\dot{r}_i > 0$ se aleja hacia al infinito (con $\dot{r}_\infty > 0$).
  - Si $E = 0$, el movimiento es no ligado (no periódico) y la órbita tiene un punto de retorno para $r = r_5$, solución de $\tilde{U} = 0$: la partícula se acerca al centro del campo desde $r_i \geq r_5$ hasta $r = r_5$ y retorna al infinito (con $\dot{r}_\infty = 0$) si $\dot{r}_i \leq 0$, o se aleja indefinidamente (con $\dot{r}_\infty = 0$) si $\dot{r}_i > 0$.
  - Si $\tilde{U}(r_3) < E < 0$, el movimiento es ligado y periódico y el valor de r varía entre dos valores de retorno r_2 y r_4 que son soluciones de $E = \tilde{U}$.
  - Si $E = \tilde{U}(r_3)$, el movimiento es periódico y la partícula se mueve a distancia constante $r = r_3$ del centro del campo (órbita circular), con $\dot{r} = 0$, obviamente.



[29] Observar que si $r_i = r_1$, entonces $\dot{r}_i = 0$.

No obstante, en el caso de campos centrales newtonianos es posible hallar la ecuación de las órbitas (para el caso $L \neq 0$) resolviendo la ecuación (1.24) que, como $F(r) = \frac{K}{r^2}$, es

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{Km}{L^2} \ .$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo orden [30] cuya solución general es

$$\frac{1}{r(\theta)} = u(\theta) = A\cos(\theta - \theta_o) - \frac{Km}{L^2} \ .$$

Comparando con (1.18) se ve que la órbita es una cónica, con $B = -\frac{Km}{L^2}$; donde θ_o determina la orientación de la órbita respecto a los ejes coordenados, y se puede tomar $A > 0$ (dado que θ_o se puede elegir arbitrariamente). El valor de la constante A queda, asimismo, determinado en función de las magnitudes E y L (esto es; de las condiciones iniciales). En efecto, los puntos de retorno r_{max}, r_{min} de la trayectoria, que son los puntos de la cónica a mayor y menor distancia del foco [31], se obtienen cuando $\cos(\theta - \theta_o) = \pm 1$ y son, por tanto,

$$\frac{1}{r_{max}} = -A - \frac{Km}{L^2} \quad , \quad \frac{1}{r_{min}} = A - \frac{Km}{L^2} \ , \tag{1.25}$$

observándose que hay uno o dos dependiendo del tipo de cónica (por ejemplo, si $K > 0$ o si $K < 0$ pero $B \leq A$, sólo existe $r_{\text{mín}}$). Para las órbitas en campos centrales newtonianos, para un valor determinado de la energía, estos puntos se obtienen cuando $E = \tilde{U}(r)$; es decir,

$$E = \frac{K}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} \ , \tag{1.26}$$

cuya solución es

$$\frac{1}{r_{max}} = -\frac{Km}{L^2} - \sqrt{\left(\frac{Km}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \quad , \quad \frac{1}{r_{min}} = -\frac{Km}{L^2} + \sqrt{\left(\frac{Km}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} \ ,$$

de modo que, comparando con (1.25), se obtiene que

$$A = \sqrt{\left(\frac{Km}{L^2}\right)^2 + \frac{2mE}{L^2}} = \sqrt{B^2 + \frac{2mE}{L^2}} \ . \tag{1.27}$$

Teniendo en cuenta uno de los resultados de la proposición 2, la excentricidad de la cónica es

$$e = \frac{A}{|B|} = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mK^2}} \ , \tag{1.28}$$

de modo que

$$\frac{1}{r(\theta)} = \frac{|K|m}{L^2}(e\,\cos(\theta - \theta_o) - 1) \ \Rightarrow \ r_{max} = \frac{L^2}{|K|m(1-e)} \quad , \quad r_{min} = \frac{L^2}{|K|m(1+e)} \ .$$

Así pués, para $L \neq 0$, se tienen los siguientes casos:

[30] Como la del oscilador armónico forzado unidimensional, con fuerza aplicada constante.

[31] Estos puntos se denominan, respectivamente, *afelio* y *perihelio*, en el caso de las órbitas en torno al Sol, y *apogeo* y *perigeo* para el caso de la Tierra.

- $K > 0$ (campo repulsivo): De (1.26) resulta que $E > 0$ necesariamente. A partir de (1.27) se tiene que $A > |B|$ y como $B < 0$, ha de ser $-A < B$; luego, según la Proposición 2, la órbita es es la rama positiva de una hipérbola (con un sólo punto de retorno dado por la segunda ecuación (1.25).

- $K < 0$ (campo atractivo): entonces $B > 0$ y:

  - Si $E > 0$, de (1.27), de (1.27) se tiene de nuevo que $A > |B|$ y, por tanto, $B < A$; luego, según la Proposición 2, la órbita es la rama negativa de una hipérbola, con un sólo punto de retorno r_{min}; para la cuál
  $$\mathrm{a} = \frac{|K|}{2E}.$$

  - Si $E = 0$, de (1.27) se tiene que $B = A$ y, según la Proposición 2, la órbita es una parábola, con un sólo punto de retorno r_{min}, y cuyo parámetro es
  $$\mathrm{a} = \frac{1}{B} = \frac{L^2}{|K|m} \ .$$

  - Si $-\dfrac{K^2m}{2L^2} < E < 0$, de (1.27) se tiene que $A < B$ y, según la Proposición 2, la órbita es una elipse, con dos puntos de retorno r_{min} y r_{max}. Como $2\mathrm{a} = r_{min} + r_{max}$, los semiejes son
  $$\mathrm{a} = \left|\frac{B}{A^2 - B^2}\right| = \frac{L^2}{|K|m(1 - e^2)} = \frac{K}{2E} \ , \tag{1.29}$$
  $$\mathrm{b} = \mathrm{a}\sqrt{1 - e^2} = \frac{L^2}{|K|m(1 + e)} = L\sqrt{\frac{\mathrm{a}}{|K|m}} = \frac{L}{\sqrt{2m|E|}} \ . \tag{1.30}$$

  - Si $E = -\dfrac{K^2m}{2L^2}$ [32], de (1.28) se tiene que $e = 0$ y la órbita es una circunferencia de radio
  $$R = \frac{L^2}{|K|m} \ .$$

Con todo ello se ha probado que

Teorema 5 *Las órbitas de una partícula sometida a un campo central newtoniano son cónicas con el centro del campo en su foco (o en uno de ellos). En particular, si $L \neq 0$ y $K > 0$, son hipérbolas; mientras que si $L \neq 0$ y $K < 0$:*

- *Son hipérbolas si $E > 0$.*
- *Son parábolas si $E = 0$.*
- *Son elipses si $-\dfrac{K^2m}{2L^2} \leq E < 0$ y, en particular, circunferencias si $E = -\dfrac{K^2m}{2L^2}$.*

Si $L = 0$, las órbitas son rectas.

[32] No puede ser $E < -\dfrac{K^2m}{2L^2}$ ya que e sería negativo.

1.2.4. Deducción de las leyes de Kepler

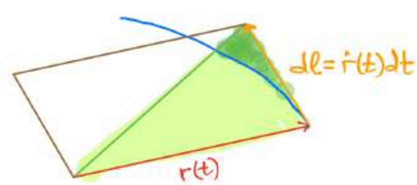
Las tres leyes de Kepler son consecuencias de la teoría de la Gravitación newtoniana y, en particular, se deducen a partir de la Ley de la Gravitación Universal:

Primera Ley de Kepler: Se ha visto, en el apartado anterior (teorema 5), que las órbitas de una partícula en un campo central newtoniano, son curvas cónicas y para los valores de la energía total de la partícula que originan órbitas cerradas son, en particular, elipses con uno de los focos en el centro del campo.

Segunda Ley de Kepler: En primer lugar recuérdese que, como se ha visto en el apartado 1.2.2, en el movimiento de una partícula en un campo central se conserva el momento angular y, por consiguiente, dicho movimiento tiene lugar en un plano. Sea entonces una partícula de masa m que recorre una órbita en dicho plano (que puede ser considerado el plano XY). Parametrizando esa trayectoria respecto al tiempo se tiene que $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. En un intervalo de tiempo infinitesimal dt la partícula, moviéndose con velocidad $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, recorre un arco de curva infinitesimal cuya longitud puede ser aproximada por el módulo del vector diferencial de longitud de arco $d\,\mathbf{l}$ (vector tangente infinitesimal a la órbita en el punto) que es $d\mathbf{l} = \dot{\mathbf{r}}\,dt$. El (diferencial de) área barrida por el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ en el tiempo dt se aproxima entonces por la mitad del área del paralelogramo de lados $\mathbf{v}(t)\,dt$ y $\mathbf{r}(t)$, que es

$$d\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2}|\mathbf{r}(t) \times \dot{\mathbf{r}}(t)\,dt| = \frac{1}{2m}|\mathbf{r}(t) \times m\,\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt| = \frac{1}{2m}|\mathbf{L}(t)\,dt| \equiv \frac{1}{2m}L(t)\,dt \ , \qquad (1.31)$$

ya que $\mathbf{L}(t) = \mathbf{r}(t) \times m\,\dot{\mathbf{r}}(t)$ es el momento angular de la partícula y $L(t)$ denota su módulo.



De este modo, el módulo de la *velocidad areolar* es

$$\mathcal{V}(t) := \frac{d}{dt}\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2m}\,L(t) \ ,$$

y como $\mathbf{L}(t) = \mathbf{L} \implies L(t) = L$ (es constante) se concluye que $\mathcal{V}(t)$ es también constante.

Tercera Ley de Kepler: En primer lugar, de la ecuación (1.31) se tiene que el área barrida por el vector de posición $\mathbf{r}(t)$ entre $t_o = 0$ y t es

$$\mathcal{A}(t) = \int_0^t d\mathcal{A}(t) = \frac{1}{2m}\int_0^t L(t)\,dt \ ;$$

luego, si el movimiento es periódico (órbita cerrada, elíptica), integrando para un periodo completo T se obtiene que el área de la superficie (plana) limitada por la órbita elíptica es

$$\mathcal{A} = \frac{LT}{2m} = \pi \mathrm{ab} \ .$$

luego, utilizando las relaciones (1.29) y (1.30), resulta que

$$T = \sqrt{\frac{\pi^2 G^2 M^2 m}{2|E|^3}} \iff T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}\mathrm{a}^3 \ ,$$

y teniendo en cuenta que $\mathrm{a} = \frac{1}{2}(r_{max} + r_{min})$ es la distancia media del centro a los puntos de la elipse, se concluye la tercera Ley de Kepler.

Problemas y ejercicios

1. Un objeto tiene un peso P al nivel del mar. ¿Cuánto pesa en la cumbre del Everest ($h = 8850\ m$)? ¿Y si se sube una altura igual al radio de la Tierra? Calcular a qué altura sobre la superficie de la Tierra el peso se reduce a la mitad.

2. Utilizando la Ley de la Gravitación Universal, determinar la fuerza gravitatoria originada por una esfera maciza homogénea de masa M y radio R en un punto a distancia r del centro; *(a)* si $r > R$, *(b)* si $r < R$.

   Repetir los cálculos para el caso de una esfera hueca (es decir, para una superficie esférica).

3. Suponiendo que la Tierra es una esfera homogénea, obtener la ley del movimiento de una partícula de masa m que cayera desde un punto de la superficie, en reposo, y sin rozamiento, a lo largo de un túnel diametral que cruzara la Tierra.

4. Determinar la energía potencial gravitatoria de un sistema formado por cuatro masas m_1, m_2, m_3, m_4 situadas en los vértices de un cuadrado de longitud de lado l. Determinar la energía potencial que tiene una cualquiera de las partículas. ¿Coinciden ambos valores?

5. Un satélite artificial se dice que está en *órbita geoestacionaria* si está siempre en la vertical de un cierto punto de la Tierra. ¿A qué altura están los satélites geoestacionarios? ¿Cual es el momento angular respecto al centro de la Tierra de un satélite geoestacionario de 500 Kg de masa? ¿Puede haber satélites geoestacionarios en la vertical de un punto de España? (*Datos:* $R_T = 6370\ Km$; $g_o = 9,8\ m/s2$)

6. Una partícula de masa m se mueve en una órbita circular de radio R_o con velocidad V_o atraída hacia el centro de una fuerza central newtoniana. Si la velocidad de la partícula se aumenta a $V = \sqrt{\alpha}\, v_o$, con $\alpha > 1$, demostrar que si $\alpha \geq 2$, la partícula se aleja hasta el infinito. Si $\alpha < 2$, determinar la ecuación de la nueva órbita en términos de R_o, v_o y α.

7. Un pequeño satélite describe una órbita circular de radio R_o alrededor de la Tierra. Se cambia la dirección de la velocidad para que la órbita pase a ser elíptica, de tal forma que el momento angular se reduce a la mitad pero la energía se mantiene constante. Calcular, en función de R_o, la distancia del satélite al centro de la Tierra en el apogeo y en el perigeo para la nueva órbita.

8. Considérese un planeta esférico de masa M y radio R, sin atmósfera. Desde un punto P de su superficie se lanza un proyectil con velocidad inicial v_o. Determinar cuál ha de ser la velocidad v_o para que el proyectil, siguiendo una órbita elíptica de semieje mayor b $= H > R$, vuelva a tocar suelo en el punto P' antipodal de P, después de alcanzar una altura máxima H con respecto al suelo. Obtener la ecuación de la trayectoria seguida por el proyectil.

9. Suponiendo que la Tierra es una esfera perfecta:

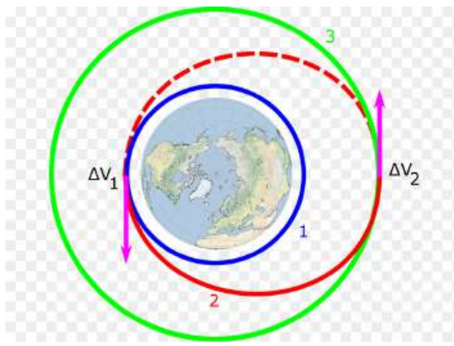
   a) ¿Cuál ha de ser la velocidad v de un móvil que gira a su alrededor para que siga una órbita de radio mínimo R_T y radio máximo $2R_T$?

   b) ¿Cuál es la velocidad mínima (*velocidad de escape*) que hay que comunicar a un cuerpo lanzado verticalmente desde la superficie de la Tierra para que se aleje indefinidamente y no vuelva a caer a la Tierra?

   c) Si se lanza el cuerpo verticalmente hacia arriba con la velocidad calculada en el apartado anterior. Justificar que el movimiento es rectilíneo y hallar la expresión de la distancia a la superficie en función del tiempo $h(t)$.

(*Datos:* $R_T = 6,370 10^6\ m$, $M_T = 5,98 10^{24}\ Kg$, $G = 6,67 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$. *Despreciar el efecto del rozamiento con la atmósfera*).

10. (*Órbita de transferencia*). Un satélite esta situado en una órbita circular alrededor de la Tierra. y se desea transferirlo a otra órbita circular de radio $R_2 > R_1$. Para ello se accionan sus motores durante un corto intervalo de tiempo, produciendo un impulso tangencial y provocando un incremento de velocidad Δv_1 que que modifica la órbita, pasando a ser elíptica. Una vez recorrida la mitad de dicha elipse, se vuelven a conectar los motores, produciendo otro impulso tangencial que modifica la velocidad en Δv_2, para que la nueva órbita sea la circunferencia de radio R_2 deseada. Determinar los parámetros de la órbita elíptica de transferencia y los valores de Δv_1 y Δv_2 en función de R_1 y R_2.



11. Sabiendo que la distancia entre Venus y el Sol varía entre su perihelio de 0,718 UA y su afelio de 0,728 UA, determinar: *(a)* la longitud del semieje mayor de la órbita del planeta, *(b)* la velocidad en el afelio, sabiendo que en el perihelio es de aproximadamente 35,24 Km/s, *(c)* la velocidad en los extremos del eje menor de la órbita.

12. *(Examen 26/05/2020)*. La nave espacial *USS Enterprise NCC-1701-D* de la *Flota Estelar* se acerca en misión exploratoria a un planeta, en trayectoria inercial [33] hiperbólica, de manera que cuando alcanza el punto de máxima aproximación a distancia R del centro del planeta (*perigeo*) se está moviendo con velocidad v (máxima).

    (a) Determinar la energía E y el momento angular total L del *Enterprise*, y el parámetro a y la excentricidad e en esta órbita hiperbólica.

    En el perigeo, el capitán *Jean–Luc Picard* ordena reducir la velocidad en un valor Δv para que la nave describa una nueva órbita. Determinar Δv para que la órbita sea:

    (b) Una parábola. Obtener los valores de E, L y la velocidad máxima v_{max}, así como el parámetro a y la excentricidad e de la órbita parabólica.

    (c) Una circunferencia de radio R. Obtener E, L, la velocidad v_c y el periodo T en esta órbita.

    (d) Una elipse de *perigeo* R y *apogeo* $2R$. Obtener E, L, las velocidades máxima v_{max} y mínima v_{min}; los semiejess a, b, la excentricidad e y el periodo T en esta órbita.

    (*Dar resultados en función de* G, R, v, M *(masa del planeta) y* m *(masa del Enterprise)*).

13. *(Examen 16/07/2020) Una partícula de masa m es atraída por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia a un punto fijo O y se mueve describiendo una elipse de ecuación*

$$r = \frac{100}{1 + \frac{1}{2}\cos\theta} \ .$$

[33] Es decir, con los motores apagados, sometida únicamente a la gravedad del planeta.

a) *Si en el punto más alejado de su trayectoria, P, la velocidad de la partícula es $v_{min} = 1$, determinar la constante K del campo.*

b) *Si en el punto más alejado de su trayectoria, P, la velocidad de la partícula se duplica, determinar la ecuación de la nueva órbita. ¿De qué tipo de órbita se trata?*

c) *¿A qué valor debe cambiar la velocidad en P para que la órbita sea una circunferencia? Discutir cuál es el rango de valores que puede tomar la velocidad en P para que la órbita sea una elipse cuyo punto a mínima distancia de O sea P.*

14. *En el problema de Kepler con una fuerza central del tipo $\mathbf{F} = -k\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{k}{r^2}\mathbf{u}_r$, se define el* vector de Laplace–Runge–Lenz *como $\mathbf{A} = \mathbf{p}\times\mathbf{L} - mk\frac{\mathbf{r}}{r}$. Demostrar que este vector es una magnitud conservada, que su módulo vale mke, donde e es la excentricidad de la órbita y que su sentido va desde el centro del campo hacia el perihelio.*

15. *Se considera una fuerza central de tipo* Hooke*, $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$.*

a) *Dibujar la energía potencial efectiva en función de r, observar que $b \leq r \leq a$ y calcular a y b.*

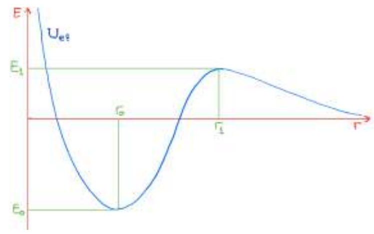
b) *Obtener las trayectorias a partir de las ecuaciones de movimiento, en coordenadas cartesianas x_1, x_2 en el plano de la órbita y comprobar que son elipses de semiejes a y b, con centro en el origen.*

c) *Comprobar que la forma cuadrática $Q_{ij} = \frac{1}{2}(m\dot{x}_i\dot{x}_j + kx_ix_j)$ es una constante del movimiento, calcular su determinante y su traza y demostrar que las direcciones propias son las de los semiejes de la elipse.*

16. (Examen 08/06/2020). *La* interacción de Yukawa *es un modelo propuesto en 1935 por el físico japonés Hideki Yukawa (1907-1985), que describe la fuerza nuclear entre las partículas del núcleo atómico* (nucleones)*. Es un campo central cuyo potencial efectivo es*

$$\tilde{U}(r) = -\frac{K\,e^{-\alpha r}}{r} + \frac{C}{r^2}\ ,$$

donde K, C, α son constantes positivas, y cuya representación es la de la figura. Discutir cualitativamente cómo es el movimiento de una partícula sometida a un potencial de éste tipo, según sean su energía total E y las condiciones iniciales de su movimiento.


E
U_{ef}
E_1
r_0
r_1
r
E_0

Capítulo 2

Electromagnetismo

Introducción

Este capítulo está dedicado a realizar una presentación de los fundamentos de la teoría clásica (de Maxwell) del campo electromagnético y sus principales consecuencias fenomenológicas. En este curso sólo se considerará la teoría electromagnética en el vacío; es decir, fuera de los medios materiales. El electromagnetismo en medios materiales tiene sus propias peculiaridades que están fuera del nivel de este curso introductorio (ver [2]).

Tras una breve introducción en la que se repasan los antecedentes experimentales sobre los campos eléctricos y magnéticos, se establecen los fundamentos del Electromagnetismo por medio de las ecuaciones de Maxwell expresadas en la forma diferencial clásica que, junto con la *ecuación de la fuerza de Lorentz*, dan cuenta de todas las leyes y fenómenos electromagnéticos clásicos. De la estructura de estas ecuaciones se deriva la existencia de los *potenciales electromagnéticos*. El siguiente paso es obtener la forma integral de las ecuaciones de Maxwell, que permiten recuperar las leyes fundamentales del electromagnetismo. La *ecuación de las ondas electromagnéticas* se obtiene también de forma inmediata a partir de las ecuaciones de Maxwell. Finalmente, se describen algunos de los principales fenómenos y propiedades del electromagnetismo; en particular, los relativos a la conservación de la carga, la transmisin de energía, la emisión de radiación por cargas aceleradas y otros.

2.1. Teoría de Maxwell del campo electromagnético

Las *Ecuaciones de Maxwell* son un sistema de ecuaciones en derivadas parciales (e.d.p's) postuladas por el físico inglés *James Clerk Maxwell* (1831–1879) entre 1862 y 1863 que, junto con la *ecuación de la fuerza*, debida al físico holandés *Hendrik Antoon Lorentz* (1853–1928), permiten describir todos los fenómenos del electromagnetismo clásico. Estas ecuaciones sintetizan toda una serie de leyes previamente establecidas por *Charles Augustin Coulomb* (físico inglés, 1736-1806), *Karl Fiedrich Gauss* (matemático alemán, 1777–1851), *André Marie Ampère* (físico francés, 1775–1836), *Michael Faraday* (físico inglés, 1791–1867), *Joseph Henry* (físico estadounidense 1797–1878) y otros.

2.1.1. Antecedentes y motivaciones históricas

La Mecánica clásica explica los fenómenos físicos que tienen que ver, por una parte, con magnitudes *cinemáticas*, como son el *espacio* y el *tiempo*, y por otra con características de la materia relacionadas con la magnitud *dinámica* que hemos denominado *masa*. La Teoría electromagnética estudia otra clase de fenómenos completamente diferentes que atañen, esencialmente, a otra magnitud: la *carga eleéctrica*, de la cuál, como es bien sabido, hay de dos tipos, *negativas* y *positivas*.

Inicialmente se distinguieron dos tipos de fenómenos:

- Los que tenían que ver con las distribuciones de cargas eléctricas estáticas y su interacción, y que dieron lugar al concepto de *campo eléctrico*. De aquí surgieron las leyes experimentales de *Coulomb* o de *Gauss* (de la electrostática).

- Los de tipo *magnético* que, en un principio, se creía que eran independientes de los de origen eléctrico, pero que pronto se comprendió que estaban relacionados con aquellos y, concretamente, con cargas eléctricas en movimiento o *corrientes eléctricas*. Estos dieron origen al concepto de *campo magnético*, elaborándose entonces la leyes de la electrocinética y el magnetismo: leyes de *Gauss* (del magnetismo), de *Faraday*, *Lenz* y *Henry* y de *Ampère* y *Maxwell*.

En analogía con el *campo gravitatorio* (generado por masas y que actúa sobre masas); el *campo eléctrico* está generado por cargas eléctricas y actúa sobre cargas eléctricas. Por su parte, aunque, como se acaba de comentar, originalmente se asoció la denominada *fuerza magnética* a ciertas propiedades que tenían algunos materiales ("magnetización", fuerzas entre *imanes*, ...), con posterioridad se comprendió que éstas no eran más que un efecto residual de las fuerzas producidas por cargas en movimiento [1]. De ese modo, el *campo magnético* está, por tanto, generado por las *corrientes eléctricas* (cargas en movimiento) y actúa sobre esas mismas corrientes.

Los enunciados de estas leyes y los fenómenos que describen son los siguientes:

Ley de Coulomb (1785): Dos cargas eléctricas (puntuales) se ejercen una fuerza mutua en la dirección de la recta que los une, cuyo valor es directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación entre ambas cargas. Dicha fuerza es repulsiva, si ambas cargas tienen el mismo signo (ambas positivas o ambas negativas), y atractiva, si son de signos opuestos.

Es decir, si las cargas son q_1 y q_2, esta fuerza es

$$\mathbf{F} = K\,\frac{q_1\,q_2}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}\ ; \tag{2.1}$$

donde $\mathbf{r}$ es el vector de posición de una carga respecto a la otra, r es su módulo, por tanto $\mathbf{u}_r = \dfrac{\mathbf{r}}{r}$ es un vector unitario en la dirección de $\mathbf{r}$, y K es una constante positiva que recibe el nombre de *constante de Coulomb*, cuyo valor es $K = 8,987552 \cdot 10^{-9}\ Nm^2/C^2$.

Utilizando esta ley, el físico estadounidense *Robert Andrews Millikan* (1868–1953) consiguió medir por primera vez la *carga fundamental* (del electrón), en 1909, cuyo valor es $e = -1,602177\cdot 10^{-19}\ C$.

Ley de Gauss (de la electrostática, 1835): El flujo del campo eléctrico a través de una

[1] Esto es así porque en el interior de estos materiales "imantados" se producen corrientes microscópicas que originan campos magnéticos macroscópicos cuyas líneas de campo son cerradas y salen del material y vuelven a entrar en él, de manera que los puntos de entrada y de salido forman los dos polos del imán.

superficie cerrada es proporcional a la cantidad de carga encerrada por la superficie,

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \propto Q \ .$$

El significado de esta ley es que los campos eléctricos están generados por las cargas eléctricas; es decir, que las cargas son las "fuentes" y los "sumideros" del campo. Por convenio se asume que las líneas de corriente del campo eléctrico (es decir, sus *curvas integrales*) se originan en las cargas positivas y confluyen en las negativas [2].

Ley de Gauss (del magnetismo, 1835): el flujo del campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es nulo,

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = 0 \ .$$

Análogamente, esta ley significa que no existen 'cargas magnéticas' y que, por tanto, las líneas de corriente del campo magnético son cerradas.

Los siguientes enunciados hacen referencia a *circuitos eléctricos*. Desde el punto de vista matemático, un *circuito eléctrico* es cualquier material conductor cuya forma es la de una curva cerrada regular (a trozos) C. Entonces:

Ley de Faraday-Henry (1831): La *tensión eléctrica* (o *fuerza electromotriz* [3]) inducida en un circuito eléctrico cerrado por un campo magnético es directamente proporcional a la rapidez con que cambia en el tiempo el flujo magnético que atraviesa una superficie cualquiera que tenga el circuito como borde,

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \propto \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Esencialmente esta ley, que fué propuesta independientemente por *Michael Faraday* y *Joseph Henry*, expresa que la variación de un campo magnético en el tiempo provoca movimiento de cargas en un circuito conductor eléctrico; esto es, corriente eléctrica. En ella se basa la práctica totalidad de la tecnología eléctrica. Con posterioridad, el físico alemán *Heinrich Friedrich Emil Lenz* (1804–1865) completaría esta ley, añadiendo la siguiente precisión:

Ley de Lenz: Las tensiones eléctricas inducidas por un campo magnético en un circuito cerrado tienen un sentido tal que se opone a la variación del flujo del campo magnético que las produce [4],

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Matemáticamente se traduce en la introducción de un signo negativo y la igualdad en la ley de Faraday-Henry.

Ley de Ampère (1826): Una corriente eléctrica induce un campo magnético cuya circulación en un circuito cerrado es proporcional al flujo de (la densidad superficial de) dicha corriente a través de cualquier superficie contorneada por el circuito,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \propto \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

[2] Físicamente, las líneas de corriente del campo son las trayectorias que siguen las partículas cargadas sometidas a dicho campo. Teniendo en cuenta la *ley de Coulomb*, con este convenio se está asumiendo que estas cargas 'de prueba' son positivas.

[3] Este concepto se define más precisamente como la circulación del campo eléctrico, como se establecerá más adelante.

[4] Esta ley es realmente una consecuencia de la ley de conservación de la energía.

(El campo magnético es un campo angular con forma circular, cuyas líneas de corriente encierran la corriente y la intensidad del campo magnético disminuye inversamente con la distancia al circuito).

En esta ley, *Ampère* expresó matemáticamente, en foma más rigurosa y detallada, el resultado de los experimentos del físico danés *Hans Christian Oersted* (1777–1851), realizados en 1820. Su significado físico es que las corrientes eléctricas en un circuito originan campos magnéticos a su alrededor y que, por tanto, dichas corrientes son las fuentes de los campos magnéticos.

Esta ley fué inicialmente establecida por *Ampère* para corrientes eléctricas y campos magnéticos *estáticos* (que no varían en el tiempo). Posteriormente, *Maxwell* la generalizó, en sus ecuaciones, para campos que varían en el tiempo:

Ley de Maxwell: Un campo eléctrico no estacionario origina en un circuito conductor cerrado una corriente eléctrica (denominada *corriente de desplazamiento*) que, a su vez, es la responsable de un campo magnético cuya circulación es proporcional al ritmo de variación del flujo del campo eléctrico a través de cualquier superficie que tenga el circuito como borde,

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \propto \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad .$$

Esto quiere decir que un campo eléctrico variable produce un campo magnético y , por tanto, los campos eléctricos no estacionarios también son fuentes del campo magnético. Estas dos leyes serían, pués, las recíprocas de la *ley de Faraday-Henry-Lenz*.

2.1.2. Ecuaciones de Maxwell en el vacío (forma diferencial)

Todas las leyes anteriores (junto con otras) fueron el resultado de muchos años de observaciones y experimentos. Sin embargo, no fué hasta finales del siglo XIX en que *James Clerk Maxwell* consiguó reunirlas en un conjunto de ecuaciones que, de ese modo, unificaban en un único marco teórico todo ese conjunto de fenómenos electricos y magnéticos.

Estas ecuaciones son las análogas a las *ecuaciones del campo gravitatorio* en la teoría de la gravitación newtoniana. Son las siguientes:

(ECUACIONES DE MAXWELL DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO): Una distribución de carga eléctrica de densidad $\rho = \rho(t, \mathbf{x})$ y una distribución de corriente eléctrica de densidad superficial $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, \mathbf{x})$ originan sendos campos *eléctrico* $\mathbf{E} = \mathbf{E}(t, \mathbf{x})$ y *magnético* $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \mathbf{x})$ que están determinados por las siguientes ecuaciones [5]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_o \mathbf{j} + \mu_o \epsilon_o \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad . \tag{2.5}$$

que se denominan *ecuaciones de Maxwell en el vacío* o, también, *ecuaciones de Maxwell microscópicas* [6] (expresadas en forma diferencial).

[5] Las dos primeras ecuaciones son las *ecuaciones de las divergencias*; mientras que las otras dos son las *ecuaciones de los rotacionales*. En estas ecuaciones los operadores diferenciales actúan en $\mathbb{R}^3$, derivando sólo respecto a las variables de posición.

[6] En contraposición a las ecuaciones de Maxwell *en medios materiales*, o *ecuaciones de Maxwell macroscópicas*.

En estas expresiones los símbolos tienen el siguiente significado:

- $\mathbf{E}$ es el *campo eléctrico* (unidades SI: $N/C = V/m$ [7]).
- $\mathbf{B}$ es el *campo magnético* o *inducción magnética* (unidades SI: $T = Vs/m^2 = Wb/m^2$ [8]).
- ρ es la *densidad de carga eléctrica* (unidades SI: C/m^3). Es decir, si Q es la carga total de una distribución de carga en una región $V \subset \mathbb{R}^3$, se tiene que $Q = \displaystyle\int_V \rho\, dV$.
- $\mathbf{j}$ es la *densidad de corriente eléctrica* (unidades SI: A/m^2). Es decir, si $I = \dfrac{dQ}{dt}$ es la intensidad de la corriente eléctrica en una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$, se tiene que $I = \displaystyle\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s}$.
- ϵ_o es la *constante eléctrica* o *permitividad del vacío* (valor SI: $8,854187817620 \cdot 10^{-12}\ C^2/Nm^2$ o F/m [9]).
- μ_o es la *constante magnética* o *permeabilidad del vacío* (valor SI: $1,2566370614 \cdot 10^{-6}\ Tm/A$ o $= H/m$ [10] o N/A^2).
- $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o \epsilon_o}}$ es la *velocidad de la luz en el vacío* (valor SI: $2,99792458 \cdot 10^8\ m/s$).

2.1.3. Ecuación de la fuerza de Lorentz. Ecuación de las trayectorias

Para completar la teoría, a las ecuaciones de campo hay que añadir la que explicita cómo los campos eléctricos y magnéticos actúan sobre las partículas cargadas que se mueve en el seno de dichos campos; esto es, cuál es la fuerza que estos campos ejercen sobre tales partículas.

Si una partícula de masa m y carga eléctrica q se mueve con cierta velocidad $\mathbf{v}$ en el seno de un campo electromagnético, esta sometida a la acción de dicho campo pero, a su vez, interacciona con el mismo, debido al campo electromagnético que crea la propia partícula. No obstante, si se asume que la carga q y su velocidad $\mathbf{v}$ son pequeñas, esta última interacción es despreciable y se puede suponer que el campo electromagnético no depende ni de la posición ni de la velocidad de la carga. En estas circunstancias, la fuerza que los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ ejercen sobre la partícula está dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ , \tag{2.6}$$

que se denomina *ecuación de la fuerza de Lorentz*.

Obsérvese que la fuerza producida por el campo eléctrico tiene la misma dirección que éste, mientras que la del campo magnético es perpendicular al campo y a la velocidad.

De aquí, utilizando la *Segunda Ley de Newton*, se obtiene la ecuación dinámica de las trayectorias de una partícula sometida a la acción de estos campos,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\ddot{\mathbf{x}} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{x}} \times \mathbf{B}) \ , \tag{2.7}$$

[7] La definición de las unidades de todas estas magnitudes se recopilan en el apéndice 2.5.

[8] $Wb = Tm^2$ se denomina *weber* en honor al físico alemán *Wilhelm Eduard Weber* (1804–1891) y es la unidad de *flujo magnético*.

[9] $F = C/Nm$ se denomina *faraday* o *faradio*, en honor a *Michael Faraday*.

[10] $H = Tm^2/A$ se denomina *henry* o *henrio*, en honor a *Joseph Henry*.

2.1.4. Potenciales electromagnéticos

Existen otras maneras alternativas de expresar las ecuaciones de Maxwell. Se basan en la introducción los denominados *potenciales electromagnéticos* y permiten dar una expresión más compacta de las ecuaciones. Estos potenciales aparecen de manera natural a partir de las ecuaciones de Maxwell, como consecuencia de las propiedades analíticas que dichas ecuaciones confieren a los campos eléctrico y magnético. Así se tiene que:

- La ecuación de la divergencia para el campo magnético (2.3), $\nabla\cdot\mathbf{B}=0$, es una ecuación homogénea y, al considerar únicamente regiones *estrelladas* en $\mathbb{R}^3$, expresa que dicho campo $\mathbf{B}$ es solenoidal y, por tanto, existe un potencial vectorial que lo origina, $\mathbf{A}=(A^1,A^2,A^3)$; es decir,
$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\ . \tag{2.8}$$
- Utilizando (2.8) en la ecuación del rotacional del campo eléctrico (2.4), $\nabla\times\mathbf{E}+\dfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0$, se obtiene una nueva ecuación homogénea
$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0$$
que expresa el hecho de que el campo $\mathbf{E}+\dfrac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ es irrotacional y, al considerar únicamente regiones *simplemente conexas* en $\mathbb{R}^3$, es conservativo y, por tanto, deriva de algún potencial escalar Φ
$$\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\,\Phi\ . \tag{2.9}$$
(Obsérvese que el campo eléctrico no es conservativo, a menos que los campos magnéticos en presencia sean estacionarios o nulos).

Así pues, se tiene que:

Teorema 6 *Las ecuaciones de Maxwell (2.3) y (2.4), en función de los potenciales electromagnéticos, se expresan en forma equivalente como*
$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}\quad;\quad\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla\,\Phi\quad , \tag{2.10}$$
y reciben el nombre de primer par de las ecuaciones de Maxwell [11]*.*

Definición 6 *Los potenciales Φ y $\mathbf{A}$ se denominan* ***potenciales electromagnéticos****; en particular, Φ es el* ***potencial escalar*** *y $\mathbf{A}$ es el* ***potencial vectorial*** *del campo electromagnético.*

Con todo ello se tiene:

Teorema 7 *Las ecuaciones de Maxwell (2.2) y (2.5), en función de los potenciales electromagnéticos, se expresan de forma equivalente como* [12]
$$\nabla^2\Phi+\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_o} \tag{2.11}$$
$$\nabla^2\,\mathbf{A}-\mu_o\epsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu_o\epsilon_o\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) = -\mu_o\mathbf{j}\ . \tag{2.12}$$

[11] Son simplemente las definiciones de los potenciales electromagnéticos.

[12] Se utilizan las notaciones habituales para la *laplaciana* de un campo escalar $\nabla^2F\equiv\nabla\cdot(\nabla\,F)$ (divergencia del gradiente), y de un campo vectorial $\nabla^2\mathbf{F}$ (cuyas componentes son las laplacianas de las funciones componentes).

Estas son el segundo par de las ecuaciones de Maxwell [13].

(*Dem.*): La ecuación (2.11) se obtiene directamente a partir de (2.2), usando (2.9).

La ecuación (2.12) se obtiene directamente a partir de (2.5), usando (2.8) y la relación entre operadores diferenciales

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F} \ . \tag{2.13}$$

■

2.1.5. Invariancia "gauge" o "de contraste". Gauge de Lorenz

Una propiedad muy importante de la teoría del electromagnetismo, que proviene de la estructura de las propias ecuaciones de Maxwell, tiene que ver con los potenciales electromagnéticos. En efecto, de la propia definición del potencial vectorial $\mathbf{A}$ (ecuación (2.8)), se observa que este potencial no es único, ya que, como es bien sabido, cualquier otro campo vectorial que difiera de uno dado en el gradiente de cualquier campo escalar [14], esto es

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A} + \nabla \varphi \ , \tag{2.14}$$

es también potencial vectorial del mismo campo solenoidal. Del mismo modo, la ecuación (2.9) pone de manifiesto que el potencial escalar Φ tampoco es único, ya que arrastra la ambiguedad de $\mathbf{A}$ y, además, cualquier otro campo escalar que difiera de un potencial dado en una función constante también es un potencial escalar. En concreto, si φ es la función arbitraria previamente introducida, teniendo en cuenta la relación (2.9), la ambiguedad en la elección de Φ es

$$\tilde{\Phi} = \Phi + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \ . \tag{2.15}$$

Así pués, estos cambios de potencial no alteran los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ y, por consiguiente, las ecuaciones de Maxwell (2.10), (2.11) y (2.12) son invariantes por las transformaciones (2.14) y (2.15).

Definición 7 *La libertad de elección de los potenciales electromagnéticos se denomina **libertad gauge** o **de contraste** del campo electromagnético. Las transformaciones* (2.14) *y* (2.15) *se denominan **transformaciones de gauge** o **de contraste** de la teoría.*

Comentario 7 Es importante reseñar que las magnitudes físicamente relevantes ("medibles") son los campos eléctrico y magnético, y no los potenciales electromagnéticos. Por eso, desde el punto de vista físico, la libertad gauge es irrelevante.

La libertad gauge que existe en la elección de los potenciales electromagnéticos permite hacer una elección de los mismos que simplifique la expresión de estas ecuaciones. La más simple de estas elecciones es tomar, por ejemplo, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, que se denomina *fijación del gauge de Coulomb* o, simplemente, *gauge de Coulomb*. Sin embargo, una condición más general y físicamente más interesante es la siguiente:

[13] Son las ecuaciones equivalentes a la *ecuación de Poisson* del campo gravitatorio.
[14] De clase C^2.

Proposición 5 *Los potenciales electromagnéticos se pueden elegir de tal manera que*

$$\mu_o\epsilon_o\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\nabla\cdot\mathbf{A}=0 \ , \tag{2.16}$$

condición que recibe el nombre de fijación del gauge de Lorenz *o simplemente* gauge de Lorenz [15]*. Entonces el segundo par de las ecuaciones de Maxwell se expresan como*

$$\mu_o\epsilon_o\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\nabla^2\Phi=\frac{\rho}{\epsilon_o} \quad ; \quad \mu_o\epsilon_o\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\nabla^2\mathbf{A}=\mu_o\,\mathbf{j} \ . \tag{2.17}$$

(*Dem.*): La condición (2.16) es un sistema de EDP's con una amplia familia de soluciones. Entonces (2.17) es inmediato. ■

Observar que (2.17) es un sistema de EDP's desacoplado (en cada una de las cuatro ecuaciones aparece sólo una de las funciones incógnita Φ, A_1, A_2, A_3).

Comentario 8 Es habitual introducir el llamado *operador de D'Alembert* o *dalambertiano*, $\Box\equiv\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\nabla^2$, donde $c=\frac{1}{\sqrt{\mu_o\epsilon_o}}$; con lo que las ecuaciones (2.17) se escriben como

$$\Box\,\Phi=\frac{\rho}{\epsilon_o} \quad ; \quad \Box\,\mathbf{A}=\mu_o\,\mathbf{j} \quad .$$

2.2. Ecuaciones de Maxwell en forma integral: Leyes fundamentales del electromagnetismo

Para poder interpretar el significado físico de las ecuaciones de Maxwell es conveniente expresarlas en forma integral. Ello permite, además, recuperar las leyes fundamentales del electromagnetismo a partir de las ecuaciones de Maxwell. Para ello se utilizan los teoremas clásicos del Análisis Vectorial: *del rotacional o de Stokes* y *de la divergencia o de Gauss-Ostrogradskii.*

2.2.1. Ley de Gauss de la electrostática. Ley de Coulomb

Así, para el primer par de ecuaciones de Maxwell se tiene:

Teorema 8 (Ley de Gauss de la electrostática)*: Si $V\subset\mathbb{R}^3$ es una región compacta en la que hay una distribución de carga eléctrica de densidad ρ (y carga total Q) y cuyo borde $S=\partial V$ es una superficie regular (a trozos), entonces la primera ecuación de Maxwell (2.2) es equivalente a*

$$\int_S\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}=\frac{Q}{\epsilon_o} \ , \tag{2.18}$$

Es decir, el flujo del campo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga eléctrica total encerrada por dicha superficie.

(*Dem.*): Partiendo de la ecuación (2.2), se toma una superficie regular (a trozos) cualquiera que encierra un volumen V que contenga la distribución de carga de densidad ρ. Integrando

[15] En honor al físico danés *Ludvig Lorenz* (1829–1891).

ambos miembros de la ecuación en V, el miembro de la derecha permite obtener la carga total Q presente,

$$\int_V \frac{\rho}{\epsilon_o}\, dV = \frac{Q}{\epsilon_o} \ , \tag{2.19}$$

mientras que en el de la izquierda, la utilización del *teorema de la divergencia de Gauss-Ostrogradskii* da como resultado el *flujo del campo eléctrico* o *flujo electrostático* que atraviesa la superficie S,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{E}\, dV = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \ ,$$

e igualando ambas expresiones se obtiene el resultado.

Recíprocamente, partiendo de la ecuación (2.18), utilizando de nuevo el teorema de Gauss-Ostrogradskii y teniendo en cuenta que la igualdad vale para cualquier superficie cerrada S (y, por tanto, para cualquier región V) que contenga la distribución de carga, se recupera la primera ecuación de Maxwell en forma diferencial. ■

El flujo del campo eléctrico, $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ es una medida de la "cantidad de líneas de corriente del campo electrico" que atraviesan la superficie (por analogía con el "flujo" en mecánica de fluidos). La ecuación (2.18) significa que las cargas eléctricas originan a campos eléctricos [16].

Como en el caso de la gravitación, se puede considerar ahora el caso particular de una distribución de carga estática y esféricamente simétrica, de densidad ρ (de signo constante), radio R y carga total Q. En ambos casos, si en la ecuación de la ley de Gauss (2.18) se toma una región esférica V, de radio r, que contenga la distribución de carga ($r > R$) y sea concéntrica con ella, teniendo en cuenta la simetría esférica del problema, resulta que el campo eléctrico es $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r)\mathbf{u}_r$, donde $E(r) = \|\mathbf{E}(\mathbf{r})\|$ y $\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$ es el vector unitario radial. Entonces en el miembro de la izquierda de la ecuación (2.18) se obtiene que

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_S E(r)\, \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{u}_r\, ds = \int_S E(r)\, ds = E(r)\, 4\pi r^2 \ ,$$

de donde se llega a que

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{r^2} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{r^2}\, \mathbf{u}_r \ . \tag{2.20}$$

Finalmente, si se sitúa una carga puntual q en reposo en un punto a distancia r del centro; al no haber campo magnético, de la ecuación de la fuerza de Lorentz (2.6) se obtiene

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}\, q = K\, \frac{Qq}{r^2}\, \mathbf{u}_r \ , \tag{2.21}$$

donde $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}$ es la *constante de Coulomb*.

Comentario 9 Las ecuaciones (2.20) y (2.21) corresponden también al campo y fuerza electrostática creados por una partícula puntual con carga Q. De este modo se ha probado que el campo y la fuerza electrostática generados por una distribución esférica, estática y uniforme de carga es la misma que crearía una partícula puntual situada en el centro de la esfera y que tuviera la misma carga total.

[16] Por convenio, se toman positivas las cargas de donde "sale" el campo (las "fuentes"), y negativas las cargas donde "entran las líneas de campo ("sumideros").

De este modo se ha obtenido que:

Proposición 6 *Para distribuciones estáticas de cargas eléctricas, la ley de Coulomb es una consecuencia de la ley de Gauss del campo eléctrico* (2.18) *(o, equivalentemente, de la primera ecuación de Maxwell* (2.2)*) y de la ecuación de la fuerza de Lorentz* (2.6)*.*

Comentario 10 Obsérvese que en este caso en que no hay campos magnéticos ni cargas en movimiento (es, por tanto, un problema de *electrostática*), de acuerdo con (2.9), el campo eléctrico es conservativo y un potencial escalar es (salvo constantes aditivas)

$$\Phi = K\,\frac{Q}{r}\ .$$

Como consecuencia, la fuerza eléctrica (2.21) es también conservativa y un potencial escalar es (salvo constantes aditivas)

$$U_e = K\,q\,\frac{Q}{r}\ ;$$

que es la ***energía potencial electrostática*** de la partícula de carga q en el campo eléctrico $\mathbf{E}$.

2.2.2. Ley de Gauss del magnetismo

Teorema 9 (Ley de Gauss del magnetismo)*: Si $V \subset \mathbb{R}^3$ es una región compacta en la que hay un campo magnético B, y cuyo borde $S = \partial V$ es una superficie regular (a trozos), entonces la segunda ecuación de Maxwell (2.3) es equivalente a*

$$\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0\ . \tag{2.22}$$

Es decir, el flujo del campo magnético que atraviesa cualquier superficie cerrada es nulo.

(*Dem.*): La demostración es totalmente análoga a la del Teor. 8. ■

Este resultado expresa que no hay ni ”fuentes”ni ”sumideros”del campo magnético en ninguna región cerrada del espacio o, lo que es lo mismo, que no existen “cargas magnéticas”, esto es, *monopolos magnéticos*.

2.2.3. Ley de Faraday-Henry-Lenz

Teorema 10 (Ley de Faraday-Henry-Lenz)*: Si S es una superficie estacionaria regular (a trozos) cuyo contorno $C = \partial S$ es una curva simple regular (a trozos) y $\mathbf{B}$ es un campo magnético variable en el tiempo entonces la tercera ecuación de Maxwell (2.4) es equivalente a*

$$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} \quad . \tag{2.23}$$

Es decir, la circulación del campo eléctrico inducido por un campo magnético (no estacionario) a lo largo de cualquier circuito cerrado es proporcional a la variación del flujo del campo magnético que atraviesa cualquier superficie bordeada por el circuito.

(*Dem.*): Si la superficie S es estacionaria, la variación del flujo del campo magnético $\mathbf{B}$ que atraviesa la superficie S es

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}) = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s}\ .$$

Utilizando ahora la tercera ecuación de Maxwell (2.4) y el *teorema de Stokes del rotacional* se llega a que

$$-\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla\times\mathbf{E})\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}\ .$$

Recíprocamente, partiendo de la ecuación (2.23), que es válida para cualquier superficie S de esas características analíticas, invirtiendo el razonamiento se recupera la ecuación (2.4). ■

Definición 8 *La circulación de un campo eléctrico* $\mathbf{E}$ *a lo largo de un circuito eléctrico* C *se denomina* ***fuerza electromotriz*** *generada por el campo:*

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$$

La interpretación de esta ley es que toda variación de un campo magnético origina un campo eléctrico y, si hay cargas libres (por ejemplo, en un circuito), dicho campo eléctrico provoca desplazamiento de estas cargas y se produce una corriente eléctrica (una fuerza electromotriz) en el circuito. El signo negativo indica que el sentido de la corriente inducida es tal que el flujo del campo eléctrico se opone a la causa que lo produce, compensando así la variación de flujo magnético (*Ley de Lenz*). Esta ecuación relaciona, pues, los campos eléctrico y magnético, y tiene como aplicaciones prácticas los motores y generadores eléctricos, entre otras.

Obsérvese que la primera y tercera ecuaciones de Maxwell (leyes de Gauss de la electrostática y de Faraday-Henry-Lenz) expresan que los campos eléctricos tienen su origen, bien en la presencia de cargas eléctricas, o bien en la existencia de campos magnéticos no estacionarios.

Obsérvese que como consecuencia de la ley de Faraday-Henry-Lenz se tiene que, en presencia de campos magnéticos variables, el campo eléctrico no es irrotacional.

Comentario 11 La tercera ecuación de Maxwell expresada en forma integral, (2.23), se puede aplicar también al caso en que la superficie S no sea estacionaria; esto es, varíe su forma con el tiempo.

2.2.4. Ley de Ampère-Maxwell

Teorema 11 (Ley de Ampère-Maxwell)*: Si* S *es una superficie regular (a trozos) cuyo contorno* $C=\partial S$ *es una curva simple regular (a trozos),* $\mathbf{j}$ *es una densidad superficial de corriente eléctrica y* $\mathbf{E}$ *es un campo eléctrico variable en el tiempo, entonces la cuarta ecuación de Maxwell (2.5) es equivalente a*

$$\oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_o\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s} + \mu_o\epsilon_o\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} \quad . \tag{2.24}$$

Es decir, la circulación a lo largo de un circuito (cerrado) del campo magnético inducido por una corriente eléctrica y/o un campo eléctrico no estacionario es proporcional al flujo de la densidad de corriente y a la variación del flujo del campo magnético a través de cualquier superficie bordeada por el circuito.

(*Dem.*): El flujo de corriente que atraviesa la superficie S es $\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s}$. Por otra parte, si la superficie S es estacionaria, la variación del flujo del campo $\mathbf{E}$ que atraviesa la superficie S es

$$\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_S \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}) = \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot d\mathbf{s}\ .$$

Utilizando ahora la cuarta ecuación de Maxwell en su forma (2.5) y el *teorema de Stokes del rotacional* se llega a que

$$\mu_o\int_S \mathbf{j}\cdot d\mathbf{s} + \mu_o\epsilon_o\frac{d}{dt}\int_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \int_S\left(\mu_o\mathbf{j}+\mu_o\epsilon_o\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot d\mathbf{s} = \int_S(\nabla\times\mathbf{B})\cdot d\mathbf{s} = \oint_C \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}\ .$$

Recíprocamente, partiendo de la ecuación (2.24), que es válida para cualquier superficie S de esas características analíticas, invirtiendo el razonamiento se recupera la ecuación (2.5). ■

La interpretación de esta ley es que todo campo magnético es originado, o bien por una corriente eléctrica (*Ley de Ampère*), o bien por un campo eléctrico no estacionario (*Ley de Maxwell*).

Definición 9 *La magnitud* $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ *se denomina* ***corriente de desplazamiento*** *generada por el campo* $\mathbf{E}$.

Comentario 12 La cuarta ecuación de Maxwell expresada en forma integral, (2.24), se puede aplicar también al caso en que la superficie S no sea estacionaria.

2.3. Ondas electromagnéticas

2.3.1. Ecuación de las ondas electromagnéticas

La existencia de *ondas electromagnéticas* que se propagan en el vacío a la velocidad de la luz c, sin presencia de cargas y corrientes, es una de la más importantes consecuencias de las ecuaciones de Maxwell.

Teniendo en cuenta los desarrollos de las secciones precedentes, hay dos maneras de llegar a este resultado. La primera es considerando las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial clásica, cuando no hay cargas ni corrientes eléctricas; es decir:

$$\begin{array}{rclcrcl} \nabla\cdot\mathbf{E} &=& 0 &,& \nabla\times\mathbf{E} &=& -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\mathbf{B} &=& 0 &,& \nabla\times\mathbf{B} &=& \mu_o\epsilon_o\dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \quad . \tag{2.25}$$

Tomando las ecuaciones de Maxwell de los rotacionales, si se calcula el rotacional en ambos miembros se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) &=& -\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{B}) = -\mu_o\epsilon_o\dfrac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla\times(\nabla\times\mathbf{B}) &=& \mu_o\epsilon_o\dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{E}) = -\mu_o\epsilon_o\dfrac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} \end{array} \quad .$$

Utilizando la relación entre operadores diferenciales (2.13) y teniendo en cuenta las ecuaciones de las divergencias, se llega a

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{E} = 0 \quad ; \quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{B} = 0 \quad , \tag{2.26}$$

donde se ha hecho $c = \dfrac{1}{\sqrt{\mu_o\epsilon_o}}$. Las ecuaciones (2.26) son las *ecuaciones de las ondas electromagnéticas en ausencia de cargas y corrientes* en el vacío.

Estas son sendas ecuaciones de ondas para los campos eléctrico $\mathbf{E}$ y magnético $\mathbf{B}$ que se satisfacen simultáneamente. Obsérvese que cada una de estas ecuaciones vectoriales descompone en tres ecuaciones escalares de ondas: una para cada una de las componentes del campo eléctrico y del magnético.

Estas ecuaciones se pueden expresar alternativamente en función de los potenciales electromagnéticos y se tiene que:

Proposición 7 *Utilizando los potenciales electromagnéticos Φ y $\mathbf{A}$ fijados por el gauge de Lorenz, las ecuaciones de las ondas electromagnéticas en el vacío (2.26) se expresan como*

$$\Box\,\Phi \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \nabla^2\Phi = 0 \quad ; \quad \Box\,\mathbf{A} \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{A} = 0 \ .$$

También reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell homogéneas.

(*Dem.*): Se obtienen directamente de las ecuaciones (2.17) haciendo $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$. ■

Al tratarse de ecuaciones de ondas, la interpretación física de sus soluciones es clara: son campos eléctricos y magnéticos que se transmiten en forma de ondas a la velocidad c, en el vacío. Estos campos son perpendiculares en cada punto y, además, son perpendiculares a la dirección de propagación. Todo ésto se justificará en la siguiente sección.

Comentario 13 Las ecuaciones (2.17) se pueden considerar, también, como *ecuaciones de las ondas electromagnéticas en presencia de cargas y corrientes* en el vacío. También reciben el nombre de *ecuaciones de Maxwell no homogéneas.*

2.3.2. Ondas planas

Como caso particular para entender mejor la ecuación de ondas electromagnéticas vamos a considerar la situación en la que los campos dependen únicamente de una coordenada espacial (p. ej., x) y del tiempo; es decir, las componentes de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ o los potenciales electromagnéticos sólo dependen de estas variables [17]. En este caso, la ecuación de ondas para cada una de estas componentes es la ecuación de ondas unidimensional

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \ , \tag{2.27}$$

donde $\psi(x,t)$ representa cualquiera de las componentes de los campos $\mathbf{E}$ o $\mathbf{B}$, o de los potenciales. Entonces:

[17] Es en este sentido por lo que se habla de 'ondas planas' (al depender sólo de dos variables).

Proposición 8 *La solución general de la ecuación* (2.27) *es de la forma*

$$\psi(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct) \ .$$

(*Dem.*): Considérese el cambio de variables

$$u = x - ct \quad , \quad v = x + ct \tag{2.28}$$

y sea $\tilde{\psi}(u,v)$ la expresión de la función ψ en estas nuevas variables; es decir, se tiene que $\psi(x,t) = \tilde{\psi}(u(x,t), v(x,t))$. Utilizando la regla de la cadena se tiene que

$$0 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -4\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial u\partial v} = -4\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial v}$$

de donde $\dfrac{\partial\tilde{\psi}}{\partial v} = \tilde{h}(v)$, siendo $\tilde{h}(v)$ una función arbitraria que, a su vez, se puede expresar como $\tilde{h}(v) = \dfrac{d\tilde{g}(v)}{dv}$ para alguna función $\tilde{g}(v)$ también arbitraria (esto es, una primitiva de $\tilde{h}(v)$). Por tanto se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial v}(\tilde{\psi}(u,v) - \tilde{g}(v)) = 0 \iff \tilde{\psi}(u,v) - \tilde{g}(v) = \tilde{f}(u) \ ,$$

y de aquí, deshaciendo el cambio de variable y poniendo $f(x,t) = \tilde{f}(u(x,t))$ y $g(x,t) = \tilde{g}(v(x,t))$ se obtiene el resultado. ∎

Supóngase que $g = 0$, con lo que $\psi(x,t) = f(x-ct)$. Es evidente que el campo ψ toma el mismo valor en todos los puntos (x,t) tales que $x = ct + x_o$, para cualquier x_o. Ésto significa que si ψ toma un valor en un punto cualquiera x_o (en $t_o = 0$), al cabo de un tiempo t toma ese mismo valor en el punto que está a distancia ct del anterior. Se puede afirmar, por tanto, que los valores del campo se propagan a velocidad c en el sentido positivo del eje x y, de este modo, $\psi(x,t) = f(x-ct)$ representa una onda que se transmite en el sentido positivo de dicho eje, con velocidad c. Del mismo modo se concluye que $\psi(x,t) = g(x+ct)$ representa una onda que se transmite en el sentido negativo del eje x, con velocidad c.

Comentario 14 Un caso especialmente interesante es cuando f o g son funciones trigonométricas; es decir, se tiene que

$$\psi(x,t) = A\,\cos(k(x \pm ct) + \delta) = A\,\cos(kx \pm \omega t) + \delta)$$

y se denominan *ondas armónicas*. Para x fijo se tiene una función periódica en t de periodo $T = 2\pi/\omega$ y frecuencia ω. Para t fijo, la funcin es periódica en x con longitud de onda $\lambda = 2\pi/|k|$.

Proposición 9 *Los campos eléctrico* $\mathbf{E}$ *y magnético* $\mathbf{B}$ *son perpendiculares entre si y perpendiculares a la dirección de propagación.*

(*Dem.*): Se comentó en la sección 2.1.5 que los potenciales electromagnéticos se podán elegir de forma que $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ (gauge de Coulomb). En el caso de las ondas electromagnéticas en el vacío (sin cargas ni corrientes), la ecuación (2.11) quedaría $\nabla^2\Phi = 0$ y se podría completar la fijación del gauge de Coulomb añadiendo también la condición $\Phi = 0$ [18]. Haciéndolo así, en este caso en que las funciones de onda sólo dependen de (x,t), la primera condición es simplemente

[18] Estas condiciones de Coulomb no son invariantes por cambios de sistemas de referencia, en general; mientras que la de Lorenz lo es siempre.

$\dfrac{\partial A_x}{\partial x} = 0$; con lo que la ecuación de ondas (2.27) para esta componente es $\dfrac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = 0$; es decir, $\dfrac{\partial A_x}{\partial t} = cte$. Pero, de acuerdo con (2.9), $E_x = -\dfrac{\partial A_x}{\partial t}$; lo que significa que, si $A_x \neq 0$, se tiene un campo eléctrico constante en la dirección del eje x; pero esta solución se descarta ya que no se trataría de ninguna onda.

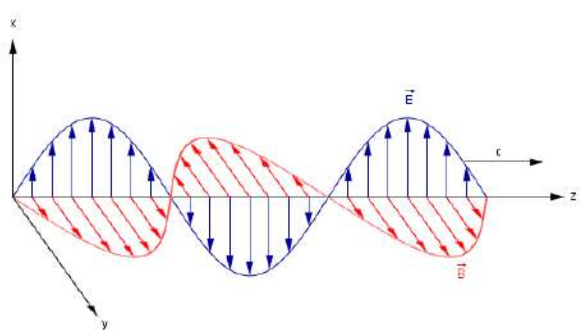
Así pués, en el caso general, se puede asumir que $A_x = 0$ y el potencial vector será $\mathbf{A} = (0, A_y(t,x), A_z(t,x))$; es decir, perpendicular a la dirección de propagación y, por consiguiente, el campo magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \left(0, -\dfrac{\partial A_z}{\partial x}, \dfrac{\partial A_y}{\partial x}\right)$ también lo es. Lo mismo sucede con el campo eléctrico que, en virtud de (2.9), es $\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \left(0, -\dfrac{\partial A_y}{\partial t}, -\dfrac{\partial A_z}{\partial t}\right)$. En este sentido se dice que las ondas electromagnéticas son *transversales*.

Para finalizar, considérese el caso de una onda desplazándose en el sentido positivo del eje x; es decir, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x - ct)$ (el análisis para el otro caso es idéntico). Haciendo de nuevo el cambio de variable (2.28), si $\tilde{\mathbf{A}}(u)$ es la función transformada de $\mathbf{A}$, aplicando la regla de la cadena se tiene que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = c\frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{du} = c\left(0, \frac{d\tilde{A}_y}{du}, \frac{d\tilde{A}_z}{du}\right) \quad , \\
\mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \left(0, -\frac{d\tilde{A}_z}{du}, \frac{d\tilde{A}_y}{du}\right) = (1,0,0) \times \left(0, \frac{d\tilde{A}_y}{du}, \frac{d\tilde{A}_z}{du}\right) = \mathbf{n}_x \times \frac{d\tilde{\mathbf{A}}}{du} = \frac{1}{c}\,\mathbf{n}_x \times \mathbf{E} \ ,
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{n}_x$ es el vector unitario en la dirección (y sentido) de propagación. De la última igualdad se concluye que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares entre si en todo instante. ∎

Aunque estos resultados se han obtenido para las ondas planas, son generalizables al caso general; es decir, en cualquier onda electromagnética los campos eléctrico y magnético son perpendiculares en cada punto y, además, son perpendiculares a la dirección de propagación.



En particular, para una onda armónica tridimensional se tendría que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = A\,\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \pm \omega t) + \delta)$$

donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Esta solución son ondas propagándose en la dirección $\mathbf{k}$ con velocidad c.

2.4. Propiedades de los campos electromagnéticos

2.4.1. Ecuación de continuidad (ley de conservación de la carga)

A partir de las leyes del electromagnetismo dadas por las ecuaciones de Maxwell se pueden deducir otras propiedades fundamentales. Una de ellas está establecida en el siguiente teorema:

Teorema 12 (Ley de conservación de la carga). *La carga eléctrica satisface la siguiente* ecuación de continuidad*:*

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\int_{S=\partial V} \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \ .$$

(es decir, la variación temporal de la carga eléctrica Q en una región $V \subset \mathbb{R}^3$ es el flujo de la densidad superficial de corriente que atraviesa la superficie $S = \partial V$).

(*Dem.*): La variación temporal que experimenta una distribución de carga Q en una región $V \subset \mathbb{R}^3$ es, por definición, la intensidad de corriente que atraviesa la superficie $S = \partial V$, que delimita la región (esto es, la cantidad de cargas que, por unidad de tiempo, salen o entran en esa región). De acuerdo con la expresión (2.19), esa variación es

$$I := \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \ .$$

Esta intensidad, a su vez, se obtiene integrando en toda la superficie $S = \partial V$ la densidad superficial de corriente (es decir, la cantidad de carga que atraviesa en la unidad de tiempo un elemento de superficie $d\mathbf{s}$), con lo que se obtiene

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV = -\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{s} \ ;$$

donde el signo negativo se debe a que la primera integral es positiva cuando la carga dentro de V aumenta; mientras que la integral de superficie mide la carga que sale de la región. ■

Corolario 1 *La ecuación de continuidad se expresa en forma diferencial como*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ .$$

(*Dem.*): Basta aplicar a la integral de superficie el teorema de Gauss–Ostrogradskii. ■

Esta ley de conservación está asociada a una simetría de la teoría que no es otra que la *invariancia gauge* comentada en la sección 2.1.5.

2.4.2. Densidad y flujo de energía. Vector de Poynting

Un primer resultado que se obtiene directamente de la ecuación de la fuerza de Lorentz es: el siguiente:

Proposición 10 *La variación de la energía cinética de una partícula cargada sometida a la acción de campos eléctricos y magnéticos (esto es, el trabajo realizado por los campos eléctricos y magnéticos sobre la partícula, por unidad de tiempo) es*

$$\frac{dK}{dt} = q \, \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} \ . \tag{2.29}$$

(*Dem.*): Se parte de la ecuación (2.7) escrita en la forma

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \ ,$$

donde $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ denota el momento lineal de la partícula. Entonces, teniendo en cuenta que $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = \frac{1}{2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{v}$ y que $\mathbf{v}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{v} = 0$, es inmediato obtener que

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot\mathbf{v} = q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} \ ,$$

$\blacksquare$

Se observa que la única aportación la da el campo eléctrico y el campo magnético no da contribución, ya que la fuerza producida por éste es perpendicular a la velocidad y, por tanto, al desplazamiento de la partícula.

Otra característica fundamental del electromagnetismo es cómo los campos electromagnéticos (y, por tanto, las ondas electromagnéticas) transportan energía. Para estudiar este fenómeno se parte de las dos ecuaciones de Maxwell de los rotacionales (2.4) y (2.5); de modo que, si se multiplican escalarmente por $\mathbf{B}$ y $\mathbf{E}$ respectivamente, se obtiene

$$\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) = -\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) = \mu_o\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + \mu_o\epsilon_o\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

y dividiendo ambas por μ_o, sumando y reagrupando términos queda

$$\epsilon_o\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_o}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} - \frac{1}{\mu_o}(\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{E}) - \mathbf{E}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} - \nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\frac{1}{\mu_o}\,\mathbf{B}\right)$$

donde se ha usado la propiedad $\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$. Finalmente, operando en el miembro de la izquierda

$$\epsilon_o\,\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_o}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_o\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{\mu_o}\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_o\,E^2 + \frac{1}{\mu_o}\,B^2\right)$$

con lo que se llega a la ecuación

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_o\,E^2 + \frac{1}{\mu_o}\,B^2\right) = -\mathbf{E}\cdot\mathbf{j} - \nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\frac{1}{\mu_o}\,\mathbf{B}\right) \ . \qquad (2.30)$$

Definición 10 *La magnitud* $\frac{1}{2}\left(\epsilon_o\,E^2 + \frac{1}{\mu_o}\,B^2\right)$ *tiene unidades de densidad de energía y se denomina* ***densidad de energía electromagnética****. En ella,* $\frac{1}{2}\epsilon_o\,E^2$ *es la* ***densidad de energía electrostática*** *y* $\frac{1}{2}\frac{1}{\mu_o}\,B^2$ *es la* ***densidad de energía magnetostática****.*

La magnitud $\mathbf{S} := \mathbf{E}\times\frac{1}{\mu_o}\mathbf{B}$ *se denomina* ***vector de Poynting*** [19].

La ecuación (2.30) *es la* ***ecuación del flujo de energía****.*

Comentario 15 Obsérvese que el vector de Poynting, en cada punto, es perpendicular al plano que contiene a los campos eléctrico y magnético; por tanto, en una onda electromagnética tiene la dirección de propagación de la onda y el sentido de su avance.

[19] En honor al físico inglés *John Henry Poynting* (1852–1914).

Para interpretar físicamente el vector del Poynting, considérese una región $V \subset \mathbb{R}^3$ (que satisfaga las hipótesis del *teorema de Gauss-Ostrogradskii*). Integrando ambos miembros de la ecuación del flujo de energía (2.30) en V y aplicando dicho teorema al último sumando del segundo miembro, resulta

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\epsilon_o E^2 + \frac{1}{\mu_o} B^2\right) dV + \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\, dV = -\int_{S=\partial V} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s} \ . \tag{2.31}$$

La integral en el miembro de la derecha es el flujo del vector de Poynting a través de la superficie $S = \partial V$. En el miembro de la izquierda, la primera integral es la energía total del campo electromagnético en la región V; con lo que el primer sumando es la variación temporal de la energía electromagnética en esa región. Para la segunda integral, observar que, si ρ es la densidad de carga de las partículas cargadas que originan el campo electromagnético, $\rho\mathbf{v}$ es una magnitud que se identifica de manera natural con la densidad de corriente $\mathbf{j}$ [20]; entonces, teniendo en cuenta la igualdad (2.29), se puede expresar

$$\int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}\, dV = \int_V \rho\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\, dV = \int_V \frac{d\mathcal{K}}{dt}\, dV = \frac{d}{dt}\int_V \mathcal{K}\, dV = \frac{dK}{dt} \ ,$$

donde $\mathcal{K}$ denota la densidad de energía cinética de las partículas de la distribución; con lo que la segunda integral representa la variación temporal de la energía de las partículas cargadas que forman la distribución de corriente de densidad $\mathbf{j}$ en la región V (y, en el caso en que V no contenga dicha distribución, como sucede por ejemplo con las ondas electromagnéticas, esta contribución es nula). De esta manera, el miembro de la izquierda de (2.31) y, en consecuencia, $\displaystyle\int_{S=\partial V} \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s}$, da la medida del flujo total de energía que atraviesa la superficie $S = \partial V$ (la propia del campo electromagnético y la de las partículas que componen la corriente eléctrica), por lo que el vector de Poynting $\mathbf{S}$ no es más que la densidad de ese flujo; es decir, *su módulo es la cantidad total de energía electromagnética por unidad de tiempo que fluye a través de la unidad de superficie perpendicular al plano que contiene a los campos eléctrico y magnético.*

2.4.3. Radiación de una partícula cargada acelerada. Fórmula de Larmor

Otro de los fenómenos relevantes en electromagnetismo es que toda carga en movimiento acelerado emite energía (e impulso). Esta energía se irradia en forma de radiación electromagnética; pués como ya se ha visto, los campos electromagnéticos y, en particular, las ondas electromagnéticas transportan energía. Este fenómeno fué estudiado y descrito por el físico y matemático irlandés *Joseph Larmor* (1857–1942), en 1897. El resultado es el siguiente:

Proposición 11 *Cualquier partícula con carga eléctrica q que se mueve con aceleración* a *irradia energía en forma de ondas electromagnéticas. La potencia total radiada está dada por*

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{q^2 \mathrm{a}^2}{6\pi\epsilon_o c^3}$$

que se denomina ***fórmula de Larmor*** [21].

(*Dem.*): Ver [2], pags. 468–469. ■

Obsérvese que esto significa que las órbitas de una partícula cargada sometidas a un campo central (como, por ejemplo, el campo eléctrico generado por una carga) no son estables.

[20] Basta hacer un análisis dimensional de ambas magnitudes.

[21] Esta expresión es válida en el rango de pequeñas velocidades (comparadas con la velocidad de la luz. Su generalización relativista; es decir, para altas velocidades, puede consultarse en [2], pags. 469–472.

2.4.4. Invariantes del campo electromagnético

A partir de los campos eléctricos y magnéticos se pueden obtener magnitudes (escalares) que son invariantes. Así, se puede probar que:

Proposición 12 *Para los campos electromagnéticos* **E** *y* **B** *se satisface que*

$$B^2 - E^2 = cte. \quad , \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = cte. \; .$$

donde $E = |\mathbf{B}|$ *y* $B = |\mathbf{B}|$. *Por tanto, estas magnitudes son invariantes en todos los sistemas inerciales* [22].

(*Dem.*): Ver, p. ej., [2]. ■

Consecuencias obvias de este resultado son las siguientes:

- Si en un sistema de referencia inercial los campos eléctrico y magnético son iguales en magnitud, $E^2 = B^2$, entonces esto pasa en cualquier otro sistema.
- Si $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ en algún sistema de referencia inercial, entonces los campos eléctrico y magnético son ortogonales en todos los sistemas de referencia inerciales.

  En general, el ángulo que forman **E** y **B** es el mismo en todos los sistemas de referencia.
- Si $\mathbf{E} = 0$ o $\mathbf{B} = 0$ en algún sistema de referencia, entonces ambos campos son perpendiculares en cualquier otro sistema.

2.4.5. No invariancia galileana del electromagnetismo

La teoría clásica del electromagnetismo es incompatible con la mecánica newtoniana. Esto quiere decir que las ecuaciones de Maxwell y la ecuación de la fuerza de Lorentz no son invariantes por las transformaciones de Galileo y, por tanto, no son válidas en todos los sistemas inerciales. En particular y como consecuencia de ésto, la ecuación de las ondas electromagnéticas no es invariante por el grupo de Galileo [23]. Esta no invariancia se puede comprobar por cálculo directo aunque también se pone de manifiesto a partir de algunas reflexiones simples:

- En lo que respecta a los campos eléctrico y magnético, si un observador inercial percibe un campo eléctrico (o magnético) estacionario no uniforme, para otro observador en movimiento respecto a aquél este campo no es estacionario y, por tanto, como consecuencia de las ecuaciones de Maxwell, percibe también un campo magnético (o eléctrico). Por ejemplo, si es el campo eléctrico de una carga eléctrica en reposo, entonces el campo magnético es el inducido por la corriente eléctrica producida por el movimiento de dicha carga en el segundo sistema de referencia. Análogamente, un campo magnético estacionario no uniforme en un sistema de referencia no es estacionario en otro sistema que se mueva respecto al anterior, y aparece también un campo eléctrico.

[22] Es decir, son invariantes por las transformaciones del *Grupo de Galileo (ortocrono)* (ver sección 1.1.2). Realmente son invariantes por el *Grupo de Poincaré (ortocrono propio)*, que es el grupo de transformaciones entre sistemas inerciales de la *Relatividad Especial* y contiene al de Galileo.

[23] Al transformarla aparecen derivadas mixtas espacio temporales (ver problema 13).

- Según la mecánica ondulatoria clásica, la velocidad de la luz y de las ondas electromagnéticas en general no sería independiente del observador y, por tanto, dependería también del movimiento de la fuente. Ésto está en contradicción con el hecho de que su valor se obtiene a partir del de dos constantes físicas, $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_o \mu_o}}$, (a menos que el valor de dichas constantes dependa también del sistema de referencia, lo cuál es absurdo) [24].

El grupo de transformaciones que dejan invariante las ecuaciones del electromagnetismo es, por tanto, necesariamente más amplio. Dicho grupo es el *grupo de Lorentz* o el *grupo de Poincaré* (cuando se añaden las traslaciones espacio temporales), que aparecen de manera natural en la *teoría de la Relatividad Especial*. Cuando se analiza el electromagnetismo en el contexto de esta teoría hay que reformularlo introduciendo nuevas magnitudes tensoriales en $\mathbb{R}^4$ (espacio-tiempo): la ***cuadricorriente***, el ***cuadripotencial electromagnético*** y el ***campo tensorial electromagnético*** (o ***tensor electromagnético***). Utilizando estos elementos geométricos es posible reescribir las ecuaciones del electromagnetismo y hacer un estudio relativista de la teoría del campo electromagnético, en el que la invariancia por los mencionados grupos de transformaciones se hace manifiesta.

2.5. Apéndice: Definición de las unidades en electromagnetismo

Las unidades de las magnitudes que aparecen en la teoría clsica del electromagnetismo se definen a partir de sus leyes fundamentales. A continuación se repasan dichas definiciones.

Aunque originalmente se consideró la *carga eléctrica* como magnitud fundamental, modernamente se toma como fundamental la *corriente eléctrica*, se define la unidad correspondiente y, a partir de ella, las restantes. Entonces:

Definición 11 (Unidad de intensidad de corriente eléctrica). *Un **ampere** o **amperio** (denotado $1\,A$) [25] es la corriente eléctrica (constante) que circula a lo largo de dos conductores rectos paralelos de longitud infinita y sección circular despreciable, tales que, situados en el vacío a un metro de distancia, produce entre estos conductores una fuerza igual a $2 \cdot 10^{-7}\,N$ por metro de longitud.*

Definición 12 (Unidad de carga eléctrica). *Un **coulomb** o **culombio** (denotado $1\,C$) [26] es la carga eléctrica transportada en un segundo por una corriente de un amperio de intensidad de corriente eléctrica; es decir, $1\,C = 1\,A\,s$.*

Definición 13 (Unidad de inducción magnética). *Un **tesla** (denotado $1\,T$) [27] es la inducción de un campo magnético que ejerce una fuerza de $1\,N$ sobre una carga eléctrica de $1\,C$ que se mueve a velocidad de $1\,m/s$ dentro del campo magnético y perpendicularmente a sus líneas de campo.*

[24] Este hecho está también en contradicción con ciertas observaciones experimentales (*sistemas de estrellas binarias* y *experimento de Michelson-Morley*).

[25] En honor a *André Marie Ampère*.

[26] En honor a *Charles Agustin Coulomb*.

[27] En honor a *Nikola Tesla*.

Problemas y ejercicios

1. Razonar cómo deberían modificarse las ecuaciones de Maxwell para incluir la existencia de monopolos magnéticos.

2. Una partícula puntual de masa m y carga q se encuentra inmersa en un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$. La carga se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas.

   a) Suponiendo que la velocidad inicial de la partícula es nula; ¿Cuánto vale la fuerza magnética sobre ella y cómo es el movimiento posterior?

   b) ¿Y si la velocidad inicial es $\mathbf{v}_o = (0, 0, v_o)$?

   c) Supóngase ahora que velocidad inicial es $\mathbf{v} = (v_0, 0, 0)$.

      1) ¿Cuánto vale la fuerza sobre la carga en el instante inicial? ¿Y su aceleración? ¿Y las componentes intrínsecas de ésta?

      2) Cuánto vale la velocidad de la partícula en todo instante?

      3) Como consecuencia de la acción de la fuerza magnética, la carga describe un movimiento circular. ¿Cuánto vale el radio de la circunferencia?

3. Encontrar la trayectoria que sigue una partícula puntual de masa m y carga q en el seno de campos eléctricos y magnéticos constantes. (*Resolver el problema en unos ejes convenientes*).

4. En el semiespacio $y < a$ se tienen campos constantes $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ y $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, mientras que en el semiespacio $y > a$ los campos son $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{B} = (B, 0, 0)$. Considérese una partícula de masa m y carga e inicialmente en reposo en el origen de coordenadas. Determinar su movimiento para $t > 0$.

5. Sean cuatro cargas $+q$, $+q$, $-q$ y $-q$ situadas respectivamente en $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, -a, 0)$. Calcular el potencial eléctrico en un punto $(x, 0, 0)$ del eje X. Si hay una partícula de masa m y carga e inicialmente en reposo en $(l, 0, 0)$, calcular la fuerza que actúa sobre ella, determinar el signo de e para que la partícula se aleje y calcular con qué velocidad llegará al infinito. (*Suponer que* $l >> a$.).

6. Calcular, usando la ley de Gauss, el campo eléctrico creado en todo el espacio por una distribución superficial de carga σ uniforme sobre un plano indefinido.

   La misma pregunta para el campo creado por por dos planos paralelos indefinidos con distribuciones uniformes de carga de signos opuestos.

7. Calcular el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio, generado por una densidad de carga ρ uniforme entre dos superficies esféricas concéntricas de radios $R_1 < R$. Hacer el límite $R_1 \to R$ y obtener el potencial y el campo eléctrico creados por una superficie esférica con densidad superficial de carga σ uniforme.

8. Consideramos una densidad de carga ρ uniforme entre dos planos paralelos indefinidos, separados una distancia $2a$. Se hace un agujero que atraviesa la distribución de carga y se deja caer una partícula de masa m y carga q (de signo opuesto a σ) a través del agujero. ¿Cómo será el movimiento de la partícula? Hacer el mismo análisis para una esfera de radio R y un caparazón esférico de radio $R_1 < R$, atravesadas por un diámetro.

9. Calcular el potencial y el campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo infinito con una densidad lineal de carga uniforme λ.

10. Probar que los campos eléctrico y magnético satisfacen las ecuaciones

$$\Box\,\mathbf{B} = \mu_o \nabla \times \mathbf{j} \quad ; \quad \Box\,\mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon_o}\nabla\,\rho - \mu_o\,\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}\ .$$

11. En la solución general de la ecuación de ondas unidimensional $\psi(x,t) = f(x-ct)+g(x+ct)$, determinar f y g si se conocen $\psi(x,0) = \psi_o(x)$, y $\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,0) = \chi_o(x)$ (*condiciones de Cauchy*).

12. Demostrar que la función $\Psi(r,t) = \frac{1}{r}e^{i(kr-\omega t)}$, donde $\omega = ck$, es solución de la ecuación de ondas en tres dimensiones, $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} - \nabla^2\Psi = 0$.

13. *a*) Demostrar que el electromagnetismo no es invariante por las transformaciones de velocidad de Galileo ("boosts" galileanos).

    b) *(Examen 26/05/2020)*. Demostrar que la ecuación de ondas unidimensional

    $$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0$$

    es invariante por las transformaciones (*"boosts" de Lorentz*):

    $$\tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \quad , \quad \tilde{x} = \gamma\,(x - vt) \quad ; \quad \text{con } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\ .$$

14. *(Examen 08/06/2020)*. En una región del espacio hay un campo electromagnético del cuál se sabe que el campo magnético es $\mathbf{B} = (0, B_o z\cos\omega t, 0)$, con B_o, ω constantes, y que el campo eléctrico sólo tiene componente no nula en la dirección X.

    a) Usando la ecuación de Maxwell adecuada, obtener el campo eléctrico. (*Suponer que las condiciones de contorno en la región son tales que permiten tomar las funciones arbitrarias en la integración nulas*).

    b) Usando las ecuaciones de Maxwell adecuadas, obtener las densidades de corriente y de carga que originan este campo electromagnético.

    c) Comprobar que $\mathbf{A} = (0, 0, -B_o xz\cos\omega t)$ es un *potencial vector* para este campo electromagnético y obtener un *potencial escalar* Φ.

    d) Determinar el *vector de Poynting* y verificar que se satisface la *ecuación del flujo de energía*.

15. *(Examen 26/05/2020)*. Una onda plana monocromática en una región libre de fuentes tiene el campo eléctrico $\mathbf{E} = E_o\cos(\omega t - kz)\,\mathbf{u}_x$, siendo E_o, ω, k constantes positivas y $\mathbf{u}_x$ el vector unitario en el sentido positivo del eje X.

    a) Determinar el valor del campo magnético y comprobar que es una onda en fase con la del campo eléctrico, perpendicular a ésta y de amplitud E_o/c.

    (*Indicación*: Utilizar las *ecuaciones de Maxwell de los rotacionales*).

    b) Calcular las *densidades de energía eléctrica, magnética* y *electromagnética*, y el *vector de Poynting*.

    c) Hallar el promedio temporal de las densidades de energía anteriores, que se define como $\langle F\rangle := \frac{1}{T}\int_0^T F\,dt$, donde $T = \frac{2\pi}{\omega}$ es el periodo de la onda.

16. (Examen 16/07/2020) Dos ondas electromagnéticas son emitidas desde dos diferentes fuentes, de modo que sus campos eléctricos respectivos son

$$\mathbf{E}_1(x,t) = E_{10}\cos(kx-\omega t)\,\mathbf{u}_y \quad , \quad \mathbf{E}_2(x,t) = E_{20}\cos(kx-\omega t+\phi)\,\mathbf{u}_y \ .$$

a) Determinar el *vector de Poynting* de la onda electromagnética resultante de la superposición de ambas ondas.

b) Obtener un *potencial vectorial* $\mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z)$ tal que $A_x = 0$ y un *potencial escalar* Φ para la onda electromagnética resultante

Bibliografía

[1] R.P. Feynman: *Lectures on Physics* (2*nd* edition), Addison-Wesley, Reading Mass., 2005.

[2] J.D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (3*rd* edition). Wiley and Sons Inc., NY, 1998.

[3] L. Landau, E. Lifshitz: *Mecánica y Electrodinámica. Curso abreviado de Física Teórica* **1**, Mir, Moscu, 1971.

[4] K.R. Symon, *Mecánica*, Aguilar, Madrid, 1979.

[5] P.A. Tipler, *Física* (3^a ed.), Reverté, Barcelona, 1992.