

Materia ultrafría

por
Rosario Paredes

Este es un capítulo separado que integra el libro

Fronteras de la Física en el Siglo XXI

Octavio Miramontes y Karen Volke (Editores)

CopIt-arXives, 2013

México, D.F.

ISBN: 978-1-938128-03-5

©CopIt-arXives

<http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/TS0011ES/TS0011ES.html>

Índice general

Rosario Paredes	Materia ultrafría	1
1.	Introducción	1
2.	La Física Estadística de la Condensación de Bose	2
3.	Condensación de Bose-Einstein en un laboratorio	3
	Enfriamiento láser	4
	Enfriamiento por evaporación	5
4.	Gas degenerado de Fermi en un laboratorio	6
5.	Gases ultrafríos con interacción	7
6.	Átomos fríos: Un laboratorio cuántico	10
	Condensados de Bose en redes ópticas	11
	Cruce BEC-BCS en un gas de fermiones interactuantes	13
7.	El reto de una computadora cuántica	16
8.	Referencias	17

Materia ultrafría

Rosario Paredes, Instituto de Física, UNAM, México

1. Introducción

Comenzaremos discutiendo la noción de materia ultrafría. Se refiere a un conjunto macroscópico de átomos y/o moléculas en su fase líquida y/o gaseosa, que se rige por las leyes de la Mecánica Cuántica y la Física Estadística. Esto significa que su comportamiento es tal que exhibe las características propias de un fenómeno ondulatorio como los inherentes a la Mecánica Cuántica y que los átomos y/o moléculas, que de aquí en adelante denotaremos también como partículas, se distribuyen siguiendo la estadística de ser fermiones o bosones.

En apego a su capacidad de comportarse como onda, las partículas constituyentes de la materia ultrafría satisfacen el principio de de Broglie, que asocia una longitud de onda a cada partícula con momento p , $\lambda = \frac{h}{p}$. Dado que la manifestación de efectos cuánticos requiere que λ sea comparable con una distancia propia del sistema bajo estudio, es natural usar como referencia a la separación media entre partículas $n^{-1/3}$, así $h/p \geq n^{-1/3}$. Por otro lado el teorema de equipartición de energía establece que $p \approx (mk_B T)^{1/2}$. De aquí se desprende la relación entre temperatura y densidad de los sistemas macroscópicos que exhiben efectos cuánticos

$$k_B T \leq n^{2/3} \hbar^2 / m. \quad (1)$$

En lo concerniente a la Física Estadística las partículas ideales ocupan los estados cuánticos, denotados por p , de acuerdo a las distribuciones de Fermi-Dirac (F) y Bose-Einstein (B)

$$n_p^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} \pm 1}, \quad (2)$$

correspondiendo el signo + a los fermiones y el signo - a los bosones. Dichas relaciones funcionales hacen posible que el comportamiento colectivo de fermiones o bosones refleje que cada estado cuántico pueda estar ocupado en forma única o que un número arbitrario de partículas pueda ocupar el mismo estado cuántico respectivamente. La existencia del fenómeno de la condensación de Bose-Einstein es una consecuencia directa de la estadística que rige a las partículas bosónicas: A temperatura diferente de cero, una fracción

macroscópica de estas ocupa el estado base de una partícula. Esta fue la predicción que Albert Einstein hizo en 1925 después de adecuar, para partículas materiales, el trabajo que Satyendra Nath Bose realizó al contabilizar el número de formas de distribuirse que tienen los fotones como función de la energía. 70 años después de la predicción teórica, se consiguió por primera vez en un laboratorio, la obtención de un estado muy parecido al Condensado de Bose-Einstein. Posteriormente, y como resultado de ese primer logro, en 1999 se produjo también un gas degenerado de Fermi. Estos dos sistemas son los protagonistas de la materia ultrafría y actualmente se han convertido en lo que se denomina un laboratorio ideal para la realización de fenómenos de muchos cuerpos con comportamiento cuántico.

2. La Física Estadística de la Condensación de Bose

Como es bien sabido existen dos tipos de átomos en la naturaleza: fermiones y bosones. Los fermiones son aquellos que tienen espín total semi-entero, mientras que los bosones tienen espín total entero. Los primeros obedecen la estadística de Fermi-Dirac, basada en el principio de exclusión Pauli, que prohíbe que más de una partícula ocupe el mismo estado cuántico, en tanto que los segundos se rigen por la estadística de Bose, que no tiene ninguna restricción en la ocupación de un estado cuántico dado. Debido a que los átomos están formados por protones, neutrones y electrones, que son fermiones elementales con espín $s = 1/2$, un átomo resultará ser fermión o bosón si está compuesto por un número impar o par de fermiones elementales respectivamente.

De acuerdo a la Física Estadística, las propiedades termodinámicas de un gas ideal cuántico se determinan trabajando en el ensamble gran canónico a través de la función Gran Potencial

$$\Omega(V, T, \mu) = -k_B T \sum_p \ln \left(e^{(-\epsilon_p + \mu)/k_B T} - 1 \right), \quad (3)$$

donde queda explícita la dependencia con la temperatura T y el potencial químico μ , en tanto que la dependencia en el volumen V permite considerar la geometría y dimensionalidad del sistema particular. En el caso de partículas contenidas en una caja en 3 dimensiones por ejemplo, se encuentra que

$$\frac{N}{V} = \frac{g_{3/2}(\mu/k_B T)}{\lambda^3} \quad (4)$$

siendo $\lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$ y $g_{3/2}$ la función de Bose de 3/2 con argumento $\mu/k_B T$ [1]. Es importante enfatizar aquí que es precisamente el orden de esta función el que toma en cuenta el carácter geométrico y dimensional del potencial de confinamiento de los átomos. En particular, $n = 3/2$ es característico de una caja en tres dimensiones. En general, la transición a la condensación de Bose se hace evidente siguiendo el comportamiento de $g_n(\mu/k_B T)$. El potencial químico, que es siempre negativo para bosones, toma su valor

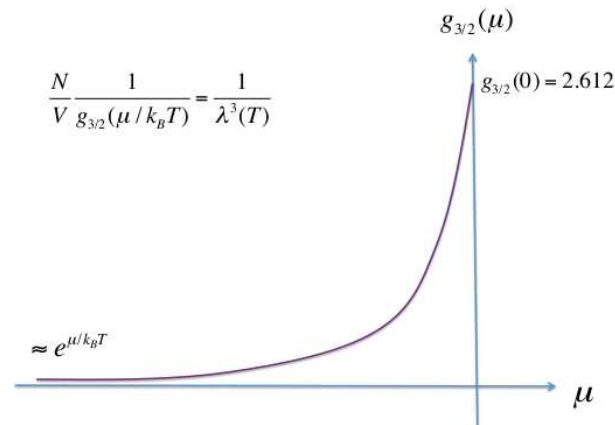


Figura 1: Se ilustra el comportamiento de la función de Bose $g_{3/2}$, como función del potencial químico μ .

máximo en $\mu = 0$ a $T \neq 0$. Particularmente, el caso de átomos confinados en una caja de volumen V permite, a través de la ecuación (4), llegar a la conclusión que la existencia de la condensación de Bose es consecuencia de que la función de Bose toma un valor finito cuando el potencial químico alcanza su valor máximo. En la figura (1) se ilustra la dependencia de $g_{3/2}$ como función de μ a una temperatura dada T . Se desprende de dicha figura la existencia de una temperatura crítica T_c a una densidad fija para la cual $\mu = 0$

$$\lambda^3(T_c) \frac{1}{g_{3/2}(0)} = \frac{N}{V}. \quad (5)$$

Es importante recalcar que la ecuación (4) es válida estrictamente para describir el número de partículas cuando $\mu \leq 0$. Dado que μ no puede tomar valores positivos, un decremento en la temperatura dará lugar a poblar macroscópicamente el estado base de una partícula. Por lo tanto se afirma que potencial químico es la variable que determina la ocurrencia de la transición a la fase condensada.

3. Condensación de Bose-Einstein en un laboratorio

La obtención del condensado de Bose en 1995 es resultado de los avances experimentales en el ámbito del enfriamiento [2, 3]. Dado que la existencia de un condensado ocurre a una densidad y temperatura específicas para un sistema particular, el gran logro consistió en enfriar a temperaturas del orden de 50 nK una muestra de átomos neutros, en su fase gaseosa, a una densidad de 10^{14} cm^{-3} . En particular, fueron el enfriamiento láser y el enfriamiento por evaporación las técnicas experimentales empleadas para obtener dichas condiciones en átomos alcalinos. Estas técnicas están basadas en el intercambio de energía

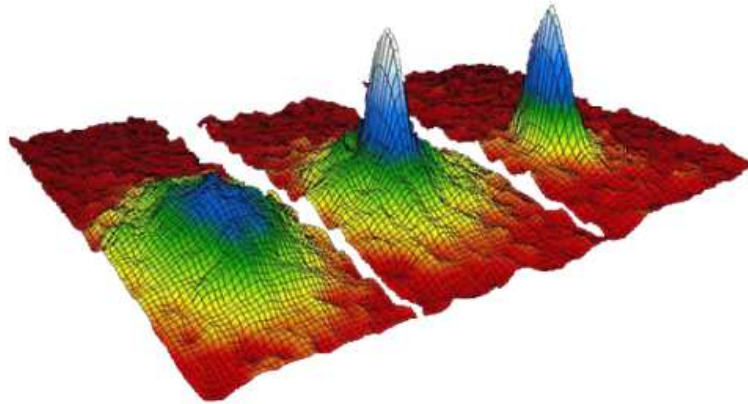


Figura 2: Se observa la distribución de velocidades de un gas de bosones durante la formación de un condensado. La figura izquierda corresponde a un gas a una temperatura mayor que la temperatura de condensación (T_c). La figura central es justo después de la aparición del condensado, y la figura derecha muestra un gas que tiene un menor número de átomos, pero el cual sigue en su fase condensada. La altura de los picos representa el número de átomos como función de la velocidad, siendo el pico más alto el que corresponde a los átomos con energía igual a cero.

debido a la interacción entre la materia y la radiación. Por medio del enfriamiento láser es posible alcanzar temperaturas del orden de $100 \mu\text{K}$, en tanto que el enfriamiento por evaporación permite que el gas llegue a temperaturas del orden de nK. En la siguiente sección se explica en forma concisa en qué consisten estas dos técnicas.

La realización de la condensación de Bose-Einstein en un laboratorio ocurrió por primera vez en 1995 en tres laboratorios en Estados Unidos, en Colorado, en Texas y en Massachusetts. En cada uno de ellos se obtuvieron una serie de imágenes de las nubes atómicas, a partir de las cuales es posible inferir el valor de la energía, la temperatura y el número de partículas en cada una de las etapas durante el proceso de formación del condensado. En la figura 2 se observa la distribución de velocidades de átomos de rubidio para diferentes temperaturas. Estas imágenes se obtuvieron utilizando el método de expansión, el cual consiste en permitir que la nube de gas se expanda libremente y que las posiciones de los átomos sean detectadas por medio de sensores ópticos. Dichas mediciones se traducen en el conocimiento de la densidad local.

Enfriamiento láser

Los átomos que se emplearon para obtener los primeros condensados fueron los alcalinos, debido a que se comportan como átomos hidrogenoides y poseen un momento dipolar magnético grande. Básicamente, el hecho que se comporten como átomos hidrogenoides significa que en su capa más externa tienen un solo electrón y es a través de

procesos de emisión y absorción de dicho electrón junto con su estructura hiperfina, que se consigue reducir la velocidad de los átomos en una distancia de 0.5 m de 570 m/s a 30 m/s. 570 m/s es la velocidad a la cual una nube conteniendo alrededor de 10^{10} átomos es producida en un dispositivo de ultra alto vacío evaporando átomos de una muestra sólida. La reducción en velocidad se consigue haciendo incidir fotones de energía ligeramente menor a la diferencia entre dos niveles hiperfinos del átomo. Estos serán absorbidos y emitidos gracias al efecto Doppler. Para conseguir este propósito es necesario tomar en cuenta el efecto Doppler que da lugar a que, desde el marco de referencia del átomo, éste perciba un corrimiento en la energía de los fotones incidentes sobre el mismo. Es por ello que la energía de los fotones incidentes debe ser adecuada o entonada para permitir que el proceso absorción-emisión tenga lugar. Si este requerimiento no se cumple la luz láser que incide sobre los átomos de la nube será transparente. De manera efectiva, la pérdida de energía o reducción en la velocidad de los átomos, es por absorción, debido a que cada átomo en un estado excitado emitirá instantáneamente un fotón en una dirección arbitraria. Es por esto que, en promedio, la pérdida de energía por emisión es cero, no así por el proceso controlado de absorción. Debido a que por cada fotón absorbido un átomo disminuye su velocidad en 3 cm/s se requieren aproximadamente 2×10^4 procesos de absorción para reducir la velocidad a 30 m/s. En la figura 3 se ilustra en forma esquemática uno de los ciclos completos del proceso de enfriamiento láser.

Enfriamiento por evaporación

Debido a que las temperaturas típicas que se consiguieron por medio del enfriamiento láser no fueron lo suficientemente bajas para llegar a la condensación de Bose, se implementó una técnica nueva en 1995 [2], y haciendo alusión a su fundamento de operación se le denominó enfriamiento por evaporación. Dicha técnica consiste en quitar selectivamente los átomos más energéticos del gas, y permitir que los átomos restantes alcancen el estado de equilibrio a través de colisiones, de tal forma que la temperatura final sea menor que la inicial antes de retirar los átomos más energéticos. En la práctica, la posibilidad de extraer selectivamente del gas los átomos más energéticos, se debe a que los átomos utilizados para producir los condensados de Bose-Einstein son altamente sensibles a la interacción con campos magnéticos por poseer un momento dipolar magnético alto. Los átomos neutros son confinados en un potencial magnético, que matemáticamente se describe a través de un oscilador armónico, quedando de esta forma bajo la influencia de desdoblamiento Zeeman y un potencial armónico dependiente de la posición. Aplicando un pulso de radio frecuencia con una energía igual a la asociada al máximo nivel del potencial armónico, se logra invertir el espín de dichos átomos. Los átomos en estas condiciones en lugar de estar sometidos a un potencial confinante debido al campo magnético quedan fuera de dicha influencia al invertir su espín. En la figura 4 se ilustra en forma esquemática el proceso de operación del enfriamiento por evaporación. En un laboratorio el proceso de enfriamiento por evaporación se lleva a cabo repetidamente, en lo que se

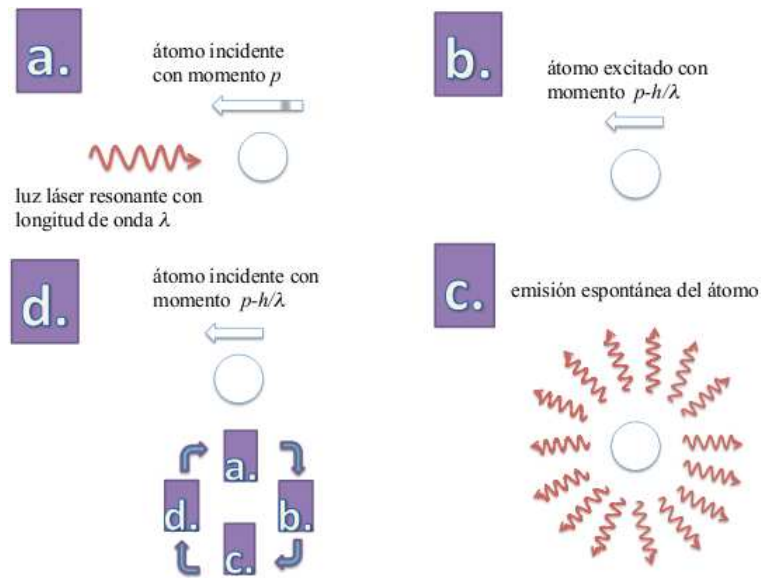


Figura 3: Se ilustra en forma esquemática el proceso de enfriamiento láser. Para hacer posible el enfriamiento tiene lugar un proceso cíclico en el que el átomo después de c puede continuar absorbiendo fotones para seguirse desacelerando. En cada ciclo el átomo pierde en promedio un momento h/λ

conoce como *rampa de enfriamiento*, hasta llegar a la temperatura y densidad para la cual el gas exhibe la transición al estado condensado. Vale la pena enfatizar que la transición al estado condensado requiere tanto de bajas temperaturas como densidades adecuadas

4. Gas degenerado de Fermi en un laboratorio

En lo que se refiere a los sistemas compuestos de fermiones, se tiene que en el laboratorio que las temperaturas necesarias para obtener un gas degenerado de Fermi son comparables a las que dan lugar a la condensación en un gas de Bose, es decir solo algunas millonésimas de Kelvin por encima del cero absoluto. La imposibilidad de los fermiones de ocupar el mismo estado, se traduce en la dificultad para enfriar un gas de Fermi. Como se explicó en la sección anterior, el mecanismo último durante el proceso de enfriamiento de un gas atómico corresponde a la termalización por colisiones entre pares de partículas. Sin embargo, en un gas de Fermi, esta situación no se produce de forma natural debido a que de manera efectiva los fermiones presentan una especie de repulsión entre ellos, como consecuencia del Principio de Exclusión de Pauli, y esto dificulta que las partículas interactúen a través de colisiones. Por tal motivo, el mecanismo que se empleó en el laboratorio para producir por primera vez un gas degenerado de Fermi fue combinar un gas

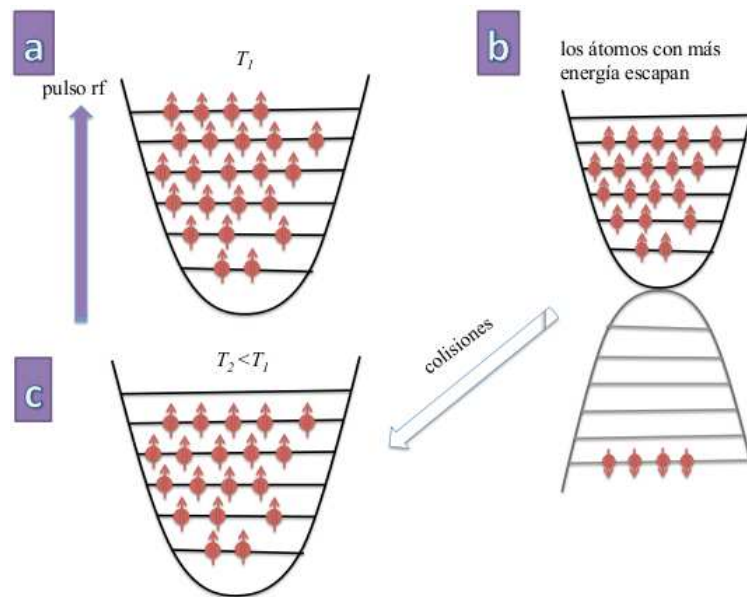


Figura 4: En a los átomos se encuentran en equilibrio, distribuidos en los diferentes niveles de energía del potencial de confinamiento y tienen una temperatura bien definida T_1 . b: Al aplicar un pulso de radio frecuencia con una energía igual a la máxima asociada al nivel del potencial armónico, los átomos más energéticos escapan. c: Los átomos alcanzan el estado de equilibrio por medio de colisiones entre ellos y el gas de bosones reduce su temperatura hasta un valor T_2 .

de Fermi, a la temperatura mínima que se podía alcanzar utilizando las técnicas de enfriamiento óptico explicadas antes, con un gas de bosones a temperatura más baja, de tal forma que los fermiones pudieran chocar con los bosones menos energéticos, logrando de manera global disminuir la temperatura del gas de Fermi. No fue sino hasta 1999 cuando se produjo un gas degenerado de Fermi utilizando esta técnica que se conoce como enfriamiento asistido.

5. Gases ultrafríos con interacción

La predicción de la existencia del estado condensado en sistemas bosónicos hecha por Albert Einstein en su artículo de 1925 se refiere a sistemas en los que no se consideran las interacciones. En la naturaleza estos sistemas no existen. Como lo establece la ecuación (5), la temperatura a la cual ocurre condensación de Bose está definida en relación a su densidad. Sin embargo, la densidad no puede aumentarse arbitrariamente dado que dicha ecuación es válida para gases ideales. Es por ello que los gases ultrafríos que se producen en el laboratorio tienen densidades muy bajas, 10^5 veces más diluidos que el

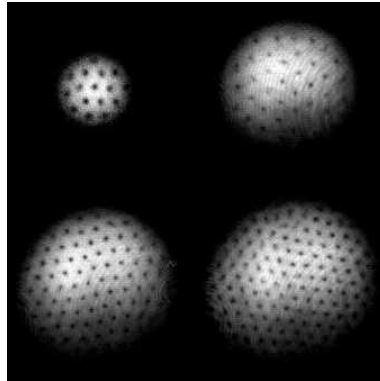


Figura 5: Imágenes de un gas de Bose en su fase condensada. Las fotografías muestran un número variable de vórtices, que se incrementa como función de la velocidad de rotación del condensado. (Tomada de The Magic of Matter Waves physics@MIT, Departmental Newsletter 2001) .

aire que respiramos. Cabe resaltar que aun en ese caso las interacciones están presentes. En principio es imposible desaparecer las interacciones intrínsecas entre los átomos. De hecho, como se menciona antes, la presencia de las interacciones es fundamental en la operación de la técnica de enfriamiento por evaporación, la forma en la que un gas en el que han sido removidas las partículas con mayor energía alcanza el estado de equilibrio es redistribuyendo su energía entre todo el sistema. Dicho proceso ocurre como resultado de las colisiones entre partículas. Por otro lado, la realización experimental de la condensación de Bose mostró que, como se esperaba, las interacciones entre los átomos están presentes aún en el límite de baja dilución. Este hecho fue constatado al hacer rotar el gas en su fase condensada y observar la formación de vórtices. La formación de vórtices ocurre cuando un sistema en su fase superfluida es sometido a rotar, en lugar de que el sistema gire como un todo, se forma un arreglo o red de vórtices como consecuencia del comportamiento cuántico de las partículas que componen al gas; en su movimiento circular, la circunferencia de su órbita tiene que ser un múltiplo entero de la longitud de onda de de Broglie. En la figura 5 se muestran las imágenes obtenidas al hacer rotar el gas en su estado condensado conforme la velocidad de rotación se incrementa.

La descripción completa de las colisiones que ocurren entre los átomos que conforman un gas es muy complicada, de hecho, no se tiene un marco teórico que permita hacer tal descripción en general, los gases ultrafríos tienen dos peculiaridades que nos permiten aproximar de manera precisa y relativamente sencilla cómo ocurren tales colisiones. Estas dos características son, una, el que están muy diluidos y dos que están muy fríos. De la primera podemos considerar que la colisiones sólo ocurren entre parejas de átomos, es decir, suponemos que la probabilidad, de que tres o más átomos se involucren en el mismo choque, es tan baja que la podemos ignorar. Y segundo, el que el gas está muy frío sugiere que las colisiones ocurren entre parejas de átomos que tienen muy baja energía cinética.

En este caso, aunque la descripción debe hacerse desde la perspectiva de la mecánica cuántica, veremos que la descripción de la colisión se reduce a conocer un sólo parámetro, la llamada longitud de dispersión a .

El análisis de una colisión entre dos átomos requiere de conocer el potencial de la fuerza interatómica entre ellos, que denotamos como $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son las posiciones de los dos átomos en cuestión. Esto es muy complicado ya que depende de cuántos electrones, protones y neutrones tenga cada átomo. Sin embargo, supongamos que conocemos tal potencial. Desde la perspectiva de la mecánica cuántica, una colisión describe cómo se dispersan las ondas que describen el estado de cada átomo al acercarse uno al otro. Resulta ser que la colisión puede considerarse como una suma de diferentes colisiones, cada una correspondiendo a un diferente orden del momento angular de los átomos. Así, la colisión se puede ver como ondas planas que al acercarse, debido a la interacción, se dispersan en muchas ondas en diferentes direcciones dependiendo de su momento angular. Cada contribución de onda tiene su fase alterada o corrida, y son estos corrimientos de fase los que la teoría permite calcular si se conoce con detalle el potencial. Es decir, conocer los corrimientos de fase es equivalente a describir la colisión. Este procedimiento es aún un trabajo formidable y muy difícil de hacer en general. Y es aquí donde el hecho de que el gas está muy frío llega al rescate. Si un gas está muy frío nos indica que la energía cinética de los átomos es muy baja y, por ende, las colisiones ocurren sólo entre átomos a muy baja energía. Cuando esto ocurre, se puede mostrar que de todos los corrimientos de fase sólo uno es importante, el llamado corrimiento de fase de onda s y que es el que corresponde a la contribución de momento angular cero. Desde un punto de vista pictórico, como lo sugiere la figura 6, la onda dispersada por la colisión es una onda esférica que emana desde el punto de la colisión, sin embargo, con su fase corrida por un valor $\delta_0 = ka$ donde k es el vector de onda de la onda incidente y a es la llamada longitud de dispersión. La onda dispersada la podemos escribir así,

$$\psi_{sc}(r) \approx -\frac{a}{r} e^{ik(r-a)}. \quad (6)$$

El vector de onda sólo depende de la energía incidente del átomo, que es muy baja, por medio de la expresión $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, mientras que la longitud de dispersión a depende crucialmente del potencial de interacción entre los átomos $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Recalamos que no es sólo el valor absoluto de a lo que importa sino su signo también. Este valor, incluido su signo, se calcula resolviendo la ecuación de Schrödinger de la colisión en la aproximación en que sólo el momento angular de valor cero contribuye. No es una tarea sencilla, sin embargo, existen toda clase de técnicas numéricas para hacerlo conociendo de antemano el potencial, que a su vez es medido experimentalmente. Es de notarse que algo tan complejo como la colisión cuántica entre dos átomos “fríos” se reduzca a un sólo parámetro, la longitud de dispersión a . Pero no hay que engañarse, aún así, este parámetro, y su signo, ayudan a predecir la gran riqueza de fenómenos que ocurren en estos gases. Regresando al hecho que el gas ahora lo visualizamos como uno de átomos colisionando sólo por pa-

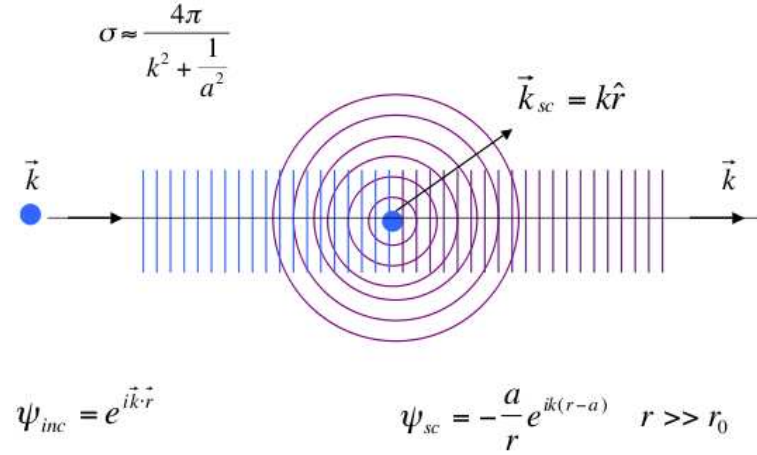


Figura 6: Se ilustra el proceso de dispersión a bajas energías en el sistema de coordenada relativa.

res y que las colisiones sólo son de onda s , se puede argüir que el potencial efectivo que sienten los átomos se aproxima como,

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \approx \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (7)$$

donde $\delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ es la función delta de Dirac en tres dimensiones. Es decir, en esta aproximación en que dominan las colisiones de onda s , el potencial efectivo que describe adecuadamente el corrimiento de fase solo depende de la longitud de dispersión a .

Para los fenómenos de muchos cuerpos del gas, el signo de a es crucial. Si el signo de a es positivo, se dice que el potencial es netamente repulsivo, si es negativo, el potencial es netamente atractivo. Como resultado de este hecho, si el gas es de bosones, un potencial repulsivo balancea la "atracción" natural de los bosones y hace que el gas sea estable; análogamente, si el gas es de fermiones, el potencial debe ser atractivo para balancear la "repulsión" natural de los fermiones. Cuando esto ocurre, emerge la fase superfluida de los fluidos cuánticos. Hoy en día es posible controlar de forma externa el signo de a por medio de campos magnéticos en sistemas macroscópicos [4]. En los bosones el estado de muchos cuerpos de un gas de débilmente interactuante, queda descrito por la ecuación de Gross-Pitaevskii, mientras que para los fermiones es un gas de pares de Cooper y se describe por el estado de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS). Estos se discutirán brevemente más adelante.

6. Átomos fríos: Un laboratorio cuántico

La realidad actual es que es posible manipular gases atómicos ultrafríos confinados en diversos potenciales inhomogéneos con el fin de controlar en muchos de los casos su

dinámica misma. La capacidad de controlar la geometría, dimensionalidad e interacciones entre los átomos, aunado a las propiedades intrínsecas de los fermiones y los bosones ha dado lugar a que esencialmente todas las predicciones y resultados teóricos y experimentales de la materia condensada, sean susceptibles de ser reproducidos experimentalmente. Por ejemplo puede mencionarse el caso de las llamadas redes ópticas de bosones y/o fermiones, que son el análogo de redes cristalinas en sólidos; la transición a un estado de tipo superfluido en gas de Fermi con interacciones; las juntas de Josephson en un condensado de Bose; el fenómeno de localización de Anderson en fermiones y bosones, la existencia de los cruces prohibidos de energía en el modelo de Landau-Zener, por mencionar algunos. En esta sección revisaremos en forma breve la descripción teórica de dos de estos sistemas.

Condensados de Bose en redes ópticas

Las redes ópticas son un campo de luz estacionario formado como resultado de la interferencia de luz láser propagándose en sentidos contrarios. Este campo de luz puede ser un arreglo periódico en 1, 2 o 3 dimensiones, o en general un potencial óptico con pozos de profundidad variable. Dichos arreglos son el análogo de las redes cristalinas en sólidos en las que el potencial periódico de los iones se crea por medios ópticos. En la figura (7) se muestran algunas de las configuraciones logradas en los laboratorios. Una vez que se ha alcanzado la transición al estado condensado, el gas ultrafrío es transferido al potencial óptico y se le permite evolucionar libremente o modificando *in situ* la configuración del potencial óptico para estudiar su dinámica de tunelaje a través de los pozos de potencial. Se ha encontrado que en el gas de Bose confinado ocurren dos comportamientos extremos: oscilaciones coherentes y autoatrapamiento. Dichos estados son el análogo de los estados superfluido y aislante de Mott característicos de las fases cuánticas. Las descripciones teóricas de condensados de Bose en redes ópticas se hacen a través de dos esquemas diferentes; el semiclásico o campo medio y el cuántico o de Bose-Hubbard. Ambas aproximaciones permiten estudiar la evolución dinámica y los estados estacionarios del gas de Bose. En forma breve se describe a continuación el modo en el que operan así como sus alcances y limitaciones.

En el caso de la aproximación semiclásica el punto de partida es la ecuación de Gross-Pitaevskii. El potencial óptico es tomado en cuenta en la ecuación de Gross-Pitaevskii reemplazando el potencial armónico creado por la trampa magnética por el campo de luz $V_{opt}(r)$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + (V_{opt}(r) + U_i |\Psi(r, t)|^2) \Psi(r, t). \quad (8)$$

La presencia del potencial óptico da lugar a considerar la geometría particular de cada potencial confinante. Hasta ahora se ha abordado ampliamente el problema de redes ópticas unidimensionales, siendo menor el terreno explorado en el caso de configuraciones en 2 y 3 dimensiones. En el caso de arreglos en 1 dimensión, el número de pozos que compo-

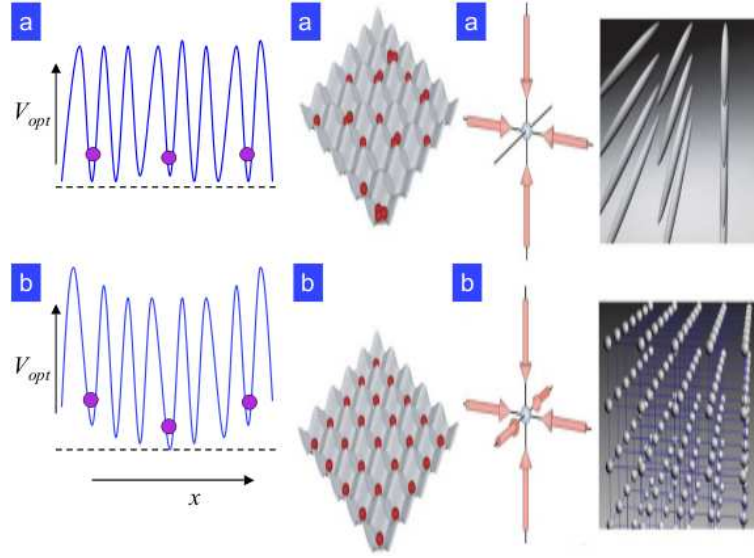


Figura 7: Se ilustran diferentes configuraciones de potenciales de confinamiento para bosones, creados por medios ópticos.

nen el potencial de confinamiento da lugar a un sistema de ecuaciones acopladas igual al número de pozos. Este resultado es consecuencia de trabajar en la aproximación conocida como la de n modos, asociados al número de niveles presentes en la primera banda de energía en un potencial de n pozos. La forma explícita las ecuaciones a resolver es

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = (E_i^0 + U_0) \psi_i - \sum_{i,j} K_{ij} \psi_j \quad (9)$$

donde $E_i^0 = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \phi_i|^2 dr + \int |\phi_i|^2 V_{opt}(r) dr$, $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ y $K_{ij} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \phi_i \nabla \phi_j + \int \phi_i V_{opt} \phi_j$, con ϕ_i $i = 0, \dots, n-1$ las funciones de onda de una de una partícula en el potencial de n pozos. El estudio de la dinámica de tunelaje entre pozos basado en la resolución numérica de las ecuaciones (9) permite predecir la existencia de los estados con oscilaciones coherentes y autoatrapamiento.

La aproximación cuántica o de Bose-Hubbard es un modelo que se deduce directamente de la teoría de segunda cuantización tomando en cuenta la aproximación de n -modos y que las funciones de onda de una partícula están localizadas en cada pozo de potencial que compone a la red en 1 dimensión [5]. Adicionalmente, es posible hacer una consideración que tome en cuenta la geometría particular del potencial confinante. El Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica del sistema para un potencial compuesto de

n pozos simétricos con respecto al origen es [5]:

$$\mathcal{H}_{eff} = - \sum_{i,j=1}^n \Delta_{i,j} [b_i^\dagger b_j + b_j^\dagger b_i] + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \sum_{i=1}^n b_i^\dagger b_i^\dagger b_i b_i. \quad (10)$$

b_i^\dagger y b_i son los operadores de creación y aniquilación de partículas en el pozo i , y satisfacen también las reglas usuales de conmutación para bosones. Este Hamiltoniano es válido mientras las siguientes dos suposiciones se cumplan: i) sólo los estado asociados a los n niveles de energía ligados en el potencial de n pozos participan en la dinámica del sistema y ii) se satisface que el traslape de las funciones de onda localizadas en cada pozo es despreciable, las únicas interacciones relevantes son aquellas en las que las partículas están dentro del mismo pozo.

A partir del Hamiltoniano (10) se concluye que la dinámica de un gas de Bose, confinado en un potencial de n pozos, está gobernada por los coeficientes Δ_{ij} y a , es decir por el coeficiente de acoplamiento de tunelaje de partículas entre diferentes pozos y por el coeficiente que modula la interacción entre pares de partículas dentro del mismo pozo [6]. Usando el Hamiltoniano (10) se ha estudiado la dinámica de un gas de bosones confinado en potenciales compuestos de 3 y 4 pozos en una dimensión [7, 8]. En estos trabajos se ha establecido la dependencia de la transición de fase del estado superfluido al estado conocido como aislante de MOTT. En el primero los átomos se desplazan en forma coherente a través de las barreras de potencial, mientras que en el segundo permanecen esencialmente localizados en el pozo en el que inicialmente fueron colocados. La ventaja de estudiar sistemas de Bose confinados en redes ópticas en el contexto del modelo de Bose-Hubbard con respecto a la aproximación de campo medio es que se pueden determinar propiedades no sólo de un cuerpo, sino de un número arbitrario, lo cual es relevante debido a la potencial capacidad de la mediciones experimentales.

Cruce BEC-BCS en un gas de fermiones interactuantes

Después de la realización experimental de un gas degenerado de Fermi a partir de un gas diluído de potasio [9], se descubrió que en un gas de bosones, también a muy bajas densidades y temperaturas, la magnitud de las interacciones entre pares de partículas se hacía notoriamente mayor a medida que un campo magnético externo era variado [4]. Esta capacidad de controlar las interacciones entre pares de partículas, y en particular de conseguir estados ligados, es consecuencia del uso de lo que se conoce como resonancias de Feshbach [10]. En gases diluídos, dichas resonancias dan lugar a la posibilidad de variar en forma continua la longitud de dispersión a que caracteriza cada proceso de colisión. Como se menciona en la sección referente a las interacciones, en el límite de bajas energías, el proceso de dispersión está representado por la longitud de dispersión a que determina el estado final de dos átomos que colisionan, sin importar la forma detallada del potencial de interacción entre ellas. Para valores positivos (negativos) de a los átomos experimentan una interacción efectiva repulsiva (atractiva).

Debido al Principio de Exclusión de Pauli, en un gas degenerado de Fermi no ocurre la dispersión de onda s . Sin embargo, la formación de moléculas y pares de átomos entre átomos con el mismo estado interno es posible a partir de una mezcla de fermiones en dos estados hiperfinos diferentes. A bajas temperaturas, estas moléculas y pares de átomos pueden formar un condensado de Bose-Einstein o un estado superfluido tipo BCS [11]. En años recientes se ha encontrado evidencia experimental de que los gases compuestos por una mezcla de fermiones en dos estados hiperfinos, exhiben también la formación de vórtices cuando son puestos a rotar [12] (ver figura 5).

Como es bien sabido, la teoría microscópica que describe el estado de un gas degenerado de Fermi compuesto de electrones con interacciones atractivas, es la teoría BCS, formulada en 1957 por Bardeen, Cooper y Schrieffer [11]. En dicha teoría los electrones son considerados como partículas libres con un potencial efectivo atractivo. En los experimentos actuales el nuevo estado de la materia formado a partir de los átomos neutros, y cuyas interacciones se pueden modificar externamente, es también un estado superfluido. Sin embargo, es importante enfatizar que la hipótesis esencial de la teoría BCS, que considera que solamente los electrones con energía comparable a la energía de Fermi participan en la formación de pares de Cooper o formación de partículas ligadas [13], debe ser reemplazada para incluir en principio todas las energías. Esta es la esencia del trabajo desarrollado por Eagles y Leggett para describir el fenómeno de superfluidez en gases de ^3He y ^4He en 1980 [14, 15]. Usando esta teoría, que también es conocida como aproximación de campo medio, se ha estudiado la termodinámica de un gas de Fermi compuesto de una mezcla de átomos en dos estados hiperfinos diferentes, como función de la longitud de dispersión a . En el caso de un potencial homogéneo el Hamiltoniano que describe a la mezcla es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{i=1}^{N_\uparrow} p_i^2 + \sum_{j=1}^{N_\downarrow} p_j^2 \right) + \sum_{i,j} U_{ij}. \quad (11)$$

donde $U_{i,j}$ es el potencial de interacción. En general se considera un potencial de interacción entre pares de contacto [16].

Tanto la teoría BCS como la desarrollada por Eagles y Leggett, hacen uso de una función de prueba variacional que es la superposición de todas las posibles combinaciones de pares de átomos en estados hiperfinos diferentes ($|\Psi_{BCS}\rangle$), tal que trabajando en el ensamble gran canónico, el valor de expectación del gran potencial es

$$\langle \Psi_{BCS} | \Omega | \Psi_{BCS} \rangle = \sum_k \left[(\epsilon_k - \mu) - \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2} \right] + \frac{1}{2} \Delta^2 \sum_k \frac{1}{\epsilon_k} - U_0 \frac{m}{4\pi \hbar^2} \Delta^2 \eta, \quad (12)$$

donde $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ y el "gap" Δ es una función de (T, μ, η) dada por la ecuación tras-

cendental,

$$\frac{1}{U_0} \sum_k \left[\frac{1}{\sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} - \frac{1}{\epsilon_k} \right] = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \eta. \quad (13)$$

Estas dos ecuaciones permiten obtener, $\Omega = \Omega(V, \mu, \eta)$. Cabe resaltar que esta forma del gran potencial es obtenida considerando que se introducen explícitamente los contraterminos necesarios para evitar la divergencia ultravioleta que tiene lugar como consecuencia del uso de un potencial de contacto. Aunque estrictamente la aproximación de campo medio es solamente válida en el régimen de interacciones débiles, el cual requiere que $N|a|^3/V \ll 1$, se puede considerar como correcta la expresión para $\langle \Omega \rangle$ para el límite $|\eta| = 1/a \rightarrow \infty$. Con ello se describen las propiedades termodinámicas en el cruce BEC-BCS a temperatura cero.

El efecto de temperatura finita se puede introducir considerando la entropía de un gas de quasipartículas sin interacción

$$S = -k_B \text{Tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}, \quad (14)$$

donde Tr denota la traza. En esta ecuación, la matriz de densidad está dada por,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Xi} \exp\left(\frac{\mu}{k_B T} \hat{N} - \frac{1}{k_B T} \hat{H}\right) \quad (15)$$

donde \hat{N} es el operador de número de partículas y \hat{H} el Hamiltoniano del sistema (el cual depende paraméricamente de la longitud de dispersión a). Así se obtiene una expresión para la gran función de partición Ξ ,

$$\Xi = \text{Tr} \exp\left(\frac{\mu}{k_B T} \hat{N} - \frac{1}{k_B T} \hat{H}\right). \quad (16)$$

Terminando de esta forma con la ecuación para el gran potencial es $\Omega = -kT \ln \Xi$, en función de la temperatura T ,

$$TS = E - \mu N - \Omega. \quad (17)$$

donde $E = \langle \hat{H} \rangle$ es la energía promedio. Con la expresión

$$\Omega(T, V, \mu, \eta) = E - \mu N - TS, \quad (18)$$

se está en posibilidad de determinar todas las propiedades termodinámicas. En particular, entre las propiedades termodinámicas más interesantes en el actual contexto experimental se encuentra la determinación de la variable contacto

$$c = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right)_{V, T, \mu}. \quad (19)$$

Dicha variable fue recientemente introducida por S. Tan [17] y ha sido determinada en forma experimental. Además su relación con el gap es como sigue:

$$C = U_0 \frac{m}{4\pi\hbar^2} \Delta^2. \quad (20)$$

Vale la pena resaltar que todo el cálculo anterior, es decir la termodinámica completa, puede realizarse de forma numérica exacta si se considera un potencial interatómico arbitrario de corto alcance. Por otro lado, si se trabaja fuera de la aproximación de campo medio es posible tratar sistemas compuestos de cientos de partículas para determinar numéricamente sus propiedades físicas.

7. El reto de una computadora cuántica

Como resultado del control en el comportamiento dinámico de gases ultrafríos de Fermi y Bose confinados por potenciales ópticos periódicos [18–21], i.e. por redes ópticas, y la coherencia existente en estos arreglos [22, 23], se ha especulado en la posibilidad de utilizar dichos sistemas para implementar procesos de información cuántica, tales como el cómputo cuántico¹. Vale la pena recordar que en el cómputo actual la unidad básica es el *bit*, que en general, es un dispositivo electrónico que puede tomar dos valores, 0 o 1. En el contexto de la mecánica cuántica sin embargo, la unidad fundamental, el llamado *q-bit*, que puede ser por ejemplo un átomo, tiene acceso a estar en una superposición de estados, reemplazando los dos únicos posibles estados del *bit* por dos o más estados; la diferencia esencial, además de una mayor cantidad de estados, es que en lugar de estar en 0 o 1, un *q-bit* puede estar simultáneamente en una superposición de estados. La repercusión en la ingeniería del cómputo se traduciría en la capacidad de realizar cálculos en forma masiva. Sin embargo, debido a que los gases ultrafríos confinados en redes ópticas están constituidos de muchos cuerpos y a su naturaleza cuántica intrínseca, la capacidad de manifestar coherencia al medir diferentes cantidades físicas se pierde, en otras palabras, se hace presente el fenómeno de decoherencia. Este último término se usa para designar el desconocimiento del estado cuántico del sistema, producto de la incapacidad de realizar un conjunto completo de medidas. Entre otras consecuencias, la ocurrencia de este hecho, da lugar a la cancelación de fases que definen al estado cuántico por completo, desprendiéndose de aquí el nombre de decoherencia. Dicha cancelación se atribuye en parte a las interacciones presentes en el sistema y en parte a su comportamiento ondulatorio propio. El resultado final al realizar la medida de una cantidad física entre mezcla el aspecto estadístico inherente a los sistemas de muchos cuerpos y el probabilístico asociado a la mecánica cuántica, traduciéndose la medición en una que caracteriza a un estado clásico. Hoy en día es un todo un campo de investigación la determinación y caracterización de la decoherencia en sistemas multicomponentes, es así que aun no es una realidad el cómputo cuántico.

¹ Véase el capítulo “Información cuántica” de Carlos Pineda, en este mismo volumen.

8. Referencias

- [1] F. Reif and F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill New York, 1965, vol. 11.
- [2] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, E. Cornell *et al.*, "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor," *science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995.
- [3] K. Davis, M. Mewes, M. Andrews, N. Van Druten, D. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle, "Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 22, pp. 3969–3973, 1995.
- [4] C. Regal and D. Jin, "Experimental realization of the BCS-BEC crossover with a Fermi gas of atoms," *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 54, pp. 1–79, 2006.
- [5] R. Paredes, "Tunneling of ultracold Bose gases in multiple wells," *Physical Review A*, vol. 73, no. 3, p. 033616, 2006.
- [6] R. Munoz-Rodriguez, R. Paredes, and R. Duarte-Zamorano, "Effective Hamiltonian of an ultracold Bose gas confined in a four-well optical lattice," *Revista mexicana de física*, vol. 53, no. 2, pp. 126–132, 2007.
- [7] S. Sonntag, C. Trichet Paredes, J. Roth, and H. Trebin, "Molecular dynamics simulations of cluster distribution from femtosecond laser ablation in aluminum," *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, vol. 104, no. 2, pp. 559–565, 2011.
- [8] R. Paredes and E. Neri, "Quantum dynamics of a Bose gas in finite n-well potentials in one dimension," *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 42, no. 3, p. 035301, 2009.
- [9] B. DeMarco and D. Jin, "Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas," *Science*, vol. 285, no. 5434, pp. 1703–1706, 1999.
- [10] H. Feshbach, "The electron correlation interaction is part of the electron-electron interaction whose partition into different terms may be performed using the projection operator method given by ann," *Phys.(New York)*, vol. 5, p. 537, 1958.
- [11] J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, "Theory of superconductivity," *Physical Review*, vol. 108, no. 5, p. 1175, 1957.
- [12] M. Zwierlein, J. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. Schunck, and W. Ketterle, "Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas," *Nature*, vol. 435, no. 7045, pp. 1047–1051, 2005.

- [13] L. Cooper, "Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas," *Physical Review*, vol. 104, no. 4, p. 1189, 1956.
- [14] A. Leggett, "Macroscopic quantum systems and the quantum theory of measurement," *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 69, pp. 80–100, 1980.
- [15] D. Eagles, "Possible pairing without superconductivity at low carrier concentrations in bulk and thin-film superconducting semiconductors," *Physical Review*, vol. 186, no. 2, p. 456, 1969.
- [16] L. Landau, E. Lifshitz, J. Sykes, J. Bell, and M. Rose, "Quantum mechanics, non-relativistic theory: Vol. 3 of course of theoretical physics," *Physics Today*, vol. 11, p. 56, 1958.
- [17] S. Tan, "Energetics of a strongly correlated Fermi gas," *Annals of Physics*, vol. 323, no. 12, pp. 2952–2970, 2008.
- [18] F. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio, "Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates," *Science*, vol. 293, no. 5531, pp. 843–846, 2001.
- [19] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch, I. Bloch *et al.*, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms," *Nature*, vol. 415, no. 6867, pp. 39–44, 2002.
- [20] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, and M. Oberthaler, "Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction," *Physical review letters*, vol. 95, no. 1, p. 10402, 2005.
- [21] G. Roati, E. De Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio, "Atom interferometry with trapped Fermi gases," *Physical review letters*, vol. 92, no. 23, p. 230402, 2004.
- [22] J. Cirac, P. Zoller, H. Kimble, and H. Mabuchi, "Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network," *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 16, pp. 3221–3224, 1997.
- [23] J. García-Ripoll, P. Zoller, and J. Cirac, "Coherent control of trapped ions using off-resonant lasers," *Physical Review A*, vol. 71, no. 6, p. 062309, 2005.