ESPACIO,TIEMPO, MATERIA Y VACIO

Reflexión crítica de las principales ideas físicas aparecidas a principios del siglo XX: el principio de relatividad y la dualidad onda-partícula. Se traza un perfil del límite entre la física moderna y la física clásica.

ENRIQUE CANTERA DEL RÍO

עם אהבה

1-INTRODUCCION

A los 16 años Einstein se hizo la siguiente pregunta: Si un observador inercial de los que maneja la mecánica clásica es capaz de moverse a la velocidad, constante, de una onda electromagnética plana, ¿como percibiría los campos eléctrico y magnético?. La respuesta clásica es la que supone la onda electromagnética como una onda en la superficie de un estanque de agua: se percibirían unos campos estáticos, lo mismo que en el caso de la onda de agua se ve una forma que no oscila. Pero si las leyes físicas son las mismas para cualquier observador inercial según postula el principio de relatividad, resulta que las leyes de Maxwell no están de acuerdo con la visión clásica anterior. Por una parte, la existencia de campos independientes del tiempo necesitan del concurso de algún tipo de distribución de carga (leyes de Gauss y Ampère;**n-1**); pero no podemos recurrir a esto, ya que el hecho relevante es que las ondas electromagnéticas pueden propagarse en el vacío. Por otra parte, adoptando la hipótesis del vacío, el campo eléctrico de una onda electromagnética se debe a oscilaciones del campo magnético y viceversa. Esto es lo que exigen las leyes de Fáraday y Ampere-Maxwell. Por tanto la luz que se propaga en el vacío consta de campos oscilantes para cualquier observador inercial si ha de cumplirse el principio de relatividad.

¿Que es lo que falla en la visión clásica? Por un lado aparecen ondas que se propagan sin la participación de un medio material; el vacío aparece con propiedades ondulatorias *intrínsecas* respecto a la propagación de ondas electromagnéticas. Por otro lado, si el observador no fuese capaz de moverse a la velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío, entonces siempre percibiría campos oscilantes tal como requieren las leyes de Fáraday y Ampère-Maxwell. Esto apunta a una solución no clásica del problema, pues supone la existencia de un límite al movimiento de cualquier objeto físico. Si la luz es una onda electromagnética entonces este límite es la “velocidad” de la luz en el vacío.

Esta imagen nos hace ver la importancia de considerar el comportamiento de los diferentes tipos de ondas que se dan en la naturaleza en función del *movimiento relativo* del observador. Este estudio se puede hacer desde el concepto de *fase* y es lo que se conoce como efecto Doppler. Los fenómenos de interferencia y difracción son lugares comunes en varias ramas de la física. Los experimentos que incluyen estos fenómenos se cuentan entre los que producen las medidas mas exactas. La fase aparece directamente en las leyes que determinan los patrones de interferencia para cualquier onda plana. Por tanto, considerando el principio de relatividad, la forma de estas leyes se puede mantener para observadores inerciales en movimiento relativo uniforme si se supone que la fase de cualquier onda plana es invariante. Este carácter de la fase se tomará aquí como un principio, y por tanto solo queda justificado por las consecuencias que produce, las cuales serán el hilo conductor de este trabajo. Los principios básicos que se utilizarán son:

1-*Principio de Relatividad Restringido o definición de Sistema de Coordenadas Inercial*: Las leyes físicas son las mismas para cualquier observador que utilice un sistema de coordenadas inercial (observador inercial).

2-*Existencia de los Sistemas Inerciales de Coordenadas:* A todo cuerpo físico *rígido* se puede asociar un observador inercial. En general suponemos que se puede hablar del sistema de coordenadas inercial *instantáneo* asociado a un objeto físico en el instante *dt*, de modo que en este instante la velocidad relativa del objeto en cuestión es nula.(**n-2**)

3-*Límite de la "velocidad" de la luz*

> 3.1-La "velocidad" de la luz en el *vacío* es una constante física. Esta condición se extrae directamente del electromagnetismo.
>
> 3.2-No se puede transferir *información* entre un foco y un receptor a velocidad súper-lumínica.

4-*Dualidad Onda-Partícula*: Cualquier partícula libre tiene una onda cuántica plana asociada.

5-La fase de cualquier onda plana: $k \cdot \Delta r - w\Delta t$ **,** es invariante entre observadores inerciales.

Como referencia para el lector, las ideas principales que se desarrollan son estas:

-Hay tres conceptos principales: espacio-tiempo, materia y vacío.

-La materia es un objeto complejo formado de partícula y onda cuántica.

-La partícula es una relación entre la materia y el espacio-tiempo.

-La onda cuántica es una relación entre la materia y el vacío.

-Hay un límite relativo a la modulación de una onda cuántica. Este límite es de la forma $\Delta E.\Delta T = h$; donde h es la constante de Planck, ΔE es la energía intercambiada por la onda y ΔT el tiempo que tardará en colapsar. El colapso es un cambio indeterminado en la onda cuántica.

-Existen dos dominios cinemáticos: un relativo al concepto clásico de espacio-tiempo de la relatividad especial y un dominio cinemático cuántico.

2-ESPACIO Y TIEMPO

Resulta difícil definir conceptos tan básicos, de hecho algunos filósofos los consideran ideas “a priori” del entendimiento. En física es mejor fijarnos en lo que hacemos con ellos. Utilizamos el espacio y el tiempo como coordenadas para limitar las acciones de la naturaleza y así poder establecer un orden y compararlas. Entre otros conceptos que dependen de este orden está la idea de *causalidad*, asociada a nuestra intuición física. Desde Galileo la física clásica siempre asumió la relatividad del espacio: un objeto puede ocupar un lugar fijo para un observador y para otro ocupar varios lugares sucesivamente. Pero si nos dicen que el tiempo es relativo, es decir, que las acciones físicas en un experimento no tienen por que tener el mismo orden temporal para todos los observadores; parece que se abren las puertas del *Caos*, de la falta de causalidad. La idea tradicional de tiempo conlleva esta impresión; pero un examen mas profundo elimina la imagen de caos arbitrario y restablece la idea de *Universo* en física mediante el principio de relatividad[**1**]. El descubrimiento del carácter relativo del tiempo se basa en el análisis de sucesos simultáneos. Supongamos este escenario: dos sistemas de referencia cartesianos paralelos en desplazamiento relativo uniforme sobre la dirección común que se considera eje “x”. Distinguiremos los dos observadores por el sentido de la velocidad relativa vista por cada observador, es decir, uno será el observador “+” y otro será el observador “-“.La velocidad relativa correspondiente será v_a y $v\_$. Sea ahora una regla situada a lo largo del eje x_- en reposo para este observador. Desde el punto medio (x_{0-}) de la regla se genera una señal electromagnética esférica que llega a los dos extremos de la regla: x_{1-} y x_{2-} ($x_{1-} < x_{2-}$). Dado que la velocidad de propagación es la misma en los dos sentidos (la “velocidad” de la luz en el vacío **c**), si se producen sendas acciones cuando la luz llega a los extremos de la regla, estas aparecen al mismo tiempo: son simultáneas para el observador “-“. Pero visto por el observador “+“, resulta que el efecto conjunto de la velocidad relativa y la constancia de la “velocidad” de la luz provoca un cambio en el orden de las acciones anteriores: la parte de la señal que se mueve en contra de la velocidad relativa recorre menos espacio hasta el extremo correspondiente que la parte de la señal que se mueve en el mismo sentido que la velocidad relativa. Si, según el pió 3.1, la señal recorre esos espacios con la misma “velocidad” **c**, tenemos que las acciones generadas en los extremos no son simultáneas para “+”:

$$(x_{0+} - x_{1+}) - v_+ t_{1+} = ct_{1+};\ \ (x_{2+} - x_{0+}) + v_+ t_{2+} = ct_{1+} \Rightarrow t_{2+} - t_{1+} = \frac{(x_{2+} - x_{1+})v_+}{c^2 - v_+^2}$$

Donde se ha supuesto que, para el observador “+”, el pulso se emite también, en un instante determinado, desde el centro de la regla móvil (**n-3**). Esta ecuación da el orden temporal de las acciones mencionadas. Si ahora intercambiamos los papeles y la regla está en reposo para el observador “+”, manteniendo su dirección y sentido sobre el eje común, el resultado para el observador “-“ es el mismo, salvo el signo de la velocidad relativa que cambia, es decir, el orden temporal de las acciones se invierte:

$$t_{2-} - t_{1-} = \frac{(x_{2-} - x_{1-})v_-}{c^2 - v_-^2} \qquad (2.1)$$

La constancia de la “velocidad” de la luz y la idea tradicional (Newtoniana) de tiempo no son compatibles. En su famoso trabajo de 1905[1], Einstein propone redefinir el concepto de tiempo a partir del tiempo local: el tiempo que marca un reloj en reposo. Postulando la constancia de la “velocidad” de la luz en el vacío define lo que es *sincronizar* relojes en reposo espacialmente separados; la sincronización así definida es una relación de *equivalencia* entre todos los relojes en reposo relativo a un sistema de coordenadas inercial determinado, y por tanto se puede utilizar para *definir* un tiempo físico común para cada punto de un sistema de coordenadas cartesiano inercial. Para aclarar esta idea y justificar por que aparece el término *velocidad* entre comillas referido a la luz en el vacío vea el apéndice correspondiente.

Propiedades del espacio y el tiempo: Linealidad, Relatividad y Simetría.

Debemos encontrar alguna regla que nos permita relacionar los espacios y los tiempos de *una* acción física que miden dos observadores en movimiento relativo. Solo así los observadores pueden creer que están experimentando los mismos, o distintos, fenómenos, y por tanto llegar a leyes comunes. ¿Cómo es esta regla? Intentaré seguir el criterio de mayor sencillez posible. Una acción física (A) está limitada, al menos, por dos *sucesos*: dos conjuntos de coordenadas **x, y, z, t**. En lo tocante a nuestro objetivo, esta acción se puede descomponer en el par (A_l, A_s), introduciendo un tercer suceso que sea simultáneo con el suceso final y local con el suceso inicial (**n-4**). La relación mas sencilla de los tiempos y espacios de estas acciones es la *lineal*:

$$\Delta t(A) = \Delta t(Al\,) + \Delta t(As\,)$$
$$\Delta e(A) = \Delta e(Al\,) + \Delta e(As\,)\ (e = x, y, z) \quad (2.2)$$

Donde A_l es una acción local: los sucesos limitantes ocurren en un mismo punto; y A_s es una acción simultánea: los sucesos limitantes ocurren a la vez. Para el observador que verifique la simultaneidad de A_s será $\Delta t(A_s) = 0$, pero para cualquier otro en movimiento relativo este término no se anula, como se ha visto antes. Es un tiempo *inducido* por el movimiento relativo y por tanto representa la *relatividad* del tiempo. Para el observador que verifique la localidad de A_l, será $\Delta e(A_l)=0$, pero para cualquier otro observador en movimiento relativo, la acción A_l cambia de posición y este término no se anula. Es un espacio *inducido* por el movimiento relativo y por tanto representa la *relatividad* del espacio. Estos términos, $\Delta t(A_s)$ y $\Delta e(A_l)$, tienen una propiedad de *asimetría* directamente relacionada con el movimiento relativo. La forma mas sencilla para esta propiedad es la siguiente: Si el observador “+“ mide el espacio de una acción que sea local para el observador “-” , obtendrá un valor *“Δe”*. Si se intercambian los papeles y es ahora el observador “-” quien mide el espacio de la misma acción, ahora local para el observador “+“, obtendrá un valor *“-Δe”*. Si el observador “+“mide el tiempo de una acción que sea simultánea para el observador “-”, obtendrá un valor *“Δt”*. Si se intercambian los papeles y es ahora el observador “-” quien mide el tiempo de la misma acción, ahora simultánea para el observador “+“, obtendrá un valor *“-Δt”*. Esta condición de asimetría supone, en la experiencia de la regla del apartado anterior (2.1), que $\mathbf{v_{-} = -v_a}$, y que la longitud de la regla móvil: $\mathbf{x_2 - x_1}$, no depende de la dirección de su velocidad relativa al observador. Esta asimetría en el tiempo supone también que los sucesos simultáneos no pueden estar relacionados causalmente ya que no existe un orden objetivo para ellos. Si suponemos que las leyes físicas son causales, es decir, que representan un orden temporal objetivo de las acciones físicas, entonces estas leyes no deben depender de la existencia de acciones simultáneas(**n-5**).

Quedan otras dos componentes del espacio y el tiempo por analizar: el tiempo local $\Delta t(A_l)$ y el espacio simultáneo $\Delta e(A_s)$. Parece claro que el tiempo local es lo que marca un reloj o en general la duración de un proceso físico local. La longitud de una regla móvil se determina estableciendo las coordenadas de sus dos extremos simultáneamente: el espacio simultáneo equivale a la longitud de un objeto físico. Las propiedades de estas magnitudes parecen ser notoriamente diferentes. La longitud de una regla no puede anularse para ningún observador inercial. La marcha de un reloj tampoco puede detenerse por efecto de la velocidad relativa. Estas componentes no deben participar del carácter asimétrico de las componentes anteriores. Las conclusiones que siguen toman como hipótesis el carácter *simétrico* de estas componentes.

Transformación del tiempo local

La condición de simetría es la siguiente:

(a)Si el observador “+” mide el tiempo Δt_l de una acción local, el observador “-“ medirá un tiempo Δt.
(b)Si se cambian los papeles y el observador “-“ mide el tiempo de la misma acción local, que evidentemente debe ser también Δt_l; entonces el observador “+“ medirá un tiempo Δt.

El vacío tiene la capacidad intrínseca de propagar ondas. Suponemos ahora que en nuestro sistema se mueve una onda plana en el vacío a la “velocidad” de la luz en la dirección creciente del eje “x” común a los dos sistemas de referencia. Si aplicamos la simetría del tiempo local al principio de fase invariante tenemos:

$$-w_+\Delta t^l = k_-v_-\,\Delta t - w_-\Delta t \quad (2.3.a)$$
$$-w_-\Delta t^l = k_+v_+\,\Delta t - w_+\Delta t \quad (2.3.b)$$

Dividiendo (2.3.a) por w_- y (2.3.b) por w_+, multiplicando las ecuaciones y dado que *w* = *ck* para ambos observadores (pió 3.1), tenemos lo siguiente*:*

$$\Delta t = \Delta t^{I} \beta^{-1} \qquad (2.4); \qquad \beta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{w_-}{w_+} = \frac{k_-}{k_+} = \sqrt{\frac{1 - \frac{v_+}{c}}{1 - \frac{v_-}{c}}} \quad (2.5)$$

Transformación del espacio simultáneo

La condición de simetría es la siguiente (se consideran solo sucesos sobre el eje x):

(c)Si el observador "+" mide el espacio Δx_s de una acción simultánea, el observador "-" medirá un espacio Δx.
(d)Si se cambian los papeles y el observador "-" mide el espacio de la misma acción simultánea, que evidentemente debe ser también Δx_s; entonces el observador "+" medirá un espacio Δx. Aplicando esto en nuestro caso:

$$-k_+ \Delta x^s = k_- \Delta x - w_- \Delta t_- \quad (2.6.c)$$
$$-k_- \Delta x^s = k_+ \Delta x - w_+ \Delta t_+ \quad (2.6.d)$$

Nos damos cuenta de que los intervalos de tiempo que aparecen están asociados al mismo suceso simultáneo visto por observadores con movimiento relativo +v y –v, por tanto, como se vio antes estos tiempos tienen signos contrarios. Por tanto, si dividimos (2.6.c) por k_- , (2.6.d) por k_+ y sumamos las ecuaciones tenemos, utilizando la relación de vectores de onda (2.5):

$$\Delta x = \beta^{-1} \Delta x^s \quad (2.7)$$

Relación entre espacios simultáneos y contracción de Lorentz

Sea un segmento rígido en reposo sobre la dirección x_- , el observador "-" genera sendas acciones simultáneas en los extremos del segmento. El valor Δx_+ asociado a estas acciones, según el observador "+" está dado en la parte izquierda de (2.7). Como hemos visto para el observador "+" la simultaneidad se pierde y hay un intervalo de tiempo entre dichas acciones, por lo que para "+" el segmento se habrá desplazado una cierta distancia de modo que la suma de este desplazamiento y la longitud de dicho segmento móvil igualan el resultado (2.7)

$$\Delta x_+ = \Delta x_+^s + v_+ \Delta t_+ \quad (2.8)$$

se trata de la descomposición de acciones en base al suceso intermedio convenientemente elegido. El incremento de tiempo por pérdida de simultaneidad se ha calculado anteriormente en (2.1):

$$\Delta t_+ = \Delta x_+{}^s \frac{v_+}{c^2}\beta^{-2}$$

y por tanto haciendo las sustituciones en (2.8)

$$\beta^{-1}\Delta x^s = \Delta x_+^s + v_+\left[\Delta x_+{}^s \frac{v_+}{c^2}\beta^{-2}\right] \rightarrow$$

$$\Delta x_+^s = \beta \Delta x^s$$

O en una notación mas comprensiva

$$\Delta x_m^s = \beta\, \Delta x_r^s \qquad (2.9)$$

Por tanto una misma regla rígida es mas corta medida por un observador en movimiento relativo ($\Delta x_m{}^s$) que por uno en reposo relativo($\Delta x_r{}^s$) a dicha regla. El tamaño de los objetos físicos se determina por medio de un proceso simultáneo y por tanto dicho tamaño es relativo al sistema de coordenadas utilizado (**n-19**). Note el lector el siguiente detalle: $\Delta x_r{}^s$ representa un simple segmento pero $\Delta x_m{}^s$ representa una línea coordenada espacio-temporal.

Transformación completa de la coordenada tiempo

Sustituyendo la ecuación (2.9) en la ecuación del tiempo simultáneo (2.1) y sumando con los resultados del tiempo local, como requiere (2.2), tenemos la transformación completa del tiempo:

$$\Delta t_+ = (\Delta t_-^l - \frac{v_-}{c^2}\Delta x_-^s)\beta^{-1} \qquad (2.10)$$

Transformación completa de la coordenada x

Partiendo de (2.8) y sustituyendo la transformación completa del tiempo (2.10) y la contracción de Lorentz (2.9) tenemos

$$\Delta x_+ = (\Delta x_-^s - v_- \Delta t_-^l)\beta^{-1} \qquad (2.11)$$

Relación entre tiempos locales (relojes en reposo y en movimiento)

Supongamos un reloj cualquiera en reposo para el observador “+”. La medida de este reloj representa evidentemente un tiempo local para “+” : t^l_+. Para “-“ tenemos el reloj de “+” en movimiento; según (2.11), será:

$$\Delta x_-^s - v_- \Delta t_-^l = 0$$

donde Δt^l_- es el tiempo local en "-"; por tanto, según la definición de tiempo, medido por un reloj en reposo para "-". Si suponemos el mismo origen inicial de tiempos para "+" y para "-" tenemos que el tiempo medido en "-" es el de aquel reloj en reposo que coincida espacialmente en cada instante con el reloj móvil, obtenemos de (2.10) que la medida del tiempo en "+" y la medida del tiempo en "-" cumplen:

$$t^l_m = t^l_r \beta \qquad (2.12)$$

Por tanto, un reloj en movimiento(sistema +: t^l_m)*atrasa progresivamente* comparado con uno en reposo (sistema -: t^l_r) en la localización correspondiente. No es posible para un observador inercial sincronizar relojes en reposo con relojes en movimiento, y por tanto, la definición de tiempo (ver apéndice) no se puede ampliar para incluir a mas de un sistema inercial. La duración de un proceso se determina por medio de un proceso local, y por tanto dicha duración es relativa al sistema de coordenadas. Note el lector este detalle: t_m representa un único reloj, pero t_r representa una *línea síncrona* de relojes.

Transformación de las coordenadas (y,z). Transformación de Lorentz completa

Puesto que las coordenadas vectoriales y,z son perpendiculares a la velocidad relativa, las componentes simétricas y asimétricas de sucesos sobre estas coordenadas son como si la velocidad relativa se anula, por tanto tenemos en total

$$\begin{aligned}
\Delta t_+ &= (\Delta t^l_- - \frac{v_-}{c^2}\Delta x^s_-)\beta^{-1} \\
\Delta x_+ &= (\Delta x^s_- - v_- \Delta t^l_-)\beta^{-1} \\
\Delta y_+ &= \Delta y^s_- \\
\Delta z_+ &= \Delta z^s_- \\
\beta &= \sqrt{1 - v^2/c^2}
\end{aligned} \qquad (2.13)$$

Cinemática elemental: ¿*Qué* se mueve?

Hemos determinado los conceptos de espacio y tiempo, pero ¿qué debemos entender por *movimiento*?. Si hemos puesto en cuestión el concepto de tiempo, entonces prácticamente todo está en cuestión. El concepto de moviento es de radical importancia ya que enlaza directamente con la *Mecánica* y el *Electromagnetismo*. Todo movimiento supone una relación entre intervalos de posición e intervalos de tiempo. Las relaciones mas sencillas que pueden establecerse con el álgebra vectorial son:

$$\Delta\overline{r}_a = \overline{V}\Delta t_a \quad (3.1.a);\ \Delta t_b = \overline{W} \bullet \Delta\overline{r_b} \quad (3.1.b)$$

Siendo los vectores V y W constantes. Aplicando las transformaciones de Lorentz a la primera relación tenemos

$$\Delta x_{a+} = \frac{V_{x-} - v_-}{1 - \frac{v_- V_{x-}}{c^2}}\Delta t_{a+};\ \Delta y_{a+} = \frac{\beta V_{y-}}{1 - \frac{v_- V_{x-}}{c^2}}\Delta t_{a+};\ \Delta z_{a+} = \frac{\beta V_{z-}}{1 - \frac{v_- V_{x-}}{c^2}}\Delta t_{a+}; \quad (3.2.a)$$

El resultado (3.2) es la misma ley (3.1.a) vista por el observador "+" y determina las componentes de la velocidad para este observador. Si hacemos lo mismo con (3.1.b), comprobaremos que esta ley se mantiene invariante si W se transforma de este modo:

$$\Delta t_{b+} = \frac{W_{x-} - \frac{v_-}{c^2}}{1 - v_- W_{x-}}\Delta x_{b+} + \frac{\beta W_{y-}}{1 - v_- W_{x-}}\Delta y_{b+} + \frac{\beta W_{z-}}{1 - v_- W_{x-}}\Delta z_{b+}; \quad (3.2.b)$$

Considerando las variables espaciales de modo independiente obtenemos directamente las componentes de W en el nuevo sistema inercial.
De este modo la cinemática elemental consta de las dos leyes 3.1.a-b junto con las expresiones para el cambio de sistema inercial. Evidentemente (3.1.a) representa el desplazamiento de una partícula a velocidad constante, siendo el vector V su velocidad. Llamemos a la relación (3.1.b) *covelocidad*. Ambas expresiones son en principio incompatibles: relacionan espacios y tiempos diferentes, pero si obligamos a que haya compatibilidad de espacios ($\Delta r_a = \Delta r_b = \Delta r$) y tiempos ($\Delta t_a = \Delta t_b = \Delta t$) obtenemos, multiplicando (3.1.a) escalarmente por W y aplicando (3.1.b)

$$\overline{W} \bullet \Delta\overline{r} = \overline{W} \bullet \overline{V}\Delta t = \Delta t \rightarrow$$
$$\overline{W} \bullet \overline{V} = 1 \quad (sistema \quad compatible)$$

El lector puede comprobar que esta relación es *invariante* entre sistemas inerciales. También es posible anti-compatibilidad : $\Delta r_a = -\Delta r_b$ y $\Delta t_a = -\Delta t_b$.

La transformación 3.2.b de la covelocidad equivale *formalmente* a la transformación de una velocidad que tuviese la forma ***V' = c²W***, donde ***V'*** sería también una velocidad. El lector puede comprobar también que la expresión

$$\overline{V}' \bullet \overline{V} = c^2$$

es invariante si se tratan V y V' como velocidades; sin embargo aparece un problema de interpretación, ya que un valor: V o V' debe ser superior a la velocidad de la luz. Vemos de este modo que el concepto de covelocidad no es reducible al de velocidad en este caso; sin embargo tendremos mas adelante necesidad de expresar la covelocidad en la forma ***V'/c²***. Aplicando estos resultados a 2.13 tenemos las siguientes conclusiones:

Para un movimiento del tipo 3.1.a, visto desde el sistema de referencia en reposo instantáneo con la partícula, dx_a se anula, pero dt_a no se anula en general. Para un movimiento del tipo 3.1.b en las mismas condiciones es ahora dt_b el término que se anula, mientras que no hay razón para que dx_b se anule. Esto hace pensar que para la condición de compatibilidad tanto los incrementos de espacio como los de tiempo no se anulan; es decir, no existe un sistema de coordenadas en que la partícula en el estado 3.1.b pueda considerarse instantáneamente en reposo. Como mucho puede existir un sistema de coordenadas en que el movimiento esté indeterminado de modo que la velocidad y covelocidad instantáneas sean límites del tipo 0/0. La partícula en este estado no puede concebirse como un punto matemático, sino que debe poseer alguna estructura o movimiento interno. El movimiento de la partícula no se puede describir con una función **r**(t) en este dominio.

Los casos de compatibilidad se abordará con mas extensión en la sección 4.

Transformaciones de frecuencia y vector de onda

Aplicando las transformaciones de Lorentz al invariante de fase para una onda plana cualquiera que se propaga en una dirección dada se obtiene, considerando que cada magnitud del conjunto (Δx, Δy, Δz, Δt) pueden tomar cualquier valor independientemente del resto:

$$w_+ = (w_- - v_- k_{x-})\beta^{-1};\ k_{x+} = (k_{x-} - \frac{v_-}{c^2} w_-)\beta^{-1};\ k_{y+} = k_{y-};\ k_{z+} = k_{z-} \quad (3.3)$$

Note ahora el lector esta "diferencia": Las transformaciones de Lorentz relacionan espacios y tiempos que dos observadores inerciales en movimiento relativo atribuyen a una *única* acción. Sin embargo (3.3) relaciona las medidas de frecuencia y longitud de onda que dos observadores inerciales hacen de una *única* onda. Estas medidas representan acciones diferentes. Si el observador A mide la frecuencia de una onda con un reloj en reposo, esta acción no es válida para el observador B como medida de la frecuencia. Esto es debido al principio de invarianza de la fase. Pretendo ahora clasificar el comportamiento de las ondas en función del *movimiento* relativo al observador. El análisis que sigue depende de la ampliación del principio 2 para cualquier onda: existe un sistema de coordenadas inercial en el que una onda plana no se mueve. Note el lector también que las ecuaciones (3.3) solo dependen de los observadores relacionados y no del medio de propagación de la onda.

I - Existe un observador inercial que no es capaz de medir la oscilación de la onda con un reloj en reposo: $w\_ = 0$.
Haciendo esta sustitución en (3.3) vemos que la frecuencia de la onda es un término *asimétrico*, dependiente de la velocidad relativa en módulo y dirección. La longitud de onda es un término *simétrico*, de modo que tiene un significado físico objetivo: se trata de una distancia real; la distancia entre cresta y cresta es un espacio simultáneo. Se puede demostrar que la ley de composición de velocidades 3.2 es válida para estas ondas y por tanto, ya que existe un observador para el que la velocidad de estas ondas se anula, nunca superan la “velocidad” de la luz. Como consecuencia siempre podemos encontrar en principio un *foco* para estas ondas. El movimiento de este foco se puede modular y por tanto el observador puede utilizar estas ondas para transmitir información. Por su naturaleza estas ondas *no* admiten límites temporales objetivos para cualquier observador inercial, y sabemos que admiten límites espaciales, como espejos por ejemplo. Llamemos a este caso *onda espacial*. La acción fundamental de estas ondas es *transportar* energía de una parte a otra del *espacio*, este transporte es lo que conocemos como impulso mecánico y es el concepto fundamental de la dinámica clásica. En este transporte no hay una “transformación radical” del tipo de energía asociada. Tenemos ejemplos reconocibles de estas ondas: ondas transversales como las ondas en la superficie del agua, pulsos en una cuerda tensa, ondas electromagnéticas en líneas de transmisión y en medios refringentes (fibra óptica e.t.c). Un sólido rígido (como límite una partícula) o cualquier cosa capaz de mantener una forma definida independiente del tiempo puede considerarse como combinación de ondas espaciales. La propagación de estas ondas necesita de las propiedades físicas de algún medio material; de este hecho depende el que haya observadores para los que el movimiento de la onda se anula (pió 2).

II- Existe un observador inercial que no es capaz de medir la longitud de onda con una regla en reposo: $k\_ = 0$.
En este caso el vector de onda tiene un comportamiento *asimétrico* y la frecuencia se transforma de forma *simétrica*, de modo que es ahora la frecuencia la que tiene un significado físico objetivo: se trata de un “*tiempo real”*, mientras que ningún observador puede percibir la longitud de onda como espacio simultáneo. Estas ondas *transportan* energía en el *tiempo* y por tanto su movimiento natural es la covelocidad. Si consideramos que el movimiento de estas ondas corresponde a una velocidad, entonces siempre es por encima de la “velocidad” de la luz, por tanto, según el principio 3.2, *no es posible encontrar un foco emisor real para ellas*. Según el principio 2, dado que estas ondas nunca están en reposo, no puede definirse una referencia inercial para su movimiento. Así las cosas parece que estas ondas están mas allá de nuestros principios o no existen. Sin embargo todavía podemos pensar que su movimiento corresponde a una covelocidad; la cual suponemos asociada a una velocidad real medible desde un sistema inercial.
Las ideas que siguen son una especulación sobre las propiedades de las “ondas de covelocidad”. Si estas ondas (de covelocidad) se pueden utilizar para transferir información entre un emisor y un receptor, para el observador todo sería como si la información se transmitiese a velocidad superior a la de la luz, lo cual

suponemos que no puede ser medido físicamente. La alternativa que propongo es que *el observador no es capaz encontrar un foco manipulable a su voluntad para modular estas ondas*. Según el *principio de Huygens*, la llegada de una onda a un receptor supone la creación de un foco secundario de reemisión. Esto no es posible en este caso: el *receptor* no puede ser foco secundario; lo cual significa que estas ondas, manteniendo el principio de Huygens, se propagan en el vacío. Este comportamiento se acepta al menos para la luz. Análogamente al caso anterior, por su naturaleza estas ondas *no* admiten en este caso límites espaciales: son continuas en el espacio. El aparente sentido único del tiempo no hace probable la existencia de límites en forma de espejos temporales, en los que estas ondas se reflejen hacia su pasado. La única forma de considerar la existencia física de estas ondas es que actúen sobre receptores. Si el principio de Huygens no es aplicable a los receptores, entonces estos no admiten ni reflexión ni refracción, y por tanto estas ondas ceden toda su energía e impulso (colapso) al tiempo que llegan al primer receptor que encuentren. Así vemos que existen *límites temporales* para ellas. Llamemos a este caso *onda temporal,* aunque por sus propiedades de continuidad espacial y colapso bien puede llamarse onda cuántica. En lo que sigue voy a suponer que estas ondas son las que maneja la mecánica cuántica.

III- No existen observadores inerciales para los que se anulen ni la frecuencia ni el vector de onda.
La frecuencia y el vector de onda tienen significado físico objetivo. Llamemos al caso *onda espacio-temporal*. Ejemplo de ondas espacio-temporales es la luz en el vacío. Note el lector que el sonido presenta una fenomenología cuántica por medio de los *fonones* y la luz por medio de los *fotones*. Por tanto hay que pensar que estas ondas heredan las propiedades de los casos anteriores y son una asociación de onda espacial y onda temporal. Esto supone que son posibles casos de ondas sonoras y electromagnéticas (y partículas, como veremos) cuyo origen no es posible determinar físicamente. En el contexto de la física cuántica esto puede entenderse como un cierto nivel de ruido o energía de vacío imposible de eliminar. [**n-7**,**n-19**]

Un *paquete de ondas espacio-temporales* en el vacío cuyas componentes se mueven a la “velocidad” de la luz tiene dos componentes: la onda de grupo que se mueve a velocidad inferior a la luz y la onda de fase que se mueve a velocidad superior a la luz. Por tanto un paquete de este tipo de alguna forma se desdobla en una asociación de dos componentes: onda espacial y onda temporal. Lo fundamental de todo esto es que el objeto representado es una asociación de una onda espacial que se mueve a cierta velocidad y una onda temporal que se mueve con la covelocidad correspondiente.

3-MECANICA DE UNA PARTÍCULA

La dualidad onda-partícula es un hecho demostrado en experimentos de interferencia y difracción. Se han realizado experiencias con diferentes *partículas*, como electrones, neutrones e incluso moléculas complejas[10]. En todas se han encontrado patrones de interferencia asociadas a la fase de una onda. La Energía y el Impulso mecánico de las partículas están, según De Broglie, relacionados mediante de la constante de Planck con la frecuencia y el vector de ondas de la onda asociada:

$$E = \hbar w;\ P = \hbar k \quad (4.1)$$

Dado que el impulso mecánico de una partícula depende linealmente de su velocidad, para el observador que percibe la partícula en reposo el vector de onda se anula y, por tanto, se trata de una onda temporal del apartado anterior. De 3.3 obtenemos inmediatamente

$$E_{+} = (E_{-} - v_{-}P_{x-})\beta^{-1};\ P_{x+} = (P_{x-} - \frac{v_{-}}{c^{2}}E_{-})\beta^{-1};\ P_{y+} = P_{y-};\ P_{z+} = P_{z-} \quad (4.2)$$

Estas relaciones son las mismas que en relatividad se introducen para una partícula(onda espacial)(**n-8**). En suma, vemos que podemos considera a la partícula como una *asociación* de onda espacial y onda temporal, y por tanto se puede incluir en el caso III junto con la luz y el sonido. Investiguemos ahora las interacciones que puede tener una partícula según estas ecuaciones. Buscamos expresiones invariantes entre sistemas inerciales que relacionen modificaciones de Energía y modificaciones de Impulso. Las mas sencillas, siguiendo el esquema dual ya utilizado, son las siguientes:

$$\Delta E_{-} = \overline{A} \bullet \Delta\overline{P}_{-} \quad (4.3.a);\ \Delta\overline{P_{-}} = \overline{B}\Delta E_{-} \quad (4.3.b)$$

La aplicación de las transformaciones de energía/impulso 3.3 al caso de la ecuación (4.3.a) da

$$\Delta E_{+} = \frac{A_x - v_{-}}{1 - \frac{v_{-}A_{x-}}{c^{2}}}\Delta P_{x+} + \frac{\beta A_y}{1 - \frac{v_{-}A_{x-}}{c^{2}}}\Delta P_{y+} + \frac{\beta A_z}{1 - \frac{v_{-}A_{x-}}{c^{2}}}\Delta P_{z+};$$

Es decir: **A** se transforma como la velocidad de (3.2).

La aplicación de las transformaciones de energía/impulso a la ecuación (4.3.b) da

$$\Delta P_{x+} = \frac{B_{x-} - \frac{v_-}{c^2}}{1 - v_- B_{x-}} \Delta E_+$$
$$\Delta P_{y+} = \frac{\beta B_{y-}}{1 - v_- B_{x-}} \Delta E_+$$
$$\Delta P_{z+} = \frac{\beta B_{z-}}{1 - v_- B_{x-}} \Delta E_+$$

Es decir**,** **B** se transforma como una covelocidad.
Recordando los conceptos básicos de la mecánica: El impulso mecánico, la masa (como relación entre el impulso y la velocidad de la partícula) y la energía cinética, podemos identificar lo siguiente:

Para 4.3.a el factor invariante **A** es la velocidad de la partícula: **V**. La ecuación es la definición de *energía cinética* de una partícula de masa constante. Se trata por tanto de una acción *acelerativa* sobre la partícula:

$$dE_a = \overline{V} \bullet d\overline{P_a} \quad (4.4)$$

Para 4.3.b el factor invariante **B** es una covelocidad, que expresaremos como **V'/c²**

$$d\overline{P_b} = \frac{dE_b}{c^2}\overline{V'} \quad (4.5)$$

Considerando la *equivalencia masa-energía*, la ecuación expresa una variación de impulso de la partícula por alteración de su masa, si hacemos V'=V; o bien el impulso de una parte de la partícula que ha sido escindida y se mueve con velocidad V'.

Ambas ecuaciones, (4.4) y (4.5), son incompatibles en general y se refieren a acciones d*iferentes*. Sin embargo podemos encontrar condiciones de *compatibilidad* de impulso ($\Delta P_a = \pm\Delta P_b = \Delta P$) y energía ($\Delta E_a = \pm\Delta E_b = \Delta E$) para este caso de igual manera que cuando vimos el caso cinemático:

$$\overline{V'} \bullet \overline{V} = c^2 \quad (4.6)$$

Aplicando estos resultados a 4.2 tenemos las siguientes conclusiones:

Para una interacción del tipo 4.4 vista desde el sistema de referencia en reposo instantáneo con la partícula, dE_a se anula. Dado que esta interacción corresponde con la mecánica clásica, la existencia de una fuerza implica que dP_a no se anula en el citado sistema de referencia; o que si es nulo lo es en cualquier sistema de referencia y equivale a anular la interacción. Para una interacción del tipo 4.5 en las mismas condiciones es ahora dP_b el término que se anula, mientras que dE_b no puede anularse en ningún sistema de referencia, o si lo hace en alguno equivale a anular la interacción. Esto hace que esta forma de interacción no pueda representarse mediante una fuerza clásica. Un ejemplo clásico de utilización de (4.5) la podemos ver en el cálculo del efecto reactivo de la emisión de gases en un cohete espacial. Estas conclusiones hacen pensar que la condición de compatibilidad supone, análogamente al caso cinemático, que no existe ningún sistema de coordenadas en que se anulen instantáneamente ni la diferencial de energía ni la de impulso. Para la interpretación ondulatoria, en este estado no existe un sistema de coordenadas en que se anule la frecuencia o la longitud de onda. Podemos representar este resultado en términos de la covelocidad (W) así:

$$\overline{W}\ dE = d\overline{P}$$

En este estado, la modificación de impulso del sistema es codireccional con la covelocidad W, por lo que fuerza y covelocidad tendrían direcciones paralelas.
En un caso general tomando V'=V, cuando la partícula experimente los dos tipos de interacción tenemos, haciendo la multiplicación escalar de 4.4 por **V** y sumando con 4.5

$$dE_a + dE_b \neq \overline{V} \bullet (d\overline{P_a} + d\overline{P}_b)$$

$$dE \neq \frac{d\overline{P}}{dt} \bullet d\overline{r} \Leftrightarrow dE \neq \overline{V} \bullet d\overline{P} \qquad (4.7)$$

Donde **dP** y **dE** son, respectivamente, la suma de los cambios de impulso y energía de 4.4 y de 4.5. Evidentemente las desigualdades se debe enteramente a 4.5.

Planteamiento de la mecánica de una partícula cargada y acelerada

El comportamiento de una carga eléctrica acelerada, con independencia de la fuerza aceleradora, es un problema límite de la física clásica. La radiación de un sistema de cargas es un hecho descrito en el teorema de Pointing; consecuencia lógica de las ecuaciones de Maxwell. El punto clave es la interpretación del vector de Pointing (**S**=**E**x**H**), que aparece en este teorema, como flujo de energía en base al principio de conservación de la energía de un sistema electromagnético. Desde esta perspectiva se puede pensar que la radiación, como la energía potencial, es un comportamiento asociado al sistema de cargas, no a las cargas individuales. En este sentido se habla en los textos de *radiación dipolar, cuadripolar…* **[3]**. Sin embargo en la teoría clásica se ve inmediatamente que la radiación de un sistema de cargas se puede calcular si se conoce el movimiento de dichas cargas, ya que esto es suficiente para determinar los campos que aparecen en el vector de Pointing. Hay una relación directa entre el movimiento del sistema de cargas y la radiación. H.A. Lorentz fue mas allá y amplió el resultado para una carga aislada que resulte ser acelerada de cualquier modo (campo magnético, gravedad,…),

independientemente de la existencia de una energía potencial electromagnética. Demostró que el campo en las proximidades de una carga con simetría esférica resulta distorsionado por los efectos conjuntos de la aceleración de dicha carga y la velocidad de propagación finita de las alteraciones del campo**[5]**. Esta distorsión genera una *"auto-fuerza"* neta del campo sobre la partícula, sobre su propia fuente, tal que el desplazamiento de esta fuerza puede representar, al menos en ciertos casos, la energía electromagnética radiada. De este modo Lorentz no atribuye la radiación a la aceleración relativa entre las cargas del sistema, tal como sería de esperar si hubiese relación con la energía potencial, sino a la *aceleración de una carga respecto de cualquier sistema de coordenadas inercial*. En cuanto a la conservación de la energía, la energía de radiación se extrae *directamente* de la energía mecánica de la partícula cargada, no directamente de la energía potencial del sistema electromagnético.
Este será el punto de vista de partida para el planteamiento del problema. Abraham y Lorentz dan una forma teórica para la fuerza de auto-frenado, sin embargo aquí solamente se supondrá su existencia y las propiedades que esta fuerza debería tener respecto de la radiación. En lo que sigue se distinguirá y se tratará de relacionar los conceptos de partícula (mecánica) y carga puntual (electromagnetismo). Como modelo electromagnético de la partícula se toma el de una carga puntual, con algún matiz adicional que se introducirá mas adelante. Una carga puntual acelerada emite energía e impulso en forma de radiación. La razón de esta atribución es que la energía **dEr** emitida al *campo de radiación* en un instante **dt**, se puede seguir hacia atrás en el tiempo hasta una acción ocurrida en el punto que ocupaba la carga en un tiempo pasado. Esta acción es un cambio en la velocidad del punto cargado, y por tanto la *partícula* siente de algún modo el efecto del aumento de energía **dEr.**

Otra propiedad de la radiación emitida es que, para un observador inercial en reposo instantáneo respecto del punto cargado, la radiación se emite de forma simétrica respecto de dicho punto, de forma que el impulso total emitido por la radiación(**dPr)** se anula **[3, 4]**. Si hacemos que la velocidad **v_** entre dos sistemas inerciales de coordenadas coincida con la velocidad **V_** de la partícula en el instante **dt_** entonces en el instante correspondiente $\mathbf{dt_+}$ la partícula está en reposo para el observador "+", y por tanto para el impulso de radiación instantáneo será $\mathbf{dPr_{+x}}$ =0. Esto conduce según las transformaciones de Energía-Impulso a la ecuación (4.5) para la relación entre energía e impulso de la radiación. Es decir, la radiación supone, inicialmente, un aumento de la energía interna o masa de la partícula. Analicemos la dinámica del sistema según la conservación de la energía-impulso.
La energía-impulso transferida por la fuerza externa a la partícula se invierte en:

A-Modificación de la energía-impulso del campo de la carga puntual.
B-Modificación de la energía-impulso de la partícula.

En cuanto a la modificación del campo, los resultados teóricos **[4]** indican la existencia de dos campos:

A.1-Un campo casi-estacionario, igual que el campo de una carga puntual que se mueve a velocidad constante, pero que depende de la velocidad retardada. Las líneas de este campo pasan por el punto cargado.

A.2-Un campo de radiación, independiente del anterior. Las líneas de este campo no pasan por el punto cargado.

Por tanto la modificación de energía-impulso del campo tiene dos componentes: la modificación de energía-impulso del campo casi-estacionario y la modificación de energía-impulso del campo de radiación. El concepto de *masa electromagnética*, como señala Feynman **[5]**, no está explicado coherentemente en electromagnetismo clásico, aunque existe evidencia experimental. En este punto voy a suponer que la modificación de energía e impulso del campo casi-estacionario de la carga puntual se puede representar considerando que la masa de la partícula contiene una parte que es de origen electromagnético.
Supongamos ahora que el *desplazamiento de una fuerza clásica*, cuyo punto de aplicación suponemos está en el punto cargado, ejerce una acción compatible con el principio de conservación de la energía-impulso en este contexto

$$dE = \vec{F} \bullet d\vec{r} = \vec{V} \bullet d\vec{P}$$
$$dE_p + dE_r = \vec{V} \bullet \left(d\vec{P_p} + d\vec{P_r} \right)$$

Donde el subíndice "*p*" se refiere a la partícula, el "*r*" a la radiación y "*V*" es la velocidad del punto cargado. De esta ecuación se deduce que, como los términos asociados a la radiación verifican la desigualdad (4.7), los términos asociados a la partícula también tienen que verificarla. Esto significa que la partícula está sometida a dos acciones, una acelerativa y otra que afecta a su masa:

$$dE^a{}_p + dE^m{}_p + dE_r = \vec{V} \bullet \left(d\overrightarrow{P^a{}_p} + d\overrightarrow{P^m{}_p} + d\vec{P_r} \right)$$

Donde los superíndices de las energías e impulsos hacen referencia a los casos descritos por las ecuaciones (4.4 subíndice "*a*") y (4.5 subíndice "*m*") . Note que se ha supuesto que la velocidad del punto cargado es igual que la velocidad de la partícula. Se ve inmediatamente que la ecuación anterior se puede desacoplar en estas dos

$$dE^a{}_p = \vec{V} \bullet d\overrightarrow{P^a{}_p}$$
$$dE^m{}_p + dE_r = \vec{V} \bullet \left(\frac{\vec{V}}{c^2} dE^m{}_p + \frac{\vec{V}}{c^2} dE_r \right)$$

Si mantenemos ahora que *la partícula* experimenta, en todo instante, solamente una acción de tipo *acelerativo* descrita por la primera ecuación, entonces hay que asegurar que la masa de la partícula permanece constante en todo el proceso. Para conseguir esto, la segunda ecuación debe cumplir

$$dE_r = -dE^m{}_p \quad (5.1)$$

Por tanto, siempre que haya radiación, hay una disminución de la energía interna de la partícula, y esta disminución cancela *exacta y simultáneamente*, la energía radiada. Para que la masa de la partícula se mantenga constante, esta disminución de energía de la partícula se debe superponer a un aumento equivalente *en la partícula*, es decir, la energía radiada es inicialmente una energía propia de la partícula. En resumen estamos suponiendo que la partícula es capaz de absorber y emitir energía en la forma descrita por las ecuaciones (4.4-5). La ecuación (5.1) expresa que estas acciones se compensan exactamente, de modo que la energía interna de la partícula, y por tanto su *masa*, es un parámetro *constante*. Este comportamiento de la partícula es análogo al de una tubería en régimen estacionario, en un instante dado tanta agua (energía-impulso) entra por un extremo como sale por el otro; sin embargo esta imagen, pasiva para la partícula en algo que afecta a su masa, parece poco probable. Según Abraham-Lorentz la fuente de esta "agua" son las alteraciones del campo propio de la partícula debidas a la aceleración. Esta situación no supone un desacoplo entre los términos acelerativos y los términos de radiación, *dEr* no puede ser arbitrario ya que la ley clásica de radiación de una carga acelerada relaciona la aceleración de una carga puntual con la potencia de radiación *dEr/dt*.

Note el lector que, como ya se ha dicho, el principio de relatividad hace problemático que las leyes físicas dependan de la existencia de acciones simultáneas debido a la relatividad de la simultaneidad.

Siguiendo con el razonamiento, tenemos una partícula sometida a una interacción de tipo acelerativo según las ecuaciones

$$\vec{f} \bullet d\vec{r} = dE^a{}_p \, ; \vec{f} \bullet dt = d\overrightarrow{P^a{}_p} \qquad (5.2)$$

La experiencia en aceleradores de partículas indica que, asociado a la radiación, hay un efecto de *frenado* sobre la partícula. Es necesario algún acoplo entre la dinámica de la partícula y la radiación que esta emite. La forma clásica de representar esto con las ecuaciones (5.2) es introducir una fuerza adicional de *auto-frenado* cuyo origen está en el campo propio de la partícula acelerada. Esta fuerza es la que se ha mencionado antes; calculada teóricamente por Abraham y Lorentz. Por tanto, la fuerza que aparece a la izquierda en las ecuaciones (5.2) es composición de otras dos: la fuerza externa y la fuerza de auto-frenado. Los términos de la derecha corresponden a la modificación de energía cinética e impulso de una partícula de masa constante.

Resumiendo la situación, tenemos los siguientes *supuestos*:

1-La masa electromagnética resume las modificaciones de energía-impulso del campo de la partícula y es una parte aditiva de la masa mecánica.

2-La velocidad del punto cargado y de la partícula es la misma.

3-La fuerza externa tiene un efecto exclusivamente acelerativo.

4-Se deduce que el aumento de energía interna de la partícula asociado a la radiación se compensa simultáneamente con un término de disminución de energía interna: la partícula debe emitir energía y su masa es constante.

5-Existe una fuerza de auto-frenado entre la partícula y su campo.

El planteamiento intuitivo de la fuerza de auto-frenado $\boldsymbol{f_{af}}$ es que, para cumplir con la conservación de la energía, el efecto energético de esta fuerza es restar a la partícula una energía cinética equivalente a la de radiación, y de este modo provocar su frenado. De la misma forma, la fuerza de auto-frenado debe contemplar la *conservación del impulso:*

$$\overrightarrow{f_{af}} \bullet d\vec{r} = -dE_r \;;\; \overrightarrow{f_{af}} \bullet dt = -d\overrightarrow{P_r}$$

Es inmediato comprobar que estas relaciones son *incompatibles*, dado que los términos de radiación cumplen (4.5) y la fuerza de auto-frenado cumple (4.4). Parece que la introducción de la fuerza de auto-frenado no soluciona el problema del acoplo entre la dinámica de la partícula y la emisión de radiación. Sin embargo notemos que la ecuación (4.7) tiende a ser una igualdad en el límite de la "velocidad" de la luz de forma que *todas las interacciones de la partícula tienden al comportamiento acelerativo descrito en (4.4) en el límite de la velocidad de la luz, o a un estado de compatibilidad*.
Esto no debería extrañarnos conociendo la versión relativista de la mecánica de Newton: una dinámica acelerativa asegura la necesidad de una energía infinita, imposible de suministrar, para que una partícula llegue a la "velocidad" de la luz. Por tanto, al menos como límite se puede mantener la fuerza de auto-frenado junto con el resto de los argumentos utilizados. ¿Hay algo mas allá de este límite…?.

Desde el Límite

La fuerza de Lorentz :**F**=q(**E**+**v**x**B**), introduce la masa mecánica en el conjunto de las ecuaciones de Maxwell; en particular introduce la energía cinética en el teorema de Pointing. Consecuentemente introduce también el concepto de corriente eléctrica como el movimiento de partículas cargadas. El éxito *conjunto* de la mecánica y del electromagnetismo clásico depende de la posibilidad de reducir los problemas al comportamiento de algún tipo de partículas incondicionalmente estables, es decir, su masa es un parámetro constante. H.A Lorentz hizo este planteamiento para su teoría del electrón. Esta condición hace que estas teorías sean sistemas cerrados, circulares, auto-consistentes. Los problemas se enfocan en relacionar el movimiento de las partículas con fuerzas y campos y al revés. En la mecánica de Newton sabemos que si hay una fuerza sobre una partícula esta se acelera y que si se acelera entonces está sometida a una fuerza. La fuerza de auto-frenado se puede introducir utilizando esta lógica clásica, pero esto conduce a plantear el “subproblema” de la estructura y estabilidad interna de las partículas cargadas [5]. Sin embargo, el problema de la estabilidad no es totalmente extraño al electromagnetismo. La ley de Lenz dice que las corrientes asociadas a fuerzas electromotrices inducidas en un conductor por alteración del flujo magnético externo, generan campos magnéticos que, a su vez, tienden a cancelar las alteraciones del flujo magnético externo. Este comportamiento se puede incluir dentro del principio de Le Châtelier [6]. Según este principio, si un sistema en equilibrio estable es sometido a *tensión* entonces reaccionará para *compensar* esa tensión. Por otro lado, la emisión de radiación de una partícula real es discontinua en el tiempo. Por tanto no resulta difícil imaginar una capacidad de acumular energía interna para la partícula. Esta capacidad de “entrar en tensión” es la otra cara de la moneda de la fuerza de auto-frenado. Esta fuerza es necesaria para compensar tensiones internas en las partículas relacionadas con la emisión de radiación. Si la estabilidad de algunas partículas, como pueda ser el electrón, tiene una base electromagnética, entonces solo se necesita la acción de este campo; tensión y compensación deben ser fases de un mismo proceso: la acción del campo electromagnético sobre la partícula. Como se vio, según el principio de relatividad es conveniente que las acciones de tensión-compensación no sean simultáneas. Intentemos una explicación que considere estas acciones como parte de un proceso de tensión-compensación que afecta a la partícula. El carácter del tiempo asociado a este proceso puede deducirse de las conclusiones a que hemos llegado. Los supuestos 1 al 5 son válidos en el límite de altas velocidades. En particular según el supuesto 4 el proceso de tensión-compensación es instantáneo, no tiene duración. Por tanto, como condición cinemática, la duración de dicho proceso disminuye a medida que la velocidad de la partícula tiende a la “velocidad” de la luz. Por tanto esta duración, que imaginamos asociada una acción local sobre la partícula, no se transforma como el tiempo local (2.4) de una acción física única. Esto indica que la acción no puede considerarse local, es decir, no existe ningún sistema inercial de coordenadas en que la acción se verifique en un punto (y por tanto en una partícula). Parece mas adecuado asociar el proceso con el periodo de alguna onda de tipo electromagnético o cuántico.

Si la onda cuántica temporal tiene que ver con la radiación entonces la onda espacial tiene que ver con el efecto acelerativo de las fuerzas. Si la onda cuántica es un objeto con entidad física, entonces debemos aceptar que es algo con capacidad de acción y que puede absorber o ceder energía. Pero si esta onda se modifica para absorber o ceder el aumento de energía interna de la partícula, entonces habríamos encontrado un foco para modularla, lo cual no es posible por principio. Para explicar esto acudo a las relaciones de Heisenberg y considero que existen unos límites para la modulación de la onda cuántica acotados por una expresión del tipo

$$\Delta E\,\Delta T \approx h$$

Esta expresión define un límite temporal, una *condición de contorno temporal*. Si una onda colapsa e intercambia una energía ΔE, entonces el tiempo de su modulación ha sido ΔT; además este tiempo tiene características no-locales y se puede asociar al periodo de una onda. Si un observador quiere modular la onda cuántica de un electrón, deberá realizar al menos una interacción mínima (fotón) con la partícula. Pero esto ya supone el colapso de dicha onda, dado que la energía transferida y el tiempo empleado son compatibles con las condiciones de contorno de la onda cuántica. El resultado del colapso es un cambio de la onda cuántica. Según la mecánica cuántica, sobre este cambio de *estado* solo es posible conocer una cierta distribución de probabilidad; lo cual supone que el observador de dicha onda no puede identificarla como procedente de un origen o foco determinado. De este modo, el observador sigue sin poder modular la onda cuántica (aun cuando encuentre un foco), y por tanto no puede transferir información a velocidad super-lumínica. Note el lector que el principio de constancia de la "velocidad" de la luz en el vacío implica la posibilidad de identificar señales luminosas; de poder decir que la señal luminosa que parte de su foco en $A(x_a,y_a,z_a,t_a)$ es *la misma* que ahora llega a $B(x_b,y_b,z_b,t_b)$. Aunque la velocidad de la luz en el vacío es independiente del foco que la genera, la luz aún tiene un origen reconocible. Identificamos la luz a partir de su procedencia y la consideramos como símbolo representativo del mismo objeto que la emite. En nuestra vida diaria siempre suponemos esta asociación, aunque a veces la asociación esté mal hecha. Esta es una idea profunda de la que dependen nuestra creencia en un mundo externo no subjetivo, así como muchas técnicas científicas: telecomunicaciones, espectroscopia, teledetección, radioastronomía… Sin embargo, a nivel cuántico *por principio* no se puede distinguir un fotón de otro. Esta partícula no tiene la identidad individual que se ha supuesto para las señales luminosas. La detección de la señal luminosa supone la detección de fotones; por tanto debe ser posible asociar fotones individuales a señales (ondas) luminosas para que el principio de constancia de la velocidad de la luz tenga sentido físico. La dualidad onda-partícula dice que fotones y señales luminosas no son independientes.

El desarrollo del principio de relatividad y de la dualidad onda-partícula conduce a un cambio radical de nuestras ideas de *Espacio, Tiempo, Movimiento, Materia y Vacío*. Mientras que las ideas clásicas de espacio y tiempo subsisten a bajas velocidades, la idea clásica de partícula cambia radicalmente: la materia ya no se compone de puntos con masa y carga. El carácter ondulatorio es un rasgo intrínseco de la materia y del vacío. La representación mas elemental de la materia es una pareja de ondas, espacial y temporal, con propiedades muy diferentes pero que permanecen asociadas formando las *componentes* de una unidad mas profunda. La onda espacial necesita un espacio simultáneo pero no tiene limitaciones temporales; lo mas sencillo es pensar que se trate de las dimensiones de lo que llamamos partícula; por tanto al hablar de partícula nos estamos refiriendo solo a una de las componentes. La onda temporal necesita una *vibración temporal* que no se anule para ningún observador, pero no tiene limitaciones espaciales. No se puede encontrar un foco para estas ondas, en una situación real no tiene por que haber un oscilador con la misma frecuencia que estas ondas; recuerde el lector el efecto Compton. Además existen dos formas de interacción para la partícula. Las dos interacciones pueden ser *anuladas* *parcialmente* (impulso o energía) localmente para el observador inercial en reposo instantáneo con la partícula. En el caso de la gravedad se supone la existencia de un observador inercial instantáneo para el que la interacción gravitatoria se anula totalmente. También existe la posibilidad de estados de movimiento e interacción indeterminados. En el caso de una carga acelerada vemos la necesidad de acciones no-locales. La aceleración provoca que el campo acumule energía en reposo en la partícula, energía que debe ser radiada si la partícula es capaz de mantener sus parámetros de masa y carga. El paso de energía en reposo a energía radiante, y por tanto la estabilidad de las partículas, es un proceso discontinuo de naturaleza cuántica. Aparece un nuevo objeto de estudio en física: el *vacío*. Además de sus propiedades geométricas aparece también con propiedades ondulatorias referentes a la capacidad intrínseca de propagar ondas. La relatividad especial define una relación intrínseca entre espacio y tiempo; la relatividad general una relación intrínseca espacio-tiempo-materia; de lo aquí expuesto la onda cuántica representa una relación intrínseca materia-vacío[**19**]. En la física clásica *espacio, tiempo, materia y vacío* son conceptos independientes e indudables, en el sentido de la filosofía cartesiana. Estos conceptos solo se relacionan clásicamente a través del *movimiento inercial* de una partícula. La física actual parece ir profundizando poco a poco esta primera aproximación clásica sobre la unidad que forman *espacio-tiempo-materia-vacío.* **(n-12)**

4-COVELOCIDAD, DOMINIOS CINEMÁTICOS Y ONDAS PILOTO.

En relatividad se introduce el tiempo local invariante de una partícula como el que marca un reloj solidario a la partícula móvil. Mas lógico parece tomar una pequeña distribución esférica de relojes alrededor de un punto y llevarla al límite de la partícula. Veríamos así que existe velocidad y covelocidad en el límite en que esa distribución de relojes tiende al límite puntual. La covelocidad aparece así asociada a una acción simultánea en la partícula, lo cual no deja de ser una presunción sobre el comportamiento interno de las partículas. Sin embargo es probablemente necesario tener alguna hipótesis mínima sobre lo que ocurre en el interior de las partículas, a condición de saber cuales son los límites de esta hipótesis. En lo que sigue continuaremos explorando el concepto de covelocidad integrando la idea de onda-piloto, original de De Broglie. Aquí se exponen posiblemente ideas nuevas. Intentaré un desarrollo lo mas sencillo posible.

¿Qué significa transportar energía en el tiempo?
Repasemos la clasificación de tipos de onda en relación a los conceptos de energía/impulso. Primero decir que en relatividad no puede hablarse de dos principios de conservación por separado, sino que ha de hablarse del principio de conservación unificado de energía-impulso. Esto supone que el impulso mecánico debe entenderse como la transferencia de energía de una parte a otra en el espacio. Vamos ahora con esa clasificación:

1-Existe un observador inercial que no e capaz de medir la oscilación de la onda con un reloj en reposo: w_=0.
Según las ecuaciones (4.1), para este observador la energía de la onda se anula, aunque no lo hace el impulso mecánico. Para este observador no hay transporte real de energía en su sistema de coordenadas, aunque si lo hay para cualquier otro observador: es la excepción que confirma la regla. El carácter fundamental de estas ondas es el transporte de energía y esto es así por que su impulso mecánico no puede anularse para ningún observador, según (4.1). Es un hecho curioso el que estas ondas puedan detenerse pero esto no anule su impulso mecánico; de modo que se puede medir su impulso con una regla.

2- Existe un observador inercial que no e capaz de medir la longitud de onda con una regla en reposo: k_=0.
Según las ecuaciones (4.1), para este observador el impulso mecánico de la onda se anula, aunque no la energía de la onda. Es decir no transportan impulso mecánico de una parte a otra del espacio, sino que *transportan energía de una parte a otra del tiempo*. Así se puede interpretar la expresión

$$d\overline{P} = \overline{W}\, dE \qquad (6.2)$$

donde el factor cinemático es la covelocidad y representa un desplazamiento relativo en el tiempo. Estas ondas *transportan* energía en el *tiempo* y por tanto su movimiento natural es la covelocidad. Es decir, para un punto dado de nuestro sistema de coordenadas suponen un transporte de energía directamente de un foco del pasado o en el futuro. Es una energía que no viene de otro *sitio*, sino de *antes* o de *después*.

Tomemos como ejemplo el caso de la radiación de una carga acelerada. En el sistema inercial en que la partícula está en reposo instantáneo tenemos que el desplazamiento correspondiente dr = 0: la partícula no se mueve en el instante dt. Pero en ese mismo instante ha emitido cierta cantidad de radiación. Esta energía no proviene de otra parte, sino de *antes*. Esta radiación proviene de un transporte en el tiempo, no en el espacio. Esto induce a pensar que el carácter básico de las ondas cuánticas del caso 2 es que representan *transformaciones de energía*; en concreto, según lo visto en el caso de radiación de una carga acelerada, de energía-reposo a radiación. Por tanto se pueden imaginar estados ondulatorios de conversión de radiación en energía-reposo y al revés. Como motivación para el lector, recuerde el concepto de flecha del tiempo termodinámica relacionada con el carácter irreversible de las transformaciones energéticas trabajo/calor.

Sobre los dominios cinemáticos

Cuando abordamos la cinemática vimos la posibilidad de sistemas compatibles en los que el producto escalar de la velocidad por la covelocidad es invariante, sin embargo podemos ampliar el resultado con estas dos características invariantes, como puede demostrar fácilmente el lector

$$\overline{W} \bullet \overline{V} = 1; \;\; \overline{W} \bullet \overline{V} \neq 1$$

El caso de la radiación de una carga acelerada nos indicó que la covelocidad de una partícula en este caso es $\mathbf{w}=\mathbf{v}/c^2$, siendo **v** la velocidad de la partícula y por tanto el producto escalar $\mathbf{v}*\mathbf{w} <1$. La mecánica clásica corresponde al límite en que la radiación es despreciable; pero la covelocidad sigue manteniendo su valor. Por tanto podemos plantear la existencia de dos dominios cinemáticos caracterizados por

$$\overline{W} \bullet \overline{V} = 1 \quad (6.3.a)$$
$$\overline{W} \bullet \overline{V} < 1 \quad (6.3.b)$$

En el caso de una carga acelerada vimos la existencia de estados intermedios asociados a la emisión de radiación acotados por la condición

$$\Delta E \, \Delta T = h$$

Podemos interpretar estos estados como un cambio de dominio: del dominio “real” o clásico (6.3.b) al dominio cuántico (6.3.a). De esta forma la partícula radiante está de algún modo oscilando entre esos dos dominios cinemáticos.

Dominio cinemático cuántico y principio de Heisenberg

Sea una partícula en el dominio cinemático (6.3.a). Si elijo un sistema de coordenadas inercial tal que se mueva con una velocidad **v**=c² **w**, donde **w** es la covelocidad instantánea de la partícula, en ese sistema de referencia queda anulada instantáneamente la covelocidad según 3.2.b. En este dominio cinemático la velocidad toma un valor infinito; mientras que el impulso mecánico está perfectamente determinado si interpretamos (6.2) como su “incertidumbre” o *amplitud de modificación posible*. Dado que no podemos aceptar una velocidad infinita, deducimos que en el dominio (6.3.a) la covelocidad de una partícula no puede anularse en condiciones físicamente posibles.

Del otro lado, si elijo el sistema de coordenadas de modo que se anule la velocidad de la partícula, la covelocidad toma un valor infinito a la par que la posición de la partícula está perfectamente determinada en dicho sistema de coordenadas. Razonablemente la covelocidad no puede tomar un valor infinito, ya que puede conducir a energías infinitas. Si aceptamos esto, entonces en el dominio cinemático cuántico (6.3.a) la covelocidad, y por tanto también la velocidad, debe tomar un *valor finito no nulo* en cualquier sistema de referencia inercial. Encontrar un sistema de coordenadas en que se anulen tanto la velocidad como la covelocidad de una partícula en el domino cuántico supone que

$$\overline{V} = c^2\overline{W} \rightarrow \overline{V} \bullet \overline{V} = c^2\overline{W} \bullet \overline{V} \rightarrow V^2 = c^2$$

es decir, no es posible ya que requiere un sistema de coordenadas que se mueva a la velocidad de la luz. Estas consideraciones nos llevan a cuestionar la existencia, en el dominio cinemático cuántico, de un sistema de coordenadas inercial propio solidario a una partícula, en el que la partícula se pueda considerar en reposo en algún sentido. Por el contrario, para una partícula en el dominio cuántico la utilización de los sistemas de coordenadas inerciales implica aceptar una cierta indeterminación, *amplitud* o falta de información en la posición y el impulso de la partícula, de acuerdo con el principio de incertidumbre de Heisenberg. Esta postura necesita de alguna generalización de las transformaciones de Lorentz que incluyan el comportamiento específico de un partícula en el dominio cinemático cuántico. Según la línea de pensamiento que se ha seguido podemos fácilmente generalizar las transformaciones de Lorentz de esta forma

$$\begin{aligned}
\Delta t_+ &= (\Delta t_- - W_{x-}\Delta x_-)\beta^{-1} \\
\Delta x_+ &= (\Delta x_- - V_{x-}\Delta t_-)\beta^{-1} \qquad \beta = \sqrt{1-\overline{W} \bullet \overline{V}} \\
\Delta E_+ &= (\Delta E_- - V_{x-}\Delta P_{x-})\beta^{-1} \\
\Delta P_{x+} &= (\Delta P_{x-} - W_{x-}\Delta E_-)\beta^{-1}
\end{aligned}$$

En el dominio cinemático clásico tomaremos la covelocidad asociada a un sistema de coordenadas inercial como **W**=**V**/c² y obtenemos las transformaciones de Lorentz conocidas. En el dominio cuántico la transformación solo tiene sentido si **W** y **V** son valores asociados a alguna partícula física en el dominio cuántico y **W*****V**=1; es decir para transformaciones asociadas al sistema de coordenadas propio de la partícula. El lector verá rápidamente que las condiciones de compatibilidad asociadas al dominio cuántico producen una indeterminación del tipo 0/0 en las transformaciones anteriores. La velocidad de la partícula transformada a su sistema propio es igualmente indeterminada. Si aplicamos las transformaciones anteriores a la relación de Heisenberg *Δx.Δp >h,* que consideramos debe ser invariante y para un caso unidimensional tenemos

$$\Delta x'\Delta p' = (\Delta x\Delta p - W\Delta x\,\Delta E - V\Delta p\Delta t + WV\Delta E\Delta t)\beta^{-2} > h$$

que, tras aplicar la relaciones de compatibilidad lleva de nuevo a una indeterminación de la forma *Δx'.Δp'* = 0/0 > h para el sistema propio de la partícula. En estas condiciones podemos *postular* ,desde luego con base experimental, el principio de Heisenberg; aprovechando que la relatividad se muestra indeterminada en este aspecto.

Incorporando la onda piloto de De Broglie
Podemos introducir fácilmente la onda piloto en el dominio cinemático de compatibilidad utilizando el invariante de velocidades

$$\overline{V} \bullet \overline{W} = 1 \rightarrow \Delta\overline{r} \bullet \overline{W} = \Delta t \rightarrow \Delta\overline{r} \bullet \omega\overline{W} = \omega\Delta t$$

Considerando ω como frecuencia de onda, esta última relación se puede entender como una condición de constancia de fase para una onda, lo cual determina precisamente la velocidad de fase si suponemos que el vector de onda *k* vale

$$\overline{k} = \omega\overline{W} \Rightarrow \overline{k} \bullet \overline{V} = \omega \quad (6.4)$$

la última relación, que es un *invariante* entre sistemas inerciales como el lector puede comprobar, se obtiene multiplicando escalarmente por ***V*** aplicando la condición asociada al dominio cinemático de compatibilidad.

Sobre la constante de Planck
Consideremos los siguientes resultados:

1-En el dominio cuántico la covelocidad tiene la misma dirección que el incremento o amplitud de impulso mecánico.

2-La introducción de la onda piloto indica que la covelocidad cumple, según (6.4)

$$\overline{W} = \overline{k} / \omega$$

Tomemos ahora la identidad vectorial

$$\overline{V} \times (\overline{k} \times \Delta\overline{p}) = \overline{k}(\overline{V} \bullet \Delta\overline{p}) - \Delta\overline{p}(\overline{k} \bullet \overline{V})$$

donde V es la velocidad de la partícula, k es el vector de onda piloto, y Δp es el cambio de impulso de la partícula. Aplicando las condiciones *a* y *b* anteriores y las de compatibilidad tenemos

$$\overline{k}\Delta E = \Delta\overline{p}\,\omega \Rightarrow \frac{\Delta E}{\omega} = \frac{\Delta p_x}{k_x} = \frac{\Delta p_y}{k_y} = \frac{\Delta p_z}{k_z}$$

El lector puede comprobar fácilmente que la expresión anterior es *invariante* y compatible con la existencia de la constante de Planck. Lo único que se requiere para llegar desde aquí a la constante de Planck es que el cociente entre energía y frecuencia no pueda hacerse tan pequeño como se quiera, es decir, que exista una cota inferior absoluta de este cociente.

Casos dinámicos en sistemas compatibles

Podemos plantear una aproximación a la dinámica clásica de una partícula utilizando un sistema de referencia donde la amplitud de posición de dicha partícula sea despreciable frente a la posición "real"(promedio). Aunque veremos que esto no es suficiente para eliminar la necesidad de incorporar una amplitud de posición. Consideremos la siguiente tabla de símbolos

$\overline{p} = m\overline{v}$	$\Delta\overline{p} = \hbar\overline{k}$
$E = mc^2$	$\Delta E = \hbar\omega$
$\overline{L} = \overline{r} \times \overline{p}$	$\Delta\overline{L} = \overline{r} \times \Delta\overline{p}$

Sea la velocidad de la partícula (*v*), la posición radial de la partícula (*r*) y el vector de onda de la onda piloto (*k*); podemos plantear la siguiente identidad vectorial

$$\overline{v} \times (\overline{r} \times \overline{k}) = \overline{r}(\overline{k} \bullet \overline{v}) - \overline{k}(\overline{r} \bullet \overline{v})$$

Si multiplicamos esta expresión inicialmente por el escalar ***mh**,* siendo **m** la masa de la partícula y **h** la constante de Planck y después hacemos el producto escalar por el vector de posición de la partícula **r** obtenemos, aplicando resultados anteriores y la tabla de símbolos

$$\overline{L} \bullet \Delta\overline{L} = mr^2\Delta E - (\overline{r} \bullet \Delta\overline{p})(\overline{r} \bullet \overline{p}) \quad (6.5)$$

Partícula en una trayectoria circular

Supongamos ahora la partícula siguiendo una trayectoria circular plana con velocidad constante en módulo. Referimos el vector de posición al centro de la circunferencia y dado que p y r son perpendiculares tenemos, según 6.5

$$\Delta E = \frac{L}{mr^2}\Delta L = \omega\Delta L$$

donde se ha introducido la frecuencia de giro de la partícula en función del momento angular. Esta frecuencia de giro es igual que la frecuencia de la onda piloto, según las condiciones de compatibilidad; de modo que a lo largo de la trayectoria la onda vuelve en fase sobre si misma. Debido a la existencia de la constante de Planck debemos aceptar que ΔL no puede anularse; la interpretación de esto atañe al principio de incertidumbre.

Partícula oscilante

Podemos analizar el caso de un oscilador lineal. Suponemos una oscilación armónica simple con frecuencia bien definida y punto de equilibrio r0 alejado del centro de coordenadas. Podemos elegir el sistema de coordenadas de modo que sea L=0; suponiendo una dinámica unidimensional tenemos según 6.5

$$mr^2\Delta E = (r\Delta p)(mr\omega\Delta r) \to \Delta E = \omega\Delta L';\quad \Delta L' = \Delta r\Delta p;\ \Delta r = amplitud\ \ de\ posición$$

y obtenemos para las *amplitudes* una relación similar a la anterior. La frecuencia de oscilación es igual que la frecuencia de la onda piloto, según las condiciones de compatibilidad. Debido a la constante de Planck ΔL' no debe anularse y obtenemos un resultado compatible con el principio de Heisenberg para la posición y el impulso mecánico de una partícula. Note el lector que en este caso la onda piloto necesita unas condiciones de contorno externas en los límites de oscilación, mientras que en el caso anterior dicha onda "depende de si misma".

El lector puede comprobar para los dos casos una relación de este tipo para las amplitudes de energía-impulso

$$E\Delta E = c^2 p\Delta p \quad (6.5.1)$$

donde (*E,p*) es la energía-impulso de la partícula y (*ΔE,Δp*) es la amplitud de energía-impulso de la onda cuántica.
Si interpretamos las amplitudes como variaciones o si se quiere *errores de medida*, lo anterior corresponde a una variación de la expresión del módulo del cuadrivector energía-impulso

$$E^2 = c^2 p^2 + (mc^2)^2 \quad (6.6)$$

para pequeñas amplitudes, donde la masa de la partícula se toma constante.
También en los dos casos, tomando las expresiones de la velocidad de la partícula respectivamente como *w*r* ó w *Δr, velocidad que suponemos menor que la de la luz, se llega a este resultado

$$(\Delta E)^2 < (c\Delta p)^2 \Leftrightarrow \Delta p > \frac{1}{c}\Delta E$$

En el contexto de este trabajo podemos interpretar esto, de acuerdo con (6.2) diciendo que la covelocidad es superior al inverso de la velocidad de la luz *1/c*. Alternativamente se puede interpretar este resultado según (6.6) como una *masa imaginaria* asociada a la onda cuántica; las partículas virtuales de la electrodinámica cuántica también presentan esta característica. La relatividad puede interpretar el concepto clásico de masa como energía en reposo y vemos que un valor imaginario para la masa corresponde a una energía que no puede considerarse en reposo para ningún observador (*taquión*).
Los casos analizados representan modelos cinemáticos posibles de acoplo entre la onda piloto y la partícula en sistemas compatibles y no hacen referencia en general a la existencia de fuerzas externas de una forma determinada. Según nuestra interpretación la energía ΔE que encontramos en estas expresiones es la energía asociada a la onda piloto, es decir, es la amplitud de onda de la onda

piloto. Representa una energía ligada al sistema-compatible que oscila entre radiación y energía-reposo. La onda piloto puede tener fases con energía negativa, esto no tiene por que representar un problema *si* partícula y onda forman un todo físicamente indivisible y la suma de energías de la partícula y de la onda piloto sea positiva.
A partir de 6.5 podemos plantear el caso en que las amplitudes (ΔE, Δp) de energía-impulso sean iguales que los valores (E, p) correspondientes de la partícula. Esta condición en la ecuación 6.5 produce el resultado $E=pc$, característico de la luz o en general de partículas sin masa en reposo como el fotón. Generalizando este resultado podemos introducir dos casos a partir de 6.5:

1-Existe una situación física posible en la cual $p = \Delta p$. Esto conduce a una amplitud para la energía de la partícula de valor

$$mc^2 \Delta E = (pc)^2$$

2-Existe una situación física posible en la cual $E = \Delta E$. Esto conduce a una amplitud para el impulso mecánico de la partícula de valor

$$(mc)^2 = p\Delta p$$

en este caso la amplitud de impulso tiene en *módulo* el valor $\Delta p = mc^2/v$,donde v es la velocidad de la partícula. Este resultado será utilizado mas adelante.

Un fotón penetra en un medio transparente

Existe una controversia clásica sobre lo que ocurre con el impulso mecánico de un fotón que penetra en un medio transparente. Se puede pensar que, dado que la velocidad de la luz disminuye en el medio transparente, entonces el impulso mecánico del fotón disminuye. Pero si la velocidad de la onda disminuye y no se modifica la frecuencia, entonces la longitud de onda disminuye y según (4.1) el impulso mecánico del fotón aumenta. Parece una contradicción, pero podemos plantearlo en el contexto de nuestras ideas. Supondremos que el fotón que pasa al medio transparente se mantiene en el dominio cinemático cuántico y que se verifica $E = mc^2 = \Delta E = h\omega$ *en todo momento.* De esto deducimos que el momento de la partícula disminuye según la relación $p=mc/n$; siendo n=c/v el índice de refracción del medio. Además el momento de la onda cuántica debe aumentar según la relación $\Delta p = mcn$ de modo que el producto de los dos impulsos se mantenga igual al cuadrado de la energía según (6.5.1). Por tanto los dos puntos de vista aparentemente opuestos parecen estar contemplados en este planteamiento. Hay que decir que existe soporte experimental para las dos conclusiones; es decir, existen situaciones físicas en que se pone de manifiesto el impulso de la partícula y otras en que se pone de manifiesto el impulso de la onda. Este impulso sería lo que en la bibliografía aparece como *pseudomomento* [**16**]. Mas adelante se ofrece una interpretación sobre la naturaleza de este pseudomomento.

Dominio cinemático de las ecuaciones de De Broglie

El *sistema* de ecuaciones de De Broglie (4.1) se pueden expresar según la tabla de símbolos anterior como *E=ΔE, P=ΔP*, de lo que se puede deducir que

$$\overline{W} = \frac{\Delta \overline{P}}{\Delta E} = \frac{\overline{P}}{E} = \frac{\overline{V}}{c^2} \Rightarrow \overline{W} \bullet \overline{V} = \frac{V^2}{c^2} < 1$$

lo que sitúa el *sistema* de ecuaciones en el dominio cinemático clásico.

Dominios cinemáticos, emisión de radiación y modelo atómico

En el dominio cinemático cuántico, a partir del impulso mecánico de una partícula podemos, haciendo uso de $E=mc^2$ y $P=mV$, plantear esta identidad:

$$\overline{P_p} \bullet \Delta \overline{P}_o = m\overline{V_p} \bullet \overline{W_o} \Delta E_o \rightarrow c^2 \overline{P}_p \bullet \Delta \overline{P_o} = E_p \Delta E_o \quad (6.7)$$

donde el subíndice "*p*" hace referencia a la partícula y el "*o*" a la onda cuántica. El resultado (6.7) indica que el sistema onda-partícula se comporta como un *sistema conservativo* en el dominio cuántico. Es una expresión similar a la que se obtiene en la sección de problemas para un choque elástico entre partículas: ec.(7.1). En el lenguaje de la electrodinámica cuántica se diría que la onda cuántica se comporta como una partícula virtual que choca con la partícula real en un proceso regular de emisión/reabsorción similar a un oscilador cuántico. Es fácil ver que (6.7) también se verifica para una partícula clásica en un campo conservativo si interpretamos (ΔE, ΔP) como la acción instantánea del campo conservativo sobre la partícula: el incremento de energía potencial y el incremento en impulso debido a la fuerza. Por tanto es posible *acoplar* o factorizar estas dos acciones para una partícula en un campo conservativo

$$c^2 \overline{P_p} \bullet \left(\Delta \overline{P}_o + \Delta \overline{P}_c \right) = E_p \left(\Delta E_o + \Delta E_c \right) \quad (6.8)$$

donde el subíndice "*c*" se refiere a la acción del campo sobre la partícula. En suma es posible un acoplo de las distintas acciones de modo que se verifique

$$\Delta \overline{P}_o + \Delta \overline{P}_c + \Delta \overline{P}_p = 0$$
$$\Delta E_o + \Delta E_c + \Delta E_p = 0$$

de este modo 6.8 se convierte en una variación de 6.6 con masa de la partícula constante. Si aceptamos que las amplitudes de energía-impulso de la onda cancelan en promedio, entonces la energía mecánica total (partícula + campo) se conserva en promedio; aunque puntualmente se puede superar el valor promedio clásico; esto puede ser la base física del efecto túnel. En este dominio la radiación está de algún modo confinada en el sistema partícula-onda-campo y es reabsorbida periódica y reversiblemente por el sistema. Una acción contrarresta la otra periódicamente de modo que son posibles, como sabemos, estados estacionarios en sistemas de partículas conservativos dentro del dominio cuántico.

En el dominio cinemático clásico será

$$c^2\overline{P}_p \bullet \Delta\overline{P_o} = mc^2\overline{V_p} \bullet \overline{W_o}\Delta E_o < E_p\Delta E_o \rightarrow \Delta E_o > \overline{V_p} \bullet \Delta\overline{P}_o \quad (6.9)$$

Se vio anteriormente que la covelocidad aparece relacionada con la radiación de una carga acelerada. En el caso clásico los incrementos de energía-impulso de la onda en (6.9) se pueden interpretar como asociados a la emisión de radiación de una carga acelerada ya que se verifica la desigualdad (6.9)

$$\Delta E_{rad} > \overline{V} \bullet \Delta\overline{P_{rad}} = \frac{V^2}{c^2}\Delta E_{rad} \quad (6.9.1)$$

En suma tenemos que una partícula puede emitir radiación detectable solamente en el dominio clásico, ya que en el dominio cuántico el sistema partícula-onda-campo puede conservar la energía. Asociando los electrones atómicos al dominio cinemático cuántico tenemos una posibilidad de justificar la estabilidad del modelo atómico de Rutherford.

De la expresión 6.2 podemos deducir qué desplazamiento asociado a la *fuerza de radiación* $\Delta P_{rad}/\Delta t$ producirá el intercambio de energía ΔE_{rad} en el dominio cinemático clásico, resultando

$$dE_{rad} = \frac{d\overline{P}_{rad}}{dt} \bullet d\overline{r}_o = \frac{dE_{rad}}{dt}\overline{W} \bullet d\overline{r}_o \Rightarrow (\overline{W} = \overline{V}/c^2) \Rightarrow \overline{V} \bullet \frac{d\overline{r}_o}{dt} = c^2$$

es decir, en desde el dominio cinemático clásico el desplazamiento buscado corresponde con la *velocidad de fase* de un grupo de ondas que se mueven a la velocidad de la luz. Podemos llamar *desplazamiento de onda* a este concepto; es como si la fuerza de radiación actuase *directamente* sobre una onda, no sobre una partícula. Note el lector además que la característica de este desplazamiento se puede ajustar al dominio cinemático cuántico : W*V=1 haciendo $W=1/c^2 dr_0/dt$; por lo que podemos pensar que el desplazamiento de onda, y por tanto la radiación, está asociado a una modificación de la covelocidad de la partícula por cambio entre dominios cinemáticos clásico - cuántico. En el contexto de este trabajo podemos interpretar la fuerza de radiación actuando sobre una onda cuántica y el desplazamiento de onda correspondería a su modulación; modulación que no puede ser continua en el tiempo, como pone de manifiesto la existencia de fotones; esto enlaza con el capítulo 3 en la sección *Planteamiento de la mecánica de una partícula cargada y acelerada*, en la que se hablaba de asociar la radiación de una carga acelerada a una acción no local. En este contexto, la acción directa sobre una onda cuántica corresponde a una acción no local. Las relaciones de De Broglie son compatibles con estas idéas. Asumiendo que el desplazamiento de onda y el de la partícula son paralelos, lo cual podemos interpretar como una partícula en un medio isótropo y homogéneo como el vacío:

$$mc^2 = m\frac{\Delta r_o}{\Delta t}V = m\lambda\nu V = h\nu \Rightarrow \quad mV = \frac{h}{\lambda}$$

Orbitas cuantizadas de De Broglie y estructura fina.

Se ha presentado antes una primera aproximación al caso de una partícula en el dominio cinemático cuántico en movimiento circular uniforme. En este punto se mejora la aproximación introduciendo una amplitud en la posición de la partícula.

Partiendo de la característica del dominio cinemático cuántico, expresada así

$$WV(1-f)=1$$

con f < 1 y positivo. Imaginemos una onda cuántica que se mueve en una órbita cerrada circular alrededor el núcleo atómico. Esta onda vuelve en fase sobre si misma en cada ciclo y podemos calcular su covelocidad en un ciclo como

$$W=\frac{nT}{2\pi r}$$

donde *T* es el periodo de la onda y *n* es el número de ondas que cubren completamente la circunferencia sobre la que se mueve la onda. Sustituyendo tenemos

$$\frac{nT}{2\pi r}V(1-f)=1$$

en primera aproximación para *f=0* tenemos la cuantización de De Broglie si tomamos $\lambda_D = TV$ como la longitud de onda de De Broglie para la partícula.

$$nTV\approx 2\pi r$$

Mas allá de la primera aproximación tenemos

$$nTV>2\pi r$$

El resultado difiere de la cuantización clásica basada en una órbita *exactamente* circular para la partícula. Se puede ajustar la desigualdad anterior añadiendo una amplitud de posición radial para la partícula así

$$nTV=2\pi(r+\Delta r) \quad (6.10)$$

podemos imaginar esto como una orbita circular “ondulada” o “rizada” para la partícula. Sustituyendo esto en la característica del dominio cinemático tenemos

$$W\left(\frac{2\pi(r+\Delta r)}{nT}\right)(1-f)=1\rightarrow W\left(\frac{2\pi(r+\Delta r)}{nT}\right)\approx 1+f$$

con la aproximación hecha para f <<1 podemos identificar lo siguiente

$$\frac{2\pi r}{n\lambda_D} \approx 1 \;\; , \;\; \frac{2\pi \Delta r}{n\lambda_D} \approx f \;\; ; \;\; \frac{\Delta r}{r} = f \quad (6.11)$$

con $\lambda_D = T / W$, lo cual está de acuerdo con $\lambda_D = TV$ y con una primera aproximación en que el producto de módulos *W*V=1* y por tanto *f*=0. El primer término de 6.11 representa la cuantización de De Broglie como una primera aproximación, mientras que el segundo es una corrección de orden superior. Siguiendo la intención de **[7]** para la cuantización del término correctivo tenemos

$$f = \frac{2\pi \Delta r}{n\lambda_D} = \frac{n'\lambda'}{n\lambda_D} \approx \frac{n' hv / mc^2}{nh / mv} = \frac{n'}{n}\frac{v^2}{c^2} \quad (6.12)$$

con n,n' números cuánticos enteros. Utilizamos λ' como la longitud de onda de De Broglie asociada a $\Delta p = mc^2/v$; expresión esta última que vimos antes y que **[7]** asocia al "movimiento del electrón sobre si mismo". Por tanto podemos aproximar la característica del dominio cinemático a partir de $\lambda_D = TV$,(6.10) y (6.12) como

$$n\lambda_D \left(1 - \frac{n'}{n}\frac{v^2}{c^2}\right) = 2\pi r$$

que conduce al espectro de estructura fina en átomos hidrogenoides según **[7]**.
El lector puede rehacer los cálculos partiendo de V=2πr/nT y ver que esto no conduce a la misma aproximación; la partícula no puede seguir un círculo perfecto. La ecuación de Dirac establece la íntima relación entre el Spin del electrón y la corrección fina del espectro del hidrógeno; en nuestra interpretación el Spin es una consecuencia de la ecuación característica del dominio cinemático cuántico.

Condiciones de Compatibilidad
Hemos visto que son posibles dos casos para los sistemas compatibles. Podemos ver mejor las consecuencias de esto concibiendo estos sistemas como la unión entre una partícula y su onda piloto. Además la igualdad de desplazamientos que se ha utilizado es un caso especial, que utilizaremos por simplicidad, ya que el desplazamiento de la partícula o de la onda puede incluir una componente perpendicular a la covelocidad o a la velocidad respectivamente que mantenga el producto escalar correspondiente igual a 1. Dado que el incremento de tiempo es el mismo para onda y partícula, el caso especial que veremos corresponde a un mínimo en los módulos de velocidad y covelocidad, de modo que el producto de módulos *W*V=1* y la onda y la partícula se desplazan siguiendo la misma "trayectoria".

En el caso cinemático podemos escribir las dos condiciones, utilizando subíndice "o" para la onda y "p" para la partícula, así

1) $\Delta \boldsymbol{r}_p = \Delta \boldsymbol{r}_o$; $\Delta t_p = \Delta t_o$
En este caso el movimiento de la partícula y de la onda piloto es el mismo.

2) $\Delta \boldsymbol{r}_p = -\Delta \boldsymbol{r}_o$; $\Delta t_p = -\Delta t_o$

En este caso el movimiento de la partícula y de la onda piloto son contrarios en el tiempo. Si la onda avanza en el tiempo ($\Delta t_o > 0$) entonces la partícula retrocede ($\Delta t_p < 0$), y al revés. Vemos así la posibilidad de un desplazamiento temporal relativo en el sistema partícula-onda; desplazamiento que se pone de manifiesto a través de la covelocidad en el proceso de emisión de radiación. Si hay una dirección del tiempo físicamente preferible, entonces tendríamos dos formas de movimiento distinguibles, según si es la onda o la partícula la que se mueve en esa dirección preferible en el tiempo.

En el caso dinámico las dos condiciones son:

3) $\Delta \boldsymbol{p}_p = -\Delta \boldsymbol{p}_o$; $\Delta E_p = -\Delta E_o$

La onda piloto y la partícula intercambian una cantidad determinada de energía-impulso de modo que no se modifica la energía-impulso neta del sistema. Este es el comportamiento esperado para un sistema conservativo *en cada "instante" de tiempo*. En la interpretación que propongo este caso se asocia al caso 1 cinemático, en el que no hay discordancia sobre la dirección del tiempo.

4) $\Delta \boldsymbol{p}_p = \Delta \boldsymbol{p}_o$; $\Delta E_p = \Delta E_o$

En este caso la modificación de energía es la misma para la onda y la partícula. Para interpretar esto imaginemos que una partícula con una energía propia determinada es capaz de viajar en el tiempo. Si esto es posible sin violar el principio de conservación de la energía-impulso, debe haber un proceso simétrico que transporte *igual* cantidad de energía-impulso desde el instante destino al instante origen en el "*punto*" espacial correspondiente. Esta igualdad es la que expresa este caso, pero referida en principio a incrementos o amplitudes de energía-impulso. Con esta interpretación este caso se asocia con el caso 2 cinemático.

El lector puede comprobar también que la condición de compatibilidad también se cumple con la relación escalar $(\Delta \boldsymbol{r}_p , \Delta t_p) = \lambda (\Delta \boldsymbol{r}_o , \Delta t_o)$.

La interpretación dada se refiere a una partícula. Según las ideas actuales de física cuántica podemos pensar que para un conjunto de partículas aislado existe una única onda piloto determinada por la ecuación de Schrödinger. En este contexto podemos ver la onda piloto como una forma de asegurar la conservación de la energía-impulso en sistemas de partículas.

Sobre la ecuación de Schrödinger, antipartículas, spin y "zitterbewegung"
Supongamos unas funciones de onda de esta forma

$$\phi(i\frac{\Delta\overline{P}*\overline{r_{o+}}}{\hbar} - i\frac{\Delta E*t_{o+}}{\hbar}) \quad (6.13) \qquad \phi(-i\frac{\Delta\overline{P}*\overline{r_{o-}}}{\hbar} + i\frac{\Delta E*t_{o-}}{\hbar}) \quad (6.14)$$

donde *i* es la unidad compleja y las variables en Δ se refieren a la onda cuántica. La variable t_{o+} toma valores en el sentido creciente del tiempo , mientras que la variable t_{o-} lo hace en el sentido decreciente; va hacia atrás en el tiempo.

En el dominio cuántico tenemos E ΔE = c^2 **P***Δ**P**. En principio podemos hacer

$$\Delta\overline{P} = a\overline{P} + A\overline{P_{\perp}}$$

donde "a" y "A" son escalares, P es el impulso mecánico de la partícula y $P^{\perp}$ es un vector de igual módulo que P pero en una dirección perpendicular a la de P. Podemos ver que esto conduce, en aproximación de baja velocidad a $\Delta E=2a(P^2/2m)$ = $2aE_c$; donde E_c es la energía cinética clásica; suponemos por tanto una aproximación de baja velocidad respecto de la luz.

Aún podemos hacer una distinción y suponer que las coordenadas de la ec. de Schrödinger hacen referencia a la partícula y que existe una relación con las coordenadas de la onda de esta forma $(\Delta\mathbf{r}_o, \Delta t_o) = b(\Delta\mathbf{r}_s, \Delta t_s)$, el subíndice "s" hace referencia a la partícula en la ecuación de Schrödinger y el subíndice "o" a las funciones de onda propuestas. La idea de que las coordenadas de la ecuación de Schrödinger se refieren a una partícula se utiliza también en la formulación matemática del principio de exclusión de Pauli. Con estas condiciones, para que las funciones anteriores sean solución de la ecuación de Schrödinger de una *partícula libre* se debe cumplir

$$(a^2 + A^2)b^2 = \pm 2ab \quad (6.15)$$

donde el signo positivo es para 6.13 y el negativo para 6.14. En principio no hay problema para soluciones con $b^2 = 1$, y en coherencia con el signo positivo asociado a 6.13 se debe tomar el valor b = 1 en que la partícula y la onda se desplazan en el mismo sentido del tiempo. Por coherencia con el signo negativo asociado a 6.14 se debe tomar b = -1 , de modo que la onda y la partícula se desplazan en sentidos diferentes del tiempo. Con estas condiciones, el valor "a" no debe afectar al signo de 6.15; es decir, siempre debe ser a>0. De este modo, la onda y la partícula se mueven como una unidad; en el sentido de que la proyección del impulso de la onda sobre el impulso de la partícula corresponde con dicho impulso de la partícula en dirección, sentido y módulo si tomamos a=1.

Resulta difícil dar una interpretación física de estos resultados, pero según la electrodinámica cuántica de Feynman un desplazamiento hacia atrás en el tiempo puede representar a una antipartícula; de modo que el sistema de funciones representaría una partícula y su antipartícula. En este caso el Spin puede asignarse a la componente "A", que justamente puede denominarse "movimiento o giro de la partícula sobre si misma"; sin embargo sigamos un poco mas adelante con esto.

Lo dicho está en la condición de bajas velocidades y energías, de acuerdo con el ámbito atribuido a la ecuación de Schrödinger. Si asumimos la condición E ≈ ΔE para altas energías tenemos que la ecuación E ΔE = c^2 **P***Δ**P** en el dominio cuántico se puede poner como

$$E^2 \approx (mc^2)^2 \approx c^2 \overline{P} \bullet \Delta\overline{P} = c^2 (mV)(m\frac{c^2}{V})$$

En este caso el impulso de la onda debe tener una componente en la misma dirección y sentido del impulso de la partícula de valor $\Delta P_s = mc^2/v$; en acuerdo con lo expuesto en el punto *Orbitas cuantizadas de De Broglie y estructura fina.* En dicha sección se utilizó este valor para el impulso asociado al Spin del electrón. Si queremos seguir manteniendo en este caso la idea de que la onda y la partícula permanecen unidas; entonces este impulso no debe actuar de modo continuo, sino de modo *alterno*, provocando una oscilación en el sistema onda-partícula; oscilación que debe tener la rapidez suficiente para conservar un movimiento promedio correspondiente al de la partícula. Este sería el caso de lo que Schrödinger denominó el "zitterbewegung" en alemán y que se traduce como "movimiento tembloroso"[**17**]. Con estas condiciones tenemos que la aproximación de altas energías debe ser ΔE ≈ ±E; lo cual puede representar un proceso recurrente de creación-aniquilación de la partícula. La explicación original de Schrödinger de este fenómeno se basa en la superposición de estados correspondientes de energías ±E asociados a la ecuación de Dirac de una partícula libre.

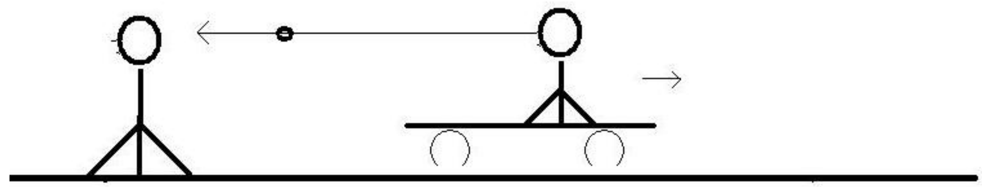
Una situación análoga es concebible en el caso descrito en la sección anterior "*Un fotón penetra en un medio transparente*". Si el fotón y la onda cuántica deben permanecer unidos, entonces el impulso de la onda debe tomar valores alternos ΔP = ±*mcn* que corresponden con ΔE ≈ ± mc^2; donde *n* es el índice de refracción del medio transparente y *m* la masa equivalente del fotón. En este caso la creación-aniquilación del fotón se puede entender como la absorción-emisión del fotón por los átomos del medio transparente.

Finalmente, según el desarrollo que se ha hecho, tenemos que aceptar que el "zitterbewegung" y el spín representan el mismo fenómeno físico; esta idea es sostenida por otros autores como *Kerson Huang* en su artículo *"On the Zitterbewegung of the Dirac Electron," American Journal of Physics 20: 479-484, November 1952.*

5-Fotones y Relatividad

Fotones y Relatividad Especial

Sea un foco de luz que se mueve a una velocidad constante respecto de un observador en reposo y que emite un fotón en contra de la velocidad relativa, tal como aparece en la imagen



Sabemos que debido al efecto Doppler la frecuencia del fotón que recibe el observador en reposo es menor (desplazada al rojo) que la frecuencia del fotón percibida por el observador en movimiento. De la relación de Planck *E=hω* tenemos la misma relación para energías: la energía del fotón medida por el observador en reposo es menor que la energía del fotón medida por el observador en movimiento. Supongamos que después de la emisión del fotón el observador en movimiento cesa, por efecto de alguna fuerza, en su movimiento relativo y comenta el proceso con el otro observador; para un observador la energía que ha perdido el foco es superior a la energía detectada por el otro observador. ¿Se ha violado el principio de conservación de la energía? El fotón que absorbe el observador en reposo está desplazado al rojo; sin embargo este observador puede en principio *revertir el proceso* haciendo "chocar" un foco idéntico al emisor y con la misma velocidad relativa contra su fotón desplazado al rojo. Este es el proceso inverso en el sistema de coordenadas del observador en reposo. Por tanto la energía se conserva manteniendo su carácter relativo a un sistema de coordenadas determinado. Los observadores en movimiento relativo deben coordinar las medidas de energía e impulso de un mismo proceso físico por unas relaciones similares a las de Lorentz para el espacio-tiempo. De hecho estas relaciones representan una unión análoga que da lugar al concepto de energía-impulso

$$E = \frac{E_0 - vP_{0x}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; P_x = \frac{P_{0x} - \frac{v}{c^2}E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}; P_y = P_{y0}; P_z = P_{z0}$$

Mientras todos los observadores utilicen estas relaciones no encontrarán incongruencias sobre la energía medida por un observador determinado, y tampoco tendrán problemas con el principio de conservación de la energía mientras que todas las energías medidas correspondan a un sistema de coordenadas bien definido.

Se puede pensar que en el ejemplo dado hay que tener encuentra también el efecto de retroceso en la emisión y absorción del fotón. El efecto Mossbaüer constata que son posibles emisiones y absorciones de fotones en que el efecto de retroceso no solo afecta al átomo que emite/absorbe el fotón, sino solidariamente a toda la red molecular en que el átomo está. De esta forma el retroceso provocado es, en términos energéticos, del orden de $P^2/2M$ donde P es el impulso del fotón y M es la masa de un objeto macroscópico. Esto supone dos cosas:

1-Se pueden diseñar experimentos en que el efecto energético de retroceso sea despreciable respecto de la energía de fotón emitido/absorbido.

2-Se pueden diseñar experimentos en los que la energía del fotón emitido/absorbido por un átomo sea medida con una precisión altísima.

Fotones y Relatividad General

El concepto de red-shift gravitatorio surge en las primeras fases del proceso de maduración en que Einstein desarrollo una generalización del principio de relatividad que incluye el campo gravitatorio. Podemos describir este proceso así.

1-Aplicación de la relatividad especial a sistemas acelerados.
Se introduce el sistema inercial instantáneo como uno que en un instante determinado *dt* para un sistema inercial base, está instantáneamente en reposo respecto de un sistema de coordenadas acelerado. De esta forma Einstein estudia el comportamiento de las ecuaciones de Maxwell en sistemas de coordenadas acelerados obteniendo dos conclusiones

> A: Las ecuaciones de Maxwell en sistemas acelerados mantienen su forma matemática pero a costa de aceptar que la velocidad de la luz es una función de la posición. La Relatividad General modificará esta conclusión, como veremos en el apartado dedicado a la métrica de Schwarzchild.
>
> B: El principio de conservación de la energía asociado a las ecuaciones de Maxwell debe incluir un término adicional de la forma $\Phi E/c^2$ donde psi es una función de la posición.

2-Principio de equivalencia. En base a este principio el estudió hecho para los sistemas acelerados es válido, instantánea y localmente, para campos gravitatorios. En particular la función psi anterior se interpreta como potencial gravitatorio. La expresión anterior muestra la equivalencia entre Energía electromagnética, masa gravitatoria y masa inercial.

3-Planteamiento del red-shift gravitatorio. En función de las ideas anteriores podemos estudiar el comportamiento de un fotón en un campo gravitatorio simplemente aplicando el principio de conservación de la energía. Supongamos que hay un foco en el techo de una habitación que emite un fotón que llega hasta el suelo. La conservación de la energía se plantea así

$$hw_t + \frac{hw_t}{c^2}\phi_t = hw_s + \frac{hw_s}{c^2}\phi_s \Rightarrow \quad w_s = w_t\left(1 + \frac{\phi_t - \phi_s}{c^2}\right)$$

$$Supuesto\ \phi / c^2 << 1$$

Según la ecuación anterior, dado que el potencial gravitatorio del techo es superior al del suelo, tenemos que la frecuencia del fotón al llegar al suelo es superior que la frecuencia con la que partió. Einstein se da cuenta de que esto necesita una explicación física y procede según esta línea de pensamiento:

Supongamos que desde el techo se emite un tren de ondas con un número definido de crestas o ciclos. Parece evidente que el observador del suelo contará el mismo número de crestas. Sin embargo la relación anterior parece estar en contra de esta expectativa : el número de ciclos por unidad de tiempo, o frecuencia, es diferente para los dos observadores. Señala Einstein que el problema está en lo que entendamos por *unidad de tiempo* y que es posible que dos relojes, uno local al techo y otro local al suelo marchen con ritmos diferentes en un campo gravitatorio. De hecho la relación entre relojes se puede deducir de la relación que asegura la igualdad del número de ciclos para los dos observadores:

$$w_s T_s = w_t T_t$$

de este modo se deduce que cuando el reloj del techo marca un intervalo de 1 segundo, el reloj del suelo no ha completado todavía este intervalo. Este comportamiento del tiempo requiere mas explicaciones. La duración de un mismo proceso físico medido por un reloj local ofrecerá en principio el mismo valor en cualquier lugar del campo, ya que la modificación del tiempo no distingue entre el proceso y el reloj que lo mide, lo mismo es aplicable a la medición de distancias.

6-SISTEMAS DE COORDENADAS INERCIALES Y ACELERACIÓN.

Se tratan aquí de exponer una serie de condiciones necesarias en el paso de los sistemas de coordenadas inerciales de la relatividad especial a los sistemas de coordenadas no inerciales acelerados. Como veremos la aceleración deja una huella física en los sistemas inerciales que puede ser medida e interpretada. Veremos como podemos utilizar los sistemas inerciales como herramienta de medida en este caso.

Imagine el lector dos sistemas de coordenadas inerciales, Ay B. Los relojes en reposos de cada sistema están sincronizados según el criterio de la relatividad especial. Los relojes del sistema A deben verse de-sincronizados al ser observados simultáneamente desde el sistema B; de lo contrario, debido a la relatividad de la simultaneidad, los relojes estarían de-sincronizados en el sistema A; lo cual es falso de partida, por tanto

A- Un observador inercial ve, en un instante dado, los relojes móviles de otro sistema inercial de-sincronizados.

Considere el lector ahora la siguiente experiencia desde un sistema de coordenadas determinado, A: Tomamos dos relojes sincronizados del sistema y les aplicamos a los dos una misma fuerza de modo que resultan acelerados de la misma forma. Al cabo de cierto tiempo la fuerza cesa y los relojes se mueven por inercia. ¿Qué valor señalan estos relojes finalmente?
Si suponemos que la aceleración se ha producido en un lapso de tiempo pequeño y los relojes llevan en fase inercial un tiempo mucho mayor tenemos lo siguiente:

> 1-Los relojes han sido sometidos a las mismas condiciones físicas.
> 2-Estos relojes estaban inicialmente sincronizados con relojes inerciales, de modo que se puede aplicar, en la fase inercial, el resultado de reloj en movimiento para la relatividad especial

De estas dos condiciones concluimos que los dos relojes marcan simultáneamente el mismo valor y que se puede aproximar por el resultado correspondiente de la relatividad especial. Debido a la relatividad de la simultaneidad, desde el sistema de coordenadas inercial de los relojes que han sido desplazados, estos no marcarán simultáneamente los mismos valores. Esto significa que para el observador acelerado las condiciones físicas de los dos relojes acelerados no han sido las mismas. Resumiendo:

B-La aceleración de un sistema de coordenadas inercial produce una de-sincronización de sus relojes. Evidentemente esto afecta a las medidas espacio-simultáneas para el observador acelerado.

Pensemos la experiencia desde el sistema de coordenadas acelerado, para un observador que se mueva con uno de los relojes. Para este observador son los relojes del sistema inercial los que se mueven en bloque. Si razonamos de la misma forma que antes tenemos que el observador, una vez sincronice sus propios relojes, vera que los relojes del sistema A marcan lo mismo simultáneamente; pero dada la relatividad de la simultaneidad esto supone que los relojes en A se han de-sincronizado, lo cual es falso de partida. La realidad es que vería los relojes de A de-sincronizados. Además por medio de la imagen del principio de equivalencia sistema acelerado-campo gravitatorio: para el observador acelerado los dos relojes están a distinto potencial gravitatorio; también hay que considerar el caso discutido en el problema de los cohetes espaciales: hay una modificación de la distancia entre relojes para el observador acelerado. Por tanto la condición 1-Los relojes han sido sometidos a las mismas condiciones físicas, no es cierta para el observador acelerado.

C-Un observador acelerado no puede hacer, en general, estimaciones sobre la marcha de los relojes de un sistema inercial; solamente puede hacer estimaciones basadas en la relatividad especial para una regla y un reloj inerciales muy próximos a su regla y su reloj; nunca para una distribución espacial de relojes inerciales.

Mantenemos además que un observador no inercial , acelerado o gravitatorio, es capaz de sincronizar relojes no inerciales locales muy próximos a un reloj no inercial de referencia: el reloj del observador no inercial. Dicho de otro modo, un observador no inercial (acelerado o gravitatorio) puede construir localmente líneas sÍncronas en cualquier dirección. Esto es necesario para mantener el concepto de espacio-simultáneo y poder comparar relojes en reposo con relojes en movimiento, al menos localmente, para un observador no inercial; ya sea acelerado o gravitatorio. En estas condiciones, matemáticamente solamente se puede aplicar la relatividad especial de modo local e instantáneo.

Esta conclusión se aplica directamente al caso de la paradoja de los gemelos, que se discute mas adelante en este trabajo utilizando el concepto de *condición inicial local*. Durante la fase de aceleración de partida, que suponemos dura muy poco, el gemelo viajero solamente puede saber lo que marca el reloj del gemelo en tierra por medida directa; solamente conoce ese suceso o condición inicial local al proceso acelerado de partida, proceso muy próximo al gemelo en tierra. Durante la fase inercial puede hacer estimaciones de los relojes en tierra solamente referidos a esa condición inicial, que es en realidad lo único que conoce. Cuando el gemelo viajero frena y cuando retorna puede hacer una estimación de lo que marcan los relojes inerciales utilizando la relatividad especial, pero esto solo es legítimo para calcular el valor que marque un reloj inercial local próximo respecto del proceso (acelerado) de llegada a la estrella lejana y sincronizado con el del gemelo en la tierra. Antes de que el gemelo viajero llegue a la tierra tiene que hacer el cálculo de lo que marcan los relojes inerciales tomando como referencia la condición inicial local anterior, y el proceso de cálculo es válido solo para calcular lo que marca un reloj inercial local próximo al proceso (acelerado) de aterrizaje.

Paradoja de los gemelos (*P.Langevin*)

Dos hermanos gemelos. Uno de ellos parte de viaje a una velocidad cercana a la de la luz hasta la estrella alfa-centauro e inmediatamente vuelve a la tierra. ¿Qué edad tienen los gemelos cuando vuelven a encontrarse?

Discusión
La palabra paradoja se refiere a lo poco intuitivo o "de sentido común" de la solución de este problema de acuerdo a la relatividad. Sin embargo, dentro de la relatividad, hay una forma no paradójica y otra "paradójica" de plantear la solución al problema.

Forma no paradójica:
Dividimos el viaje en dos tramos: ida y vuelta. Podemos suponer que cada tramo del viaje se realiza a velocidad relativa constante y despreciar los inicios y finales de trayecto, en que aparecen aceleraciones. Veamos si en estas condiciones llegamos a contradicción.

En esta discusión se habla de la observación de un reloj en movimiento. Note el lector que, en general, todo proceso físico de observación o medida se considera una acción local; es decir, la observación o medida supone una *acción próxima* entre lo medido y el aparato (o persona) que realiza la medida. De aquí la importancia de considerar la existencia de líneas síncronas en los sistema de coordenadas inerciales, que permitan la proximidad entre un reloj síncrono fijo y el reloj en movimiento.

Pensemos en el reloj de pulsera del gemelo viajero. Para este reloj los sucesos A="partida de la tierra", B="llegada a alfa-centauro" y C="retorno a la tierra" están bien definidos y son sucesos locales, por tanto los tiempos t_{BA} y t_{CB} son tiempos locales para el gemelo viajero. Para el gemelo en la tierra estos tiempos se transforman como la relación de tiempos (2.4). Por tanto el gemelo en tierra ha envejecido mas en el proceso que el gemelo viajero. Desde el punto de vista del gemelo en tierra, el reloj de pulsera del gemelo viajero es un reloj en movimiento y por tanto percibe que la marcha de este atrasa progresivamente respecto de su reloj de pulsera según la relación de tiempos 2.12; exactamente lo mismo que en el caso anterior.

$$t_{nave}^{BA} = t_{tierra}^{BA}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Donde t_{tierra} es el tiempo medido por un reloj en reposo desde el sistema-base (gemelo en reposo) y t_{nave} es el tiempo medido por un reloj en reposo para el gemelo viajero (gemelo no inercial). La ecuación anterior supone que existe un reloj en alfa-centauro en reposo respecto de la tierra y sincronizado con los relojes en tierra. Por tanto, de nuevo, el gemelo en tierra ha envejecido mas en el proceso que el gemelo viajero.

Pensemos ahora en el reloj de pulsera del gemelo en tierra. Para el gemelo viajero es un reloj en movimiento y retrasa progresivamente respecto del suyo. ¿Cómo puede ser que el gemelo en tierra envejezca mas y que el reloj de dicho gemelo parece ir mas lento?. Detrás de esta pregunta se esconde la idea clásica del tiempo absoluto. Suponemos que *el tiempo* de los dos gemelos es comparable (mas o menos rápido); en el fondo suponemos que existe un tiempo absoluto de referencia. En relatividad hay que matizar mas la pregunta y acotar las acciones en el tiempo **y** en el espacio. Lo que en realidad puede determinar el gemelo viajero es lo que marca el reloj del gemelo en tierra *simultáneamente* a su llegada (del gemelo viajero) a alfa-centauro. La pérdida de simultaneidad para el gemelo en tierra aumenta el tiempo de esta acción en justo lo necesario:

$$t_{tierra}^{BA} = t_{nave}^{BA}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \frac{\frac{v}{c^2}(v\,t_{nave}^{BA})}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Para el gemelo en tierra la llegada de la nave a alfa-centauro es posterior a la observación que el gemelo viajero hace de su (del gemelo en tierra) reloj; debido a esto el gemelo en tierra tiene que sumar un tiempo adicional a dicha observación. El lector puede estudiar el caso en que el gemelo en tierra observa su propio reloj simultáneamente a la llegada de su hermano a alfa-centauro. Para el gemelo viajero su llegada a alfa-centauro es anterior a la observación que el gemelo en tierra hace de su reloj terrestre y por tanto

$$t_{nave}^{BA} = t_{tierra}^{BA}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

De forma análoga, en el tramo de vuelta también juega un papel importante la simultaneidad en el cálculo de t_{CB}. La continuidad de la acción física requiere considerar como referencia para la vuelta un reloj en alfa-centauro (B) en reposo respecto de la tierra. Este aspecto de la continuidad aparece de forma natural si se representa este problema en el espacio de Minkowsky. Finalmente no hay paradoja: el gemelo en tierra es mas viejo cuando se produce el reencuentro.

Forma paradójica:
Si consideramos la acción AC completa, tenemos que t_{AC} es un tiempo local para los dos gemelos: Si los dos gemelos, un instante antes de re-encontrarse, transforman este intervalo según 2.12 llegarán a contradicción: Para los dos gemelos el reloj del otro ha atrasado respecto del propio. Evidentemente esto es físicamente inconsistente; el estado de los relojes está perfectamente definido en la llegada. En el caso no paradójico hemos descompuesto el problema en dos partes, en cada una de las cuales se puede aproximar el movimiento del gemelo viajero utilizando una velocidad relativa uniforme; y por tanto es legítimo aplicar las transformaciones de Lorentz a cada una de estas partes. Por otra parte existe una

asimetría básica en los sucesos considerados A y B: para un observador la medida del tiempo es local y para el otro no. En el caso paradójico hemos aplicado las transformaciones de Lorentz al movimiento completo, pero para ser coherentes con las transformaciones de Lorentz tendríamos que haber definido al menos una velocidad promedio uniforme del movimiento completo, la cual sería evidentemente nula ya que el punto inicial y final coinciden.

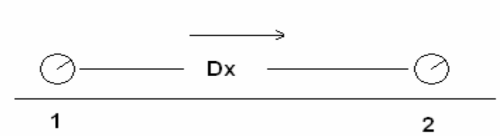
Problema de los cohetes espaciales: (*J. Bell*)

Tenemos dos cohetes iguales en reposo separados cierta distancia y unidos por un débil filamento recto. El filamento es tal que puede romperse si se alarga o acorta demasiado. En el sistema inercial base, en el instante t=0, arrancan los dos cohetes simultáneamente y siguen una trayectoria recta con la misma aceleración y en la misma dirección del filamento, dirección que podemos considerar eje x. ¿Se rompe el filamento?. Los cohetes tienen sendos relojes inicialmente sincronizados en el sistema inercial base. ¿Cómo se comportan los relojes desde el sistema de coordenadas de los cohetes?

Discusión

Si las dos naves funcionan exactamente igual (son replicas gemelas), la velocidad v(t) medida por el observador del sistema inercial base es la misma para las dos. Esto implica que la distancia entre las dos naves se mantiene constante y que los relojes permanecen síncronos durante todo el proceso visto desde el sistema inercial base; ya que dichos relojes están sometidos a las mismas condiciones físicas. Para aplicar la relatividad especial a este sistema acelerado pensemos en que la aceleración se imparte alternado fases de impulso acelerativo con fases inerciales. Las fases de impulso acelerativo duran hasta que el efecto de la aceleración se ha propagado a todos los puntos del sistema de coordenadas. Al final de dicha fase podemos utilizar la relatividad especial, es decir, los sistemas de coordenadas inerciales. Podemos aceptar que los periodos no inerciales duren un tiempo superior al de funcionamiento del motor de la nave, tal que sea suficiente para que los dos cohetes y el filamento vean eliminados los efectos propagación de impulso mecánico asociados a la aceleración. Veremos que la aceleración deja una huella sobre los sistemas inerciales que nos permitirá interpretar como se comporta el espacio-tiempo en los sistemas acelerados.

Estudiemos el comportamiento de los relojes



En primer lugar estudiemos el caso en que los relojes se mueven inercialmente. Sabemos que los relojes se verían en general desincronizados desde la estación base inercial, pero si utilizamos relojes de agujas podemos ajustarlos inicialmente de modo que, en un instante dado, las agujas marquen simultáneamente el mismo valor t_0 para el observador base. Consideremos en dicho instante sendas acciones simultáneas locales a cada reloj según el observador base inercial. Desde el sistema inercial de los relojes estas acciones no son simultáneas y según las transformaciones de Lorentz resulta, en primera aproximación, un intervalo de tiempo de valor

$$\Delta t \approx -\frac{v(x_b^2 - x_b^1)}{c^2}$$

El resultado indica que el suceso en “2-r” es anterior en el tiempo al suceso en “1-r”. Por tanto en el sistema de los relojes, si el reloj 2-r marca t_0 hay que esperar $-\Delta t$ segundos para que el reloj 1-r marque lo mismo. O dicho de otro modo, en el instante en que 1-r marca t_0 2-r marca t_0 - Δt y en general

$$t_r^2 \approx t_r^1 + \frac{v(x_b^2 - x_b^1)}{c^2}$$

Para el caso en que los dos relojes están sometidos a la misma aceleración tenemos, como ya se ha dicho, que la distancia entre relojes se mantiene constante y que los dos relojes marcan lo mismo desde el sistema base en todo momento. Estas dos condiciones hacen que podamos tomar pequeñas variaciones de la expresión anterior de este modo

$$\delta t_r^2 \approx \delta t_r^1 + \frac{(x_b^2 - x_b^1)}{c^2}\delta v$$

Para interpretar este resultado imaginemos otra vez que el observador alterna fases de aceleración con fases inerciales. En la fase inercial inicial tenemos que los relojes 1-r y 2-r tienen sus agujas desfasadas una cierta cantidad constante que no se modifica con el tiempo, tal como calculamos para el caso inercial. Pasada la fase de aceleración y llegados a la siguiente fase inercial el observador comprueba que existe un desfase entre 1-r y 2-r pero ha aumentado en la cantidad correspondiente a la fórmula anterior. Por tanto el observador puede pensar que durante la fase no inercial el ritmo de los relojes 1-r y 2-r no ha sido el mismo. Interpreta la fórmula anterior diciendo que la aceleración de los relojes hace que estos marchen con un ritmo diferente. En los sistemas inerciales hemos supuesto que todos los relojes del sistema una vez sincronizados permanecen sincronizados; lo que equivale a que el ritmo de todos los relojes es el mismo independientemente de sus coordenadas espaciales. Vemos que en el caso de sistemas acelerados esta premisa ya no es sostenible. En este problema resulta que cuando las manillas de 1-r marcan 1 minuto las de 2-r están mas avanzadas: El reloj 2 marcha mas rápido que el 1 vistos desde el sistema acelerado. Hay un desplazamiento relativo en el tiempo entre los relojes. Dado que la primera aproximación de un campo gravitatorio es un sistema acelerado tenemos que los relojes en el campo gravitatorio terrestre tienen un ritmo que depende de su altura.

Esta situación la experimenta diariamente el sistema de posicionamiento global GPS, como ya se ha dicho. Por otro lado, si los relojes están tan cercanos como se quiera, resulta que la discrepancia entre los ritmos de los relojes es una diferencial de primer orden

$$\int \delta t_r^2 \approx \int \delta t_r^1 + \frac{\delta x_b}{c^2} \int \delta v \Rightarrow \Delta t_r^2 \approx \Delta t_r^1$$

y por tanto podemos asumir de forma natural la existencia de *líneas síncronas locales* a un observador no inercial (gravitatorio o acelerado), lo cual es una condición necesaria para poder aplicar localmente la relatividad especial en un sistema de coordenadas acelerado. Este resultado concuerda con la idea de *continuidad del espacio-tiempo.*

Estudiemos ahora la distancia entre naves. Si las dos naves tienen el mismo programa de funcionamiento de los motores los impulsos siempre van a ser simultáneos para el observador de la base. Durante el periodo inercial para los observadores en el cohete no existe movimiento relativo entre ellos. En efecto, la aplicación de la composición de velocidades para sistemas inerciales da

$$\frac{v - v}{1 - v^2 / c^2} = v' = 0$$

donde *v* es la velocidad común de las naves desde el sistema base y *v'* es la velocidad de una nave respecto de la otra. En cambio para el observador base no existe el efecto de la contracción de Lorentz del filamento, que se supone rígido como una regla. La distancia entre naves es constante en cualquier fase inercial para dicho observador base. Este observador puede pensar que, durante las fases no inerciales, se ha modificado el espacio entre las naves para un observador solidario al sistema de las naves. Además este efecto se anula en las fases inerciales. Sin embargo la condición de la velocidad relativa nula indica que el aumento de distancia no se debe a un movimiento relativo, sino a una modificación del espacio-simultáneo. Esto se puede interpretar como una modificación en la métrica en el sistema de coordenadas acelerado. Esta modificación es tal que la contracción de Lorentz resulta cancelada para el observador base inercial. Sin embargo hablar es espacio-simultáneo en sistemas acelerados supone la existencia de líneas síncronas, lo cual solo está justificado para medidas locales, muy cercanas al observador; en rigor en términos diferenciales. De este modo el espacio simultáneo entre naves se transforma según la relación

$$dx_r = \frac{dx_b}{\sqrt{1 - \frac{v^2(t)}{c^2}}}$$

Donde dx_b es la distancia inicial entre naves, es decir, la distancia que para el observador base existe entre las naves en todo momento y dx_r es la distancia entre naves para el observador situado en el sistema *no inercial* de las naves. Note el lector el efecto radical de la aceleración: el comportamiento descrito es válido aún para aceleraciones muy pequeñas siempre que los cohetes se muevan con la misma aceleración. En este ejemplo vemos que el espacio es “flexible”, “compresible” y “expansible”; “acumulable” y “dispersable”. Vemos que el filamento acaba rompiéndose por el aumento de la separación entre naves. Esta separación es un hecho objetivo debido a la “violación” de la contracción de Lorentz para el observador base.
Tal como se ha planteado desde el principio la aceleración está asociada a un cambio de sistema inercial, y por tanto supone un desplazamiento relativo en el tiempo para el observador acelerado; puesto que cada sistema inercial tiene su propia experiencia del tiempo.
Finalmente recuerde el lector la propiedad fundamental del campo gravitatorio: <u>localmente todos los cuerpos caen con la misma aceleración</u> (Galileo).

7-TRANSFORMACIONES DE COORDENADAS Y CAMPO GRAVITATORIO. INTRODUCCIÓN ELEMENTAL A LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD.

Las transformaciones de coordenadas mas generales $x_-(x_+,t_+)$; $t_-(x_+,t_+)$ se plantean en forma diferencial y tienen matemáticamente esta forma

$$dx_- = \left(\frac{\partial x_-}{\partial x_+}\right)_{t+=cte} dx_+ + \left(\frac{\partial x_-}{\partial t_+}\right)_{x+=cte} dt_+$$
$$dt_- = \left(\frac{\partial t_-}{\partial x_+}\right)_{t+=cte} dx_+ + \left(\frac{\partial t_-}{\partial t_+}\right)_{x+=cte} dt_+$$

Tomando como base la transformación de Lorentz podemos interpretar los siguientes coeficientes

$$\left(\frac{\partial x_-}{\partial x_+}\right)_{t+=cte} = \frac{d\,x_-}{d\,x_+^s} = \beta^{-1}; \quad \left(\frac{\partial t_-}{\partial t_+}\right)_{x+=cte} = \frac{d\,t_-}{d\,t_+^l} = \beta^{-1};$$

como las transformaciones del espacio simultáneo y el de tiempo local, es decir se trata de los términos simétricos de la transformación de Lorentz. Para los términos no simétricos tenemos

$$\left(\frac{\partial x_-}{\partial t_+}\right)_{x+=cte} = \frac{d\,x_-}{d\,t_+^l} = -v\,\beta^{-1}; \quad \left(\frac{\partial t_-}{\partial x_+}\right)_{t+=cte} = \frac{d\,t_-}{d\,x_+^s} = -\frac{v}{c^2}\,\beta^{-1};$$

donde vemos que dependen directamente de la velocidad relativa. Estos son los coeficientes de transformación entre sistemas de coordenadas inerciales y vemos que se pueden calcular a partir de medidas con reglas rígidas y relojes locales en los sistemas de coordenadas que se tratan de relacionar. Para el caso de sistemas de coordenadas no inerciales la cosa cambia profundamente. No tenemos una definición sencilla de tiempo para cualquier sistema de coordenadas.

Es probable que el lector haya utilizado el autobús; que al intentar llegar a los asientos del fondo el autobús haya empezado a acelerar. Esto produce una “fuerza” que parece tirar de uno. Personalmente me sorprende esta sensación por que parece ser muy profunda, no afecta solo a los pies, sino a todo el cuerpo. Realmente parece tratarse de un campo de fuerzas lo que esta actuando. Según Einstein esta percepción física es correcta y realmente el observador acelerado del autobús puede pensar que está en *reposo* y actúa un campo de tipo gravitatorio. El carácter gravitatorio de este campo depende de la conocida propiedad de inducir la misma aceleración a toda entidad física. Una consideración de este tipo está en el origen de la relatividad general.[**2**]. Razonando sobre experiencias como la del autobús, Einstein intuyó que era posible expresar las

leyes físicas sin que estas hiciesen referencia a ninguna forma de movimiento *absoluto*, ya sea velocidad o aceleración. Un sistema de coordenadas acelerado se puede describir como un sistema en reposo en el que actúa un campo gravitatorio; y al revés, un campo gravitatorio puede describirse (localmente) como un sistema de coordenadas acelerado. Einstein resumió estas ideas en el principio de equivalencia entre inercia y gravedad**[2]**. En lo que sigue consideraremos como *leyes físicas* la relación entre espacios-simultáneos ("contracción" de Lorentz) y tiempos-locales tal como se han presentado; es decir, dependiendo de la velocidad relativa entre observadores. También se utilizará la conocida propiedad del campo gravitatorio de acelerar, relativamente a un observador gravitatorio, igualmente todos los entes físicos.
Tomemos como contexto un campo gravitatorio *estático* similar al terrestre y calificaremos como *gravitatorio* a un observador en reposo respecto del centro de "fuerza" del campo. Cuando este observador se encuentre a una distancia suficientemente alejada como para despreciar la influencia de la gravedad lo calificaremos como *en el infinito*. Antes que nada es necesario establecer un sistema de coordenadas que sea común para todos los observadores gravitatorios, de forma que cualquier suceso tenga unas coordenadas espacio-tiempo precisas. Como paso previo imaginemos una línea en la dirección radial hecha de algún material resistente y que conecte a un observador gravitatorio con un observador en el infinito. Un observador en caída libre que parte del infinito posee un reloj que marca segundos y una regla de 1 metro capaz de emitir señales simultáneamente por sus dos extremos. Este observador aplica la regla paralelamente a la línea radial y genera estas señales que, actuando sobre el material de la línea anterior, dejan una marca indeleble. Con esto el observador en caída libre va marcando segmentos sobre la línea radial de modo que todo punto de la línea queda o bien dentro de un único segmento o bien en el límite entre dos segmentos. Si asignamos un número correlativo a cada segmento, esta construcción permite localizar sucesos ocurridos en las cercanías de la línea radial a partir de dicho número que podemos considerar como coordenada radial. En el mismo proceso, el observador en caída libre coloca una marca indeleble, distinguible de las anteriores, en la línea coordenada radial correspondiente a su posición cada vez que su reloj aumenta la cuenta de tiempo en 1 segundo. Llamaremos a estas marcas, *marcas sincronizadas*.

Para definir las coordenadas de un suceso imaginemos que tenemos un número indefinido de relojes en caída libre que parten del infinito a intervalos de 1 segundo, por simplicidad. A estos relojes les vamos a conceder la calidad de observadores, de modo que son conscientes de sucesos físicos. Para determinar las coordenadas espacio-tiempo de un suceso ocurrido en nuestro contexto físico el reloj en caída libre coincidente espacio-temporalmente con el suceso marca su posición en la línea radial y ajusta un "reloj" gravitatorio en reposo en dicha posición con el valor que marca el propio reloj en caída libre. Denominaremos a dicho "reloj" como *reloj L* y registra el tiempo en nuestro sistema de coordenadas, que denominaremos *sistema L*.

Debemos hacer algunas consideraciones importantes sobre este sistema de coordenadas. El intervalo de tiempo, medido por el reloj en caída libre, necesario para que dicho reloj llegue desde el "infinito" a una coordenada espacial r_L determinada puede considerarse el mismo en todos los casos, ya que todos los relojes-observador son iguales y el campo es independiente del tiempo: llamemos a esta relación T(r_L). De esto deducimos que si un reloj en caída libre al pasar por el punto de coordenada r_L marca el valor t_L , entonces el siguiente reloj en caída libre marcará t_L+1 segundos en la misma coordenada debido a que partió con un valor inicial 1 segundo superior, y esto independientemente de la coordenada r_L elegida. La frecuencia, medida según los relojes en caída libre, con que dichos relojes aparecen en una posición fija es la misma en cualquier punto de la línea r_L : 1 reloj/segundo. Podemos por tanto construir un *reloj L* en reposo que genere los valores correspondientes a la coordenada temporal, simplemente aumentando su cuenta en 1 segundo cada vez que aparece un reloj en caída libre o encontrando alguna otra regla para establecer la marcha de dicho reloj L.
Sin duda cada uno de estos relojes-observador al hacer las marcas sincronizadas coincidirá con las ya hechas por el primer observador, pero lo que marca su reloj será 1 segundo superior al anterior reloj-observador que realizó la misma acción. Imaginemos dos relojes consecutivos numerados por n+1 y n según el valor inicial de tiempo con que fueron lanzados desde el "infinito", imaginemos dos marcas sincronizadas consecutivas de coordenadas k y k+1, donde se supone que k+1 está mas cercana a la fuente del campo (mas abajo). El tiempo que marcan los relojes n+1 y n cuando alcanzan las marcas k y k+1 correspondientes es

$$T_k^{n+1} = T(k) + n + 1;\ T_{k+1}^{n} = T(k+1) + n$$

por tanto la diferencia de tiempos entre estos dos sucesos es

$$T_{k+1}^{n} - T_k^{n+1} = T(k+1) - T(k) - 1 = 0$$

dado que un reloj en caída libre adelanta 1 segundo entre dos marcas sincronizadas. Por tanto, medido con relojes L situados en las marcas sincronizadas, todos los relojes libres llegan en todo caso *simultáneamente* a dichas posiciones. Cada segundo medido por el sistema de relojes L los relojes libres se alinean con las marcas síncronas correspondientes; pero ¿podemos decir que los relojes L van todos al mismo ritmo?, ¿cómo podemos comprobar físicamente esto? Si podemos responder afirmativamente, como veremos mas adelante, entonces los relojes L marcan realmente el tiempo común del sistema de coordenadas. Finalmente el sistema de coordenadas propuesto puede registrar para cada coordenada espacial la evolución temporal de los sucesos en un intervalo de tiempo arbitrario; aunque la información dependa de varios relojes-observador en caída libre, dependencia que veremos puede ser mejorada.

Podemos construir también el sistema de coordenadas de esta otra forma: se toman varias reglas iguales de 1 metro numeradas consecutivamente y se van tendiendo, con sus extremos en contacto, desde el observador gravitatorio hasta el observador en el infinito. En cuanto al tiempo tenemos relojes idénticos que vamos estacionando uno por regla; sin embargo no tenemos claro como manejar este tiempo en escalas superiores a la local. Llamemos a este sistema de coordenadas sistema G.

Tenemos por tanto un sistema de coordenadas formalmente completo y otro que no lo está. Sin embargo podemos encontrar relaciones entre las *coordenadas* de estos dos sistemas para sucesos próximos (diferenciales). Basta considerar que para tales sucesos las coordenadas L las puede determinar un único observador en caída libre, que suponemos inercial. Para el caso espacial, evaluado por el observador en caída libre tenemos que una pequeña variación de *coordenadas* G (dr_G^c) se representa por una pequeña variación de *coordenadas* L (dr_L^c) de modo que (el superíndice *c* indica “coordenada”)

$$dr_G^c = \beta^{-1} dr_L^c$$

Para el caso temporal imaginemos un reloj gravitatorio evaluado por el observador en caída libre de modo que la relación entre *coordenadas* L y G es

$$dt_G^c = \beta\, dt_L^c$$

Lo cual indica que, en una coordenada espacial determinada, los ritmos del reloj L y del G no son los mismos. Esta relación sirve para establecer la marcha del reloj L en función de un valor inicial y de la indicación de un reloj G, el cual no es mas que un reloj normal. Es *esencial* en todo esto que el lector distinga claramente entre coordenada y medida, en particular para la transformación espacial. Pese a que el sistema de coordenadas L está esencialmente en reposo para el observador gravitatorio, este observador no puede dar una interpretación métrica *directa* de las coordenadas espaciales L, como muestra la expresión para la transformación de coordenadas utilizada. Esto es fundamental por que no hemos de suponer la métrica aplicable en el sistema de coordenadas L, que será introducida en base a otras consideraciones. Matemáticamente las coordenadas L se conocen como coordenadas curvilíneas y las distinciones hechas entre coordenadas y métrica caen completamente en la rama matemática conocida como Geometría Diferencial.

Si utilizamos la teoría clásica de Newton para evaluar la velocidad de caída libre podemos extrapolar las transformaciones de coordenadas anteriores así:

$$dt_G^c = \sqrt{1 - \frac{2GM}{r_L^c c^2}}\, dt_L^c \;\; ; \; dr_G^c = \frac{dr_L^c}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{r_L^c c^2}}}$$

El sistema de coordenadas G tiene una propiedad importante: para sucesos próximos a una coordenada espacio-temporal de referencia se puede considerar inercial. Esto permite expresar el elemento de línea de Minkowsky para sucesos próximos en coordenadas L de esta forma

$$\left(dr_G\right)^2 - c^2\left(dt_G\right)^2 = ds^2 = \frac{(dr_L)^2}{1-\frac{2GM}{r_L c^2}} - c^2(dt_L)^2\,(1-\frac{2GM}{r_L c^2})$$

Si asignamos a esta cantidad *propiedades métricas invariantes* entonces las coordenadas L que aparecen: *r, t* quedan despojadas de dichas propiedades desde el punto de vista del observador G, aunque pueden ser medidas por el observador adecuado en caída libre. De este modo nuestro sistema de coordenadas L queda completado al añadirle esta forma métrica. Los sucesos asociados al movimiento de un rayo de luz propagándose en la dirección *r* se caracterizan por ds=0, lo que implica que, en coordenadas L, la velocidad de la luz no es *c*. Sin embargo a este resultado el observador gravitatorio no puede asignarle el rango de *medida.* De esta forma sucesos con las mismas coordenadas L tienen asignadas distintas medidas para el observador gravitatorio y el del infinito.

Podemos completar fácilmente el resto de coordenadas y obtener esta métrica

$$ds^2 = (r d\phi)^2 + (r\,sen(\phi)\,d\theta)^2 + \frac{(dr)^2}{1-\frac{2GM}{rc^2}} - c^2(dt)^2\,(1-\frac{2GM}{rc^2})$$

dado que las componentes perpendiculares al movimiento de caída libre no resultan alteradas en el cambio de referencia y son iguales en L y en G.

Vamos ahora con la cuestión de si los relojes L funcionan todos al mismo ritmo y que significa esto físicamente. Hemos obtenido un resultado previo, en primera aproximación, sobre la discrepancia de ritmos de relojes gravitatorios (relojes G) situados a distinta altura (*Fotones y Relatividad General* y *Problema de los cohetes espaciales*). Podemos obtener este mismo resultado a partir del comportamiento de relojes L a distinta altura si suponemos que la marcha de relojes L separados espacialmente es idéntica.

$$\frac{\Delta t_G^{r1}}{\Delta t_G^{r2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_1 c^2}}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_2 c^2}}}\frac{\Delta t_L^{r1}}{\Delta t_L^{r2}}; \quad si \quad \frac{\Delta t_L^{r1}}{\Delta t_L^{r2}} = 1 \rightarrow \frac{\Delta t_G^{r1}}{\Delta t_G^{r2}} \approx 1 - \frac{(V_2 - V_1)}{c^2}; \qquad (7.1)$$

$$V = -\frac{GM}{rc^2}$$

lo que nos dice que, si r2 está a un potencial mayor que r1 entonces una cuenta de 1 segundo en r2 corresponde a una cuenta de menos de 1 segundo en r1. La marcha del reloj G r2 es mas rápida que la del reloj G r1 y podemos comparar su marcha sin necesidad de moverlos por la existencia del patrón regular intermedio de los relojes L.
Imaginemos ahora el observador del infinito con un foco que emite luz con frecuencia bien definida *w*∞. Este observador emite un rayo sobre la dirección *r* hacia el observador gravitatorio. ¿Cómo afecta el campo gravitatorio a la luz?, a priori no lo sabemos pero podemos suponer la marcha regular de relojes L y en función de ella podemos plantear la siguiente hipótesis:

<u>El periodo de la luz medida con relojes L es igual independientemente de la posición (coordenada r) del observador.</u>

Esta hipótesis genera inmediatamente este resultado

$$T_G = \sqrt{1-\frac{2GM}{r_L^c c^2}}\,T_{G\infty} \Rightarrow w_G = \frac{w_{G\infty}}{\sqrt{1-\frac{2GM}{r_L^c c^2}}}$$

donde T es el periodo de la onda electromagnética, el subíndice G hace referencia al observador gravitatorio y el subíndice infinito hace referencia al observador en el infinito; para el cual los relojes L y G funcionan al mismo ritmo. Esta relación entre frecuencias se ha comprobado experimentalmente, para bajas modificaciones de frecuencia, en el experimento de Pound-Rebka.
En conclusión podemos considerar validada nuestra hipótesis sobre el tiempo, al menos en primera aproximación, y considerar que los relojes L marchan todos al mismo ritmo y definen un tiempo común para el sistema de coordenadas L utilizado para describir el campo gravitatorio.
Propongo ahora al lector la siguiente cuestión: ¿Un observador en caída libre desde el infinito constata efecto Doppler en la luz que recibe de un foco en el infinito? ¿Cuanto vale este efecto?
Para ver esta cuestión imaginemos un campo gravitatorio central estático y un túnel que pasa por la masa que crea el campo, tal como aparece en el dibujo. Existen dos observadores inicialmente en infinito (A y B). Estos observadores empiezan a caer de modo que en un instante dado el sistema presenta la configuración del dibujo. En ese momento observan un fotón emitido por la fuente en A.

En el instante señalado los dos observadores pueden considerarse sistemas inerciales y por tanto pueden aplicar las transformaciones de frecuencia de la relatividad especial entre ellos; por tanto la frecuencia del fotón no va a ser la misma para ambos observadores:

$$\frac{w_2}{w_1} = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

donde la velocidad relativa *v* es entre (1) y (2). Por la *validez local de la relatividad especial* podemos calcular esta velocidad utilizando el punto de vista de un observador gravitatorio coincidente con (1) y (2), utilizando la composición de velocidades de la relatividad especial y tomado *vg* como se ha venido haciendo

$$v = \frac{2v_G}{1+\left(\frac{v_G}{c}\right)^2} \rightarrow \frac{w_2}{w_1} = \frac{1+\sqrt{\frac{2GM}{rc^2}}}{1-\sqrt{\frac{2GM}{rc^2}}}$$

Podemos calcular ahora w1 aplicando la validez local de la relatividad especial junto con la ley esperada para la frecuencia de una onda electromagnética procedente del infinito

$$w_1 = w_G\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} = \frac{w_\infty}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \rightarrow w_1 = \frac{w_\infty}{1+\sqrt{\frac{2GM}{rc^2}}}$$

Para el límite de agujero negro ($r = 2GM/c^2$), y mas allá, tenemos que el observador 1 percibiría una frecuencia w_1 finita procedente del foco A y deducimos que el observador 2 percibiría una frecuencia w_2 infinita en el límite del agujero negro. Esta situación física indeseable se evita si consideramos, como se piensa actualmente, que el observador 2 no tiene forma de atravesar el agujero negro. El observador gravitatorio en reposo en el borde del agujero negro también percibiría una frecuencia infinita procedente de A. Esto se interpreta como una limitación debida a las coordenadas usadas: cerca del agujero negro los observadores deben ser móviles, no estacionarios o en reposo como supone la métrica de Schwartzschild. Además este movimiento debe ser hacia el interior del agujero para evitar una frecuencia infinita procedente del foco A si el movimiento fuese hacia el exterior. Por tanto un observador no tiene impedimento para entrar y no puede salir de un agujero negro.

8-RADIACIÓN DE UNA CARGA ACELERADA Y CAMPO GRAVITATORIO.

Existe una conocida imagen denominada a veces "el cajón de Einstein" en la que un observador dentro de un cajón acelerado por un motor externo, supuesto inobservable para dicho observador, no es capaz de distinguir entre su estado físico real y un estado de reposo en que actúa un campo gravitatorio uniforme. En base a esta imagen se suele explicar el principio de equivalencia y supone una simetría física local entre un observador gravitatorio y otro observador acelerado.
Así por ejemplo, en el caso del observador del cajón, podemos imaginar que experimentando llega a la siguiente ley física: Para que cualquier objeto físico permanezca sin aceleración hay que actuar sobré dicho cuerpo con una fuerza de valor determinado *mg*, donde *m* es la masa inercial del objeto y *g* es la aceleración inercial. Invocando la simetría del principio de equivalencia resulta que esto también es cierto para un observador en reposo en la superficie de la tierra; *interpretando* ahora *g* como intensidad del campo gravitatorio y *m* como la masa o carga-gravitatoria. El hecho relevante de la simetría es que la masa inercial y la masa gravitatoria son siempre iguales entre sí, lo cual se aceptó sin explicación desde los tiempos de Newton. Como consecuencia resulta que la aceleración impartida por la gravedad es la misma *independientemente del valor de la masa y de la naturaleza físico-química del objeto;* hechos estos que se conocen desde Galileo.
En adelante se considera como referencia un campo gravitatorio que se pueda considerar de intensidad constante en el área en que se realizan las experiencias, tal como podemos experimentar habitualmente en la superficie de la tierra. Como es usual, los objetos de nuestras experiencias se toman lo bastante pequeños como para considerar que no modifican el campo gravitatorio existente.

El principio de localidad
Sin embargo hay fenómenos físicos que parecen no seguir esta simetría entre gravedad y aceleración. En particular el caso de la emisión de radiación por una carga acelerada, conocida en la teoría electromagnética clásica. Para este caso, la simetría implica que un objeto cargado en reposo para el observador del cajón acelerado emite radiación y por tanto un objeto cargado en reposo sobre la superficie de la tierra emitiría radiación. Parece que esto no ocurre en base a lo que conocemos en la tierra o datos astronómicos. Pero hay un detalle relevante en el caso de la emisión de radiación de una carga en el cajón acelerado: si el observador se preguntase por el origen de la energía radiada debería concluir que la fuente u origen de la energía radiada no está en el interior del cajón, sino que procede del objeto externo que produce la aceleración del cajón. Es decir, debería dar una explicación *no-local* al proceso de radiación. Concluimos que la simetría asociada al principio de equivalencia solamente es aplicable a sucesos locales cuyas causas estén dentro del cajón, Por tanto el principio es aplicable al caso de la radiación en tanto que la causa de la radiación sea local o interna al cajón acelerado. La radiación *simétrica* equivalente debería estar asociada a un proceso local tal como una modificación de energía cinética o de masa de la carga radiante y debe *descontarse* la radiación asociada a las aceleraciones no-locales dentro del cajón acelerado si se quiere mantener la simetría.

Como el mismo Einstein señaló, es mejor atender a lo que los físicos hacen que a lo que dicen. En concreto, es importante decir que la forma en que se aplica el principio de equivalencia en la teoría general de la relatividad no es la imagen anterior del cajón, sino lo que podemos llamar el *principio de localidad*:

En todo campo gravitatorio existe un observador inercial en caída libre para el que las leyes físicas evaluadas localmente son las de la relatividad especial; en particular la métrica aplicable es la de Minkowsky.

¿Qué tiene que ver esto con la imagen anterior del *cajón acelerado*? Las palabras clave son *inercial* y *local*: el observador en caída libre no debe ser capaz de determinar su estado de movimiento a partir de experimentación física local. Podemos imaginar ahora al observador encerrado en otro *cajón en caída libre* en el campo gravitatorio y manejando solamente la información disponible en el interior de dicho cajón. El hecho de que la aceleración gravitatoria actúe de forma homogénea sobre cualquier objeto físico, tal como se vio al principio, anula una posibilidad para que el observador pueda determinar su estado de movimiento, ya que la gravedad no va a afectar las posiciones relativas de partículas dentro del cajón y estas solamente se van a mover por efecto de fuerzas internas al cajón.
Pero ¿que podemos esperar ahora del caso de la carga en caída libre?, si aplicamos el principio de localidad expresado anteriormente debemos esperar que la carga en caída libre no emita radiación, ya que se trata de una carga en reposo para un *observador inercial*. Dicho de otro modo, si emitiera radiación el observador en caída libre tendría una base física para determinar su estado de movimiento y no podría considerarse inercial, a la par que necesitaría justificar el origen de la energía radiada por una carga en reposo. Supongamos que todo esto es correcto y físicamente comprobable; todavía la radiación nos seguirá dando problemas. Cambiemos las paredes opacas del cajón por cristal y amplias ventanas al exterior. Imaginemos que el cajón en caída libre pasa cerca de un objeto cargado y en reposo en el campo gravitatorio: por ejemplo en lo alto de un rascacielos. El caso será el de una carga acelerada y un observador inercial. Dicho así esto clásicamente significa emisión de radiación desde la carga. Sin embargo la aceleración que percibiría el observador en caída libre sería no-local. Este observador no puede atribuir a la fuerza de contacto existente entre dicha carga y el rascacielos el ser la causa de la aceleración de la carga, ya que la tierra entera se está moviendo con la misma aceleración; el observador en caída libre está observando una aceleración no-local. Esto es análogo al resultado no-simétrico del caso del cajón acelerado en que la radiación implicaría una fuente de energía inobservable, pero en este caso la fuente también es inexistente y por tanto no debería haber emisión de radiación. Concluimos por tanto que una carga acelerada solo emite radiación si su aceleración procede de una acción local, es decir, de una *fuerza* aplicada a la carga. En consecuencia, la gravedad no puede considerarse como una fuerza por su falta de localidad.
Recordemos que el teorema de Pointing, que incluye el término de radiación electromagnética, se plantea para un sistema de cargas afectadas por fuerzas eléctricas y magnéticas. Estas fuerzas, mediadas por el campo electromagnético, tienen un punto de aplicación local sobre las partículas cargadas.

Significado físico de la radiación de una carga acelerada
La radiación de una carga acelerada se puede interpretar como asociada a un mecanismo de transferencia de información que ajusta el estado del campo propio de la carga con el estado cinemático de dicha carga. La radiación de una carga acelerada conlleva el reajuste de las líneas de campo propio en función del estado cinemático de la carga en un tiempo retardado; debido a que las alteraciones del campo en el vacío se propagan a la velocidad de la luz. La radiación está por tanto asociada a un proceso básicamente informativo. Esta relación informativa entre la carga y su campo se ve claramente en el límite de la velocidad de la luz: no podemos acelerar la carga por encima de la velocidad de la luz. Si esto fuese posible y el campo siguiese las leyes de Maxwell, entonces la carga y su campo evolucionarían de forma independiente. El teorema de Gauss podría violarse: el campo en la superficie de una esfera que englobase la carga móvil podría mantenerse sin cambios a pesar de que, un instante mas tarde, la carga ya estuviese fuera de dicha esfera; dado que las modificaciones del campo se propagarían a la velocidad de la luz. No parece probable que se puedan mantener las leyes de Maxwell y cargas aceleradas por encima de la velocidad de la luz; de hecho estas ecuaciones representan precisamente una relación causal entre el campo y sus fuentes. Podemos ver en la existencia del límite de la velocidad de la luz una señal de dependencia intrínseca entre el campo y sus fuentes.

Por tanto solamente existe radiación en la medida que suponga una transferencia de información entre la partícula y su campo. No parece correcto introducir una limitación física a la posibilidad de que un observador pueda acceder a la misma información que cualquier otro observador en un experimento determinado. Por tanto en el caso de una carga acelerada si hay un observador que no es capaz de detectar emisión de radiación, entonces ningún observador puede hacerlo. Esto no quiere decir que la información sobre el estado cinemático de la partícula se pierda; puede haber casos en que esta información sea conocida de antemano.

Veamos un ciclo físico completo de caída de una carga hasta que queda en reposo en el suelo y vuelve a caer:

1-Carga en caída libre. Para el observador inercial en caída libre se trata de una carga sin aceleración y por tanto no hay emisión de radiación. Por tanto el observador gravitatorio tampoco detecta radiación, ya que no puede conseguir mas información que el observador en caída libre. Esto puede explicarse también pensando que tanto la carga como su campo caen simultáneamente con la misma aceleración en el campo gravitatorio.

2-Impacto de la carga con el suelo. En el instante de choque podemos pensar que el campo propio de la carga sigue cayendo al no estar informado simultáneamente del estado dinámico de la carga. La radiación está asociada al transporte de información que intenta reconstruir el campo propio de acuerdo al estado de movimiento de la carga. La fuente de energía de la que se extrae la radiación es la propia energía cinética de la carga.

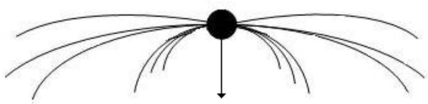
3-La carga permanece en reposo para el observador gravitatorio. En este caso no podemos localizar una fuente que justifique la emisión de radiación y parece claro también que el campo de la carga es estacionario; por tanto no deberíamos esperar emisión de radiación. Sin embargo, siendo la caída libre el estado inercial en el que hay que dar menos explicaciones podemos preguntarnos como sabe el campo que su carga ya no está en caída libre. Esto induce a pensar en un mecanismo de comunicación que no suponga radiación. Una posibilidad es que la carga posea algún momento magnético intrínseco o inducido por impacto que genere un vector de Pointing ligado a la carga, tal como el caso de una carga moviéndose a velocidad constante en un sistema de coordenadas inercial. El vector de Pointing en este caso describe un flujo de energía alrededor de la carga que no escapa del campo propio de dicha carga. En soporte de esta idea se puede decir que son conocidos casos de magnetización por impacto, como el caso de un clavo golpeado por un martillo. También es probable que, al menos en parte, el magnetismo lunar proceda de impactos de meteoritos. El viento solar está formado por partículas cargadas a altas velocidades que, al no tener la luna una atmósfera, impactan directamente en su superficie. Según nuestro argumento, esto podría ser una fuente del magnetismo lunar. Otro caso puede ser la “magnetic carpet” o “alfombra magnética” en la superficie del sol. (ver sección de bibliografía)

4-La carga vuelve a caer desde su estado de reposo. Permítanme un pequeño rodeo antes de abordar este punto.

El caso del péndulo

¿Emitiría radiación una carga oscilando en un péndulo clásico? El análisis infinitesimal clásico de este movimiento introduce dos componentes que combinan vectorialmente: La componente gravitatoria y la componente de la tensión de la cuerda del péndulo. Un observador en caída libre que instantáneamente coincida con la carga y con su misma velocidad verá el movimiento de esta compensado en cuanto al efecto gravitatorio y solo percibirá el movimiento causado por la tensión de la cuerda. Para este observador la acción sobre la carga es local y coincide con la tensión de la cuerda. La carga debe informar a su campo de esta acción local y por tanto debería emitirse radiación. Esta radiación es a costa de la *energía cinética* de la carga, por lo que al agotarse esta fuente de energía el péndulo dejará de radiar. Además notamos que la acción de la tensión de la cuerda sobre la carga no supone transferencia de energía. Esto es análogo a una carga que se mueve en un campo magnético afectada por la fuerza de Lorentz y emitiendo radiación, lo cual es un hecho experimentable denominado radiación sincrotrón.
Retomemos el punto 4 anterior: ¿Qué pasaría si, estando el péndulo en reposo, se corta la cuerda?. Parece evidente que un punto del campo relativamente alejado de la carga no puede reaccionar simultáneamente al cambio cinemático local experimentado por la carga. En el mismo instante en que se corta la cuerda una carga de prueba relativamente alejada sigue experimentando la misma fuerza durante un cierto tiempo correspondiente al retardo de propagación de la información. Por tanto para que una carga en reposo alcance el estado de caída

libre debe pasar un periodo transitorio, a lo largo del cual zonas cada vez mas grandes del campo se van ajustando al estado de caída libre de la partícula. Es posible que a este transitorio haya asociada cierta cantidad de radiación.
Debido a que las distintas partes del campo no caen al mismo tiempo las líneas de campo aparecerán flexionadas de forma similar a como aparece en la figura.



Según el principio de equivalencia esta configuración de líneas no debe suponer emisión de radiación y en las proximidades de la carga, supuesta puntual, para un observador gravitatorio las líneas son iguales que las de una carga con la velocidad instantánea de caída correspondiente.

mas preguntas…

Según Isaac Asimov el momento en que nos acercamos al conocimiento no es cuando exclamamos “Eureka!”, sino cuando pensamos “que extraño es esto”….

1-Se ha utilizado la idea de transporte de información entre la carga y su campo propio. Pero esta transmisión de información:
¿Es unidireccional de la carga al campo o también es posible en la dirección contraría, del campo a la carga?
¿Qué efecto tiene sobre la carga el transporte de información desde el campo? ¿Un efecto acelerativo, una modificación del momento magnético, ambas cosas…?

2-Una observador en caída libre desde el infinito hacia el centro de un agujero negro acompaña a una carga también en caída libre. Atraviesan el límite del agujero negro y la carga choca contra la singularidad central: el supuesto punto que acumula toda la materia.
¿Cómo informa la carga a su campo de este suceso?
Se supone que no es posible transmitir información desde el interior del agujero negro al exterior; entonces:
¿El campo eléctrico en el exterior del agujero sigue cayendo hacia el agujero negro eternamente?

9-LA CORONA SOLAR, ¿UN INDICIO CUÁNTICO EN LA GRAVEDAD?

Las hipótesis físicas actuales sobre el funcionamiento de la corona solar no acaban de ser concluyentes de cara a justificar varias características de esta región de la atmósfera solar: en particular su elevada temperatura respecto de otras capas adyacentes. La presente sección presenta una nueva hipótesis sobre la física de la Corona Solar.

Se pueden distinguir una serie de capas contiguas en la atmósfera solar:

1-Fotosfera: Se considera la superficie del sol. Toda la energía emitida por el sol procede de la Fotosfera. La temperatura oscila entre 4000-6400K.

2-Cromosfera: Se extiende sobre la Fotosfera hasta 10.000Km aproximadamente.
En esta capa se registran emisiones en el espectro infrarrojo y visible, lo cual permite distinguirla mediante observación con filtros ópticos adecuados. La temperatura de esta capa es superior a la de la Fotosfera y oscila entre 4500-20.000K

3-Corona: Se extiende algunos millones de Km. sobre la Cromosfera. La temperatura de esta capa es del orden de millones de Kelvin.

Podemos ver en esta descripción un comportamiento muy diferente a lo que cabe esperar; y es que, a medida que nos alejamos de la fuente emisora o Fotosfera, la temperatura no disminuye, sino que aumenta progresivamente. Desde un punto de vista termodinámico podemos pensar que se está produciendo una transferencia de calor desde un foco a temperatura baja a otro con mucha mayor temperatura; lo cual supondría una reducción de entropía notable y difícil de justificar. Podemos pensar alternativamente en la existencia de algún mecanismo de transferencia de energía que no sea de tipo calorífico en inicio, pero que al llegar a la cromosfera, y en especial a la corona, sea disipada en forma de calor.

Se han propuesto varias posibilidades para este mecanismo. Las mas relevantes parecen ser estas:

A-Teoría de calentamiento por ondas. Se supone la existencia de ondas magneto-acústicas y ondas de Alfvén que transportarían energía desde la Cromosfera a la Corona. El punto débil de este mecanismo es que no es capaz de transportar la energía suficiente a la corona debido a la baja presión de la Cromosfera y a la reflexión en la frontera Cromosfera-Corona. Las frecuencias de estas ondas se suponen entorno a 100 miliHertzios.

B-Teoría de reconexión magnética. Se basa en la capacidad del campo magnético solar para inducir corrientes eléctricas en la corona solar. Las corrientes pueden reconectarse o colapsar súbitamente, liberando la energía acumulada en forma de calor y ondas en la corona.

Hipótesis
Se ha presentado anteriormente la idea de que las ondas cuánticas deben estar sometidas a un fenómeno de colapso. El origen de este colapso sería la incapacidad de modular una onda cuántica. La expresión que determina este colapso sería esta

$$\Delta E \Delta T \approx h$$

significando que si una onda cuántica intercambia una cantidad de energía ΔE, entonces colapsará en un tiempo ΔT, de modo que el producto de ambos valores se aproxima a la constante de Planck.
También hemos visto fenómeno de red-shift gravitatorio. La onda procedente de un oscilador emitiendo en la superficie del Sol es percibida para un observador en el infinito desplazada al rojo en el espectro de frecuencias. Esto se puede interpretar como una transferencia de energía entre el campo gravitatorio y la onda electromagnética. Podemos suponer que a toda onda electromagnética se asocia una onda cuántica, de modo que las dos ideas anteriores inducen a pensar que la modificación de energía de la onda electromagnética debida a la gravedad está limitada por un fenómeno de colapso cuántico. Podemos hacer un cálculo simple utilizando el potencial gravitatorio para el Sol

$$\Delta E = \frac{h\nu}{c^2} GM \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r} \right) = \frac{h\nu}{c^2} \frac{GM(r - r_s)}{rr_s};\ D = r - r_s; \Delta T = \frac{D}{c}$$
$$\Delta E \Delta T \approx h \rightarrow \nu GMD^2 - c^3 r_s D - c^3 r_s^{\ 2} \approx 0$$

donde se ha introducido la masa equivalente del fotón, el radio del sol r_s , y la altura de colapso D. Despejando D y haciendo números se llega a

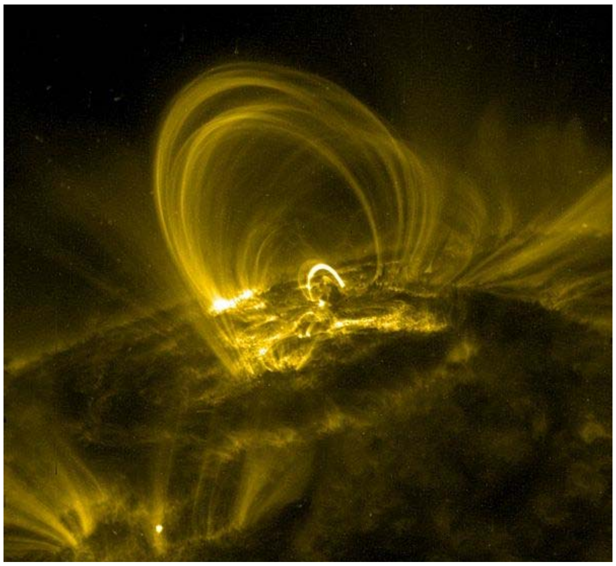
$$D \approx \frac{r_s}{10^{-5}\nu} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \times 10^{-5}\nu} \right)$$

Las frecuencias y las alturas de colapso correspondientes resultan ser

Frecuencia	**Espectro**	**Altura de Colapso: D**	**Región**
100 EHz	Rayos Gamma	~10 metros	Fotosfera
1000 PHz	Rayos X	~300 metros	Fotosfera
350 THz	Visible	~1 Km	Fotosfera
1 THz	Infrarrojo Lejano	~300 Km	Fotosfera/Cromosfera
1 GHz	Microondas/Radio	~10.000 Km	Cromosfera/Corona
1 MHz	Radio	~350.000 Km	Corona
1 KHz	Radio	~150.000.000 Km	Órbita terrestre
1 Hz	Baja Frecuencia	~100.000.000.000 Km	Heliopausa

Si consideramos el rango de frecuencias predominante en la emisión de radiación solar en la zona ultravioleta-infrarrojo (1000 – 200 THz), resulta que este rango del espectro colapsa en una cáscara esférica de aproximadamente 10Km de anchura y situado al final de la fotosfera y comienzo de la cromosfera. Los datos disponibles señalan un cambio en la temperatura y densidad atmosférica en esta zona: hasta unos 500Km sobre la superficie solar la temperatura atmosférica disminuye con la altura, pero a partir de aquí la temperatura aumenta y la densidad disminuye con la altura.

Vemos que para la Corona las frecuencias están en el espectro de radio; por tanto pueden generar, antes del colapso, corrientes de inducción en el material de la corona cargado eléctricamente. El colapso supone un cambio de estado de la onda electromagnética, pero es difícil imaginar en que se transforma; aunque en todo caso debe conservarse la energía. Podemos imaginar el colapso de forma análoga al caso de un circuito eléctrico inductivo que se desconecta súbitamente de la fuente. Se produce un cambio brusco del flujo magnético que, si no hay posibilidad de *acumularlo*, genera un chispazo; fenómenos como el viento solar, las *llamaradas solares* (solar flares) pueden ser los correspondientes. Este planteamiento supone que las ondas de radio no colapsan antes por impacto de sus fotones con partículas o material atmosférico. Es decir, se supone que desde la Fotosfera hasta la Corona la atmósfera es suficientemente transparente a las ondas de radio. También se ha despreciado la influencia gravitatoria de los planetas. Si fuese el caso, esta influencia podría detectarse observando la actividad en la corona especialmente durante el tránsito de Mercurio por el disco solar. Según esta hipótesis habría una menor actividad en las zonas correspondientes de la corona solar, ya que la presencia del planeta tiende a compensar la pérdida de energía de los fotones debida al campo gravitatorio solar.



Líneas de campo magnético atravesando la Corona Solar.
Imagen tomada en el espectro de rayos X.

La existencia de cierta capacidad de acumulación de energía en el sol es deseable de cara a explicar los ciclos de actividad solar. De esta forma, según nuestra hipótesis, no toda la energía radiada desde la fotosfera se aleja progresivamente del sol, sino que una fracción es acumulada constantemente y esta acumulación está relacionada con el fenómeno de colapso de la radiación electromagnética. Esta energía puede alimentar el crecimiento de las manchas solares y el campo magnético solar (global y "*sun magnetic carpet*"); hasta llegar al máximo solar en que la capacidad de acumulación es sobrepasada y aparecen las *tormentas solares (CME).* En el máximo solar se produce un fuerte reajuste o reconexión del campo magnético solar que genera un excedente de energía en forma de tormenta solar, viento solar y otras manifestaciones que pueden afectar al sistema de telecomunicaciones e incluso al clima en la tierra.

Vemos en la tabla que la distancia de colapso disminuye a medida que la frecuencia aumenta. ¿Es posible que la distancia de colapso sea igual o menor que la longitud de onda? Podemos hacer un planteamiento genérico introduciendo la cinemática de una onda cuántica

$$\Delta T = \frac{V}{c^2}\Delta r$$

Siendo V la velocidad de grupo del paquete de ondas. Aplicando directamente la condición de colapso tenemos

$$\frac{h\nu}{c^2}\frac{GM\lambda}{r(r+\lambda)} \times \frac{\lambda V}{c^2} \approx h;\ \lambda\nu = \frac{c^2}{V} \rightarrow \quad \lambda \approx \frac{r^2}{\frac{GM}{c^2} - r}$$

puesto que el radio debe ser superior al límite de agujero negro: $r>2GM/c^2$,vemos que la ecuación no tiene una solución físicamente aceptable. Concluimos que, al menos en esta aproximación, un campo gravitatorio no es capaz de provocar el colapso de una onda electromagnética en un espacio menor o igual que la longitud de onda, y por tanto en un tiempo menor o igual que el periodo de dicha onda. Pero este resultado depende de cómo definamos la condición de colapso; así tomando la mitad del cuanto de acción tenemos

$$\Delta E \Delta T \approx \frac{h}{2} \rightarrow \lambda \approx \frac{r^2}{\frac{2GM}{c^2} - r}$$

En este caso el límite corresponde a una longitud de onda infinita para el radio de agujero negro y parece que tampoco tiene sentido físico para una onda electromagnética.

APENDICE I: Una definición de tiempo físicamente razonable.

Planteamos la sincronización asociada a la definición de tiempo en un sistema de coordenadas inercial como una forma de *transferencia de información*: en el origen de coordenadas tenemos un reloj A(0,0,0) en reposo. En $\mathbf{t_A}$ emite una señal de sincronización esférica desde el origen. Cuando la *señal* llega a otro reloj B(x,y,z) en reposo relativo, este debe marcar el valor $\mathbf{t_B = t_A + d(x,y,z)/s}$; donde **d(x,y,z)** es la distancia al origen, distancia que es constante para cada reloj en reposo respecto del reloj A(0,0,0), y **s** es la velocidad de propagación de la información. Suponemos que, una vez sincronizados, los relojes mantienen su sincronismo al margen de cualquier condición física.

Para que este planteamiento tenga lógica, el valor **s** debe ser conocido previamente al menos en un sistema de referencia privilegiado (éter). Este conocimiento es una premisa anterior al uso de cualquier sistema de referencia de espacios y tiempos. No se puede medir *directamente* **s** antes de sincronizar los relojes, ya que el tiempo no estaría definido localmente en cada punto; pero tampoco se pueden sincronizar los relojes si no se conoce **s**. Si la medida directa no es posible entonces hay que recurrir a una medida indirecta basada en alguna propiedad de la señal utilizada. Pero si la propiedad requerida procede razonablemente de algún principio físico, entonces <u>¿Por qué ha de distinguir a un observador inercial determinado (éter) frente al resto, en contra del principio de relatividad?</u>. Se puede pensar en una alternativa en que la señal rebota en algún obstáculo y vuelve al foco emisor. En este caso podríamos medir la velocidad de la señal empleando un solo reloj y la distancia al espejo. Sin embargo parece que tendríamos que aceptar esta propiedad: Si la velocidad de ida de la señal es **s**, la velocidad de vuelta del espejo es **–s.** Según Einstein esta señal existe y se trata de cualquier señal electromagnética propagándose en el vacío. Además las propiedades antes señaladas describen un principio físico: *El principio de constancia de la velocidad de la luz en el vacío,* y por tanto se debe aceptar el comportamiento descrito tanto si el espejo está en reposo como si está en movimiento relativo al observador.

La propagación de la luz en el vacío parece ser la señal de sincronismo mas sencilla posible. El significado de la constante que denominamos “velocidad” de la luz en el vacío no hace referencia a movimiento alguno relativo a un medio de propagación o a un sistema de referencia inercial determinado, como pueda ser el foco emisor de luz. En cambio: *para todo* sistema de coordenadas inercial, si una perturbación o señal luminosa en el vacío tiene su foco en $A(x_a, y_a, z_a, t_a)$ y es recibida en $B(x_b, y_b, z_b, t_b)$; entonces el tiempo empleado por la luz: $t_b - t_a$ es, *por definición,* la distancia entre $A(x_a, y_a, z_a)$ y $B(x_b, y_b, z_b)$ dividida por la constante que denominamos “velocidad” de la luz en el vacío: **c**. Este es el principio llamado de constancia de la velocidad de la luz en el vacío; aunque un nombre mas adecuado es *principio de sincronización de relojes*. Este principio establece el carácter de constante universal de la velocidad de la luz en el vacío, entendiendo por universal al conjunto de todos los sistemas de coordenadas inerciales posibles; se puede definir un sistema de coordenadas inercial como aquel en que la velocidad de la luz en el vacío es una constante isótropa. Esta es la pieza clave entre dos cosas incompatibles desde la física clásica: las ecuaciones de Maxwell y en el principio de relatividad. También es la base cinemática para la construcción de una nueva Mecánica[1].

Intuitivamente cualquier reloj en reposo es equivalente para sincronizar al resto:

1-Reflexiva : Un reloj A esta sincronizado con sigo mismo. Evidente ya que d(A,A)=0 y t(A,A)=0.

2-Simétrica: Si B esta sincronizado con A; entonces A está sincronizado con B. Como d(B,A)=d(A,B) y **c** es *independiente del sentido,* entonces t(A,B) = t(B,A).

3-Transitiva: Si B esta sincronizado con A y C está sincronizado con B; entonces C está sincronizado con A. Si d(B,A) = **c**·t(B,A) y d(C,B) = **c**·t(C,B) de la geometría del triángulo y dado que **c** es *independiente de la dirección*; entonces obtenemos t(C,A)=d(C,A) /**c**.

Estas 3 propiedades representan la homogeneidad e *isotropía* del tiempo en un sistema de coordenadas inercial y dependen del supuesto de que dos relojes en reposo sincronizados mantienen su sincronismo, abstrayendo cualquier otra circunstancia física. El principio de constancia de la “velocidad” de la luz en el vacío, las propiedades 2-3, la linealidad del espacio y el tiempo y algunos requisitos de simetría son los ingredientes utilizados por Einstein[1] para derivar las transformaciones de Lorentz. Por tanto podemos considerar que estas transformaciones de Lorentz se basan por completo en la definición de tiempo.

“El *tiempo de un sistema de coordenadas inercial* queda definido como el conjunto de indicaciones de relojes iguales en reposo relativo al observador y que registran lo mismo simultáneamente”[2].

¿Existen formas de sincronización alternativas a la basada en la luz?. Veamos esta alternativa: Tenemos un reloj patrón y el resto de relojes se mueven hasta la posición del patrón, se sincronizan con él y después se mueven hasta su posición final. Este planteamiento es incompatible con la definición de tiempo que se ha propuesto, ya que ésta predice que un reloj en movimiento atrasa respecto de uno en reposo: la marcha de un reloj depende del movimiento relativo. Esta consecuencia ha sido comprobada experimentalmente[5]; vemos que la condición de que los relojes estén en reposo es básica. Minkowsky da una explicación profunda de este hecho considerando que la coordenada tiempo es una 4ª dimensión añadida al espacio Euclídeo tridimensional (**n-14**).
La definición de tiempo por medio de un pulso de sincronización representa básicamente un proceso de transferencia de información (pió 3.2). La física clásica cumple con el presente planteamiento sobre el tiempo con la presunción, físicamente arbitraria, de que existen señales capaces de transferir información entre un foco y un receptor a velocidad infinita (**s**=∞). Se debate actualmente las condiciones del experimento de Alain Aspect y otros relativos a partículas cuánticamente entrelazadas que hacen pensar en la posibilidad de transferir información a velocidad super-lumínica[8].

El recurso a la definición que aparece en el principio de sincronisno de relojes puede parecer una forma de evitar preguntas embarazosas; casi todos creemos saber mucho sobre el tiempo[9] y así en muchos libros de física no se define el concepto. El recurso a la definición indica que estamos ante un límite de nuestro conocimiento *físico* del tiempo. La relatividad clásica define las coordenadas inerciales como tiempo absoluto y cartesianas no afectadas por ninguna fuerza; como consecuencia se obtiene que las leyes mecánicas son invariantes en estas coordenadas. La ampliación de esta idea que lleva directamente a la teoría de la relatividad dice que las coordenadas inerciales se definen por la mayor simetría, isotropía, invarianza y en general simplicidad en la descripción de *todas* las leyes físicas. La fuerte apuesta está en la palabra "todas". La integración de las ecuaciones de Maxwell en esta idea lleva a modificar el significado de la coordenada tiempo y reformular la mecánica clásica. Se creía saber todo acerca de las coordenadas inerciales, de modo que estas forzaban las leyes físicas. En el planteamiento de Einstein son las leyes físicas las que obligan a las coordenadas inerciales a comportarse de una forma determinada según las transformaciones de Lorentz.

El objeto de la teoría especial de la relatividad son las propiedades y la utilización de los sistemas inerciales de coordenadas. El principio (2) supone que siempre podemos encontrar uno de estos sistemas isótropos adecuado a nuestro problema físico particular. Si la experiencia no refrendase esto en gran medida, la teoría especial de la relatividad no tendría la importancia que tiene en física; sin embargo…(**n-15**)

Pero en mi opinión se puede añadir algo al concepto de tiempo. No basta con definir el concepto de tiempo de forma matemáticamente rigurosa como hace la relatividad. La información sobre el tiempo está en un reloj, y la información sobre el estado de un sistema suponemos que está en dicho sistema. Por tanto debe existir una forma de comunicar sistemas físicos con relojes que permita asociar el estado del sistema con el tiempo de una forma razonablemente precisa. En el caso de una partícula clásica esta asociación se representa matemáticamente como una función: **r**(t). Si no fuese posible alcanzar esta asociación de una forma razonablemente precisa, el concepto de *medida del tiempo* no serviría de mucho. Dado que suponemos que nuestros relojes están siempre en reposo, una forma para lograr la asociación es que nuestro sistema impacte contra los relojes como si fuese una bola de pin-ball. Es evidente que esto interfiere demasiado con el sistema y no puede considerarse razonablemente como una *medida*.

Una forma mas sutil es que el sistema emita una cantidad relativamente pequeña de radiación con información suficiente que capta un reloj muy próximo (local). De esta forma en el reloj se puede establecer la asociación entre espacio-tiempo y estado del sistema; **r**(t) supuesto un sistema relativamente pequeño sin estructura interna reseñable. Sin embargo esta alternativa requiere que el sistema esté en condiciones de emitir algún tipo de señal electromagnética, lo cual puede no ser posible para una partícula en el dominio cinemático cuántico como hemos visto. Solamente es seguro asignar un *tiempo local* a una partícula cuando esta conmuta entre dominios cinemáticos, ya que se necesita el dominio clásico para emitir

radiación. Por tanto, en este contexto, no tiene sentido el tiempo local para una partícula en el dominio cinemático cuántico.
Podemos pensar en un “reloj-radar activo” emitiendo un fotón que rebote en la partícula y retorne la información al mismo reloj**[20]**. Como vimos en antes, si la partícula está en el dominio cinemático cuántico esta interacción provoca el colapso de dicho estado y el paso al dominio cinemático clásico. Por tanto hemos alterado el estado del sistema que queríamos medir. En el caso de relojes pasivos en principio nada impide que una partícula conmute de dominio cinemático sin interferencia del observador y emita radiación que sea registrada por un reloj local. Esta sería la forma mas precisa posible para el tiempo local. De esta forma el tiempo local asociado a una partícula no se puede representar como un número real continuo, si no que habrá huecos asociados al domino cinemático cuántico. Es posible que una partícula en el dominio cinemático clásico en un punto determinado (x1, t1) “entre” en uno de estos huecos o dominios cuánticos y lo abandone, retornando al dominio clásico, en otro punto determinado (x2, t2). No existiría problema con la relatividad si la velocidad media en el hueco (x2-x1)/(t2-t1) superase la velocidad de la luz dado que en el hueco no está definido el concepto de tiempo local para la partícula, lo cual es un supuesto básico en la teoría de la relatividad clásica de Einstein. En este sentido, el hueco representa un desplazamiento relativo respecto al tiempo-local del sistema de coordenadas. Por simetría debemos pensar también que en nuestro hueco el espacio-simultáneo tampoco está bién definido, ya que no tenemos base para la simultaneidad sin el tiempo local. De esta forma los sucesos de entrada y salida del hueco pueden no estar relacionados causalmente y es posible encontrar dos observadores inerciales para los que estos sucesos cambien su orden de precedencia en el tiempo. Desde el contexto de la mecánica clásica esto supone una limitación en la información disponible de una partícula; sin embargo esta limitación no se debe a una pérdida de información. Respecto a estos huecos los observadores solamente se pueden poner de acuerdo en la existencia de una amplitud de posición y de tiempo, no en la dirección o el signo de estas amplitudes. En mi opinión el principio de Heisenberg representa una falta de información de este tipo.

Estos huecos están dentro del margen de la relatividad y permiten una representación elemental de la materia. De este modo la materia no es algo independiente del espacio-tiempo, sino que deben estar integrados y el concepto relevante debe ser al menos *espacio-tiempo-materia.*

APENDICE II: Campo, inercia y condiciones de contorno.

Un campo matemático es una función de varias variables: f(x,y,z,t); sin embargo hay un matiz: (x,y,z,t) no representa un punto de la mecánica. Ahora x,y,z,t es simplemente un punto de nuestro sistema de coordenadas asociado a un suceso físico “f”. No consideramos el movimiento de este punto, sino la propagación de la señal representada por “f”. En el problema clásico de la cuerda tensa, la forma de la cuerda es una función y=f(x,t). Esto no es un campo ya que f representa el movimiento de los puntos que forman la cuerda.
Esta ecuación se puede poner como F(x,y,t) = 0; lo cual da el movimiento de cada punto “x” si suponemos que este movimiento es unidimensional en “y”. Un campo es una zona del espacio en la que se manifiesta una determinada propiedad física: la fuerza eléctrica, la gravedad, etc..con independencia, en principio, de si existe un soporte mecánico o material para ella.
El planteamiento de las leyes físicas utilizando el concepto de campo marca un punto de inflexión muy sutil en la historia de la física. Inicialmente tenemos la partícula mecánica, que es útil en base a la identidad que proporciona a cualquier forma de movimiento. Inicialmente se piensa que cualquier movimiento de la naturaleza se basa en el movimiento de las partículas que estructuran la materia. El campo no proporciona de por si ninguna identidad a las partículas en que pueda sustentarse la propiedad física que describe, solamente expresa que en un punto del espacio y del tiempo ha ocurrido algún suceso medible. En el caso del campo lo relevante es el movimiento del propio espacio; es decir, si el espacio que se utiliza es inercial o no y como afecta esto a las *leyes del campo*. Esto queda solucionado automáticamente si se supone que hay un fundamento mecánico de estas leyes que se expresan por medio del objeto matemático campo. Eso es lo que hace Euler con las leyes hidrodinámicas utilizando el campo de velocidades de un fluido: v=f(x,y,z,t) y las leyes de Newton para una partícula. Las leyes del campo tratan de relacionar el comportamiento f(x,y,z,t) con el comportamiento f (x+dx, y+dy, z+dz, t+dt). De esta forma se introduce la causalidad: el campo describe una serie de sucesos f(x,y,z,t) que están relacionados causalmente. En relatividad el concepto de campo electromagnético debe considerarse como fundamental, sin base material. El campo ya no es simplemente una forma conveniente de plantear las leyes físicas. Hay leyes que no se pueden plantear sin este concepto, ya que la ausencia de base material pasa a ser fundamento. De este modo el problema para el electromagnetismo es el inverso al caso clásico: ¿Qué papel juega la inercia en las leyes del campo?. En el planteamiento clásico este problema quedaba saldado directamente por la utilización de las leyes mecánicas para establecer las leyes (ecuaciones diferenciales) del campo; en relatividad se opta por replantear el concepto de coordenadas inerciales. Pese a que desde la mecánica y desde el electromagnetismo se llegue al mismo tipo de ecuación de onda para la propagación de las acciones físicas hay una diferencia fundamental: la forma de establecer las condiciones de contorno sobre esta ecuación. En mecánica se hace referencia a la posición y velocidad inicial de las partículas. Para una onda electromagnética esta forma ya no es posible; pero existen otras formas. Saber electromagnetismo es en gran parte saber las diferentes condiciones de contorno de las ondas electromagnéticas. El papel

fundamental de las ecuaciones diferenciales en la física conlleva también gran importancia para las condiciones de contorno aplicables a estas ecuaciones. Puede que en muchos casos la determinación de las condiciones de contorno sea una cuestión sencilla e intuitiva; en otros casos no lo será y en general nunca debe subestimarse su importancia en un problema físico.

Las leyes del electromagnetismo son diferentes a las de la mecánica. Describen el comportamiento del campo electromagnético. Por tanto si conocemos alguna información sobre el campo, como puede ser la distribución de sus líneas de fuerza, por medio de las leyes de campo podemos completar nuestro conocimiento. Al revés también: si conocemos detalles sobre las cargas y corrientes podemos deducir de las leyes las líneas de fuerza del campo. Vemos que las líneas de fuerza tienen en cierto sentido un papel análogo a la trayectoria en los problemas de mecánica: proporcionan cierta información parcial que debe ser completada con la aplicación de las leyes físicas. Por ejemplo se pueden conocer las las líneas de campo en una pequeña zona del campo, pero no a gran escala. En el caso del electromagnetismo las leyes se expresan en forma de integrales de línea y de superficie sobre la descripción matemática del campo, *no hay alternativa*. Pero existe una diferencia notable de cara al aprendizaje: mientras que los conceptos de movimiento y trayectoria son muy accesibles a la intuición en un caso real determinado, no así el concepto de líneas de campo. Esta situación implica una cierta inercia psicológica hacia las explicaciones mecánicas; esta inercia psicológica es historia en la comunidad científica y existe el riesgo de que se repita en la enseñanza. En este sentido siempre me ha preocupado que se llame circulación a la integral de línea sobre un campo, cuando en realidad no se mueve nada. Faraday no tenía este problema con los campos, ya que visualizaba las líneas en el laboratorio, directamente de la experiencia. Es famosa la experiencia de las limaduras de hierro para evidenciar las líneas de campo magnético de un imán o de una corriente eléctrica, pero también fue capaz de visualizar las líneas del campo eléctrico en los procesos de electrolisis. No solo esto, sino que la explicación que dio al fenómeno de la inducción magnética fue en términos del flujo del campo magnético, es decir, una integral de superficie sobre el campo magnético. En alguna ocasión un científico de la época preocupado preguntó a Faraday porque seguía manteniendo el concepto de campo cuando parecía no servir de nada, a lo que este respondió *“¿para que sirve un niño?”.*

APENDICE III: El Universo y las Leyes físicas.

El primer postulado de la Relatividad General dice que las leyes físicas son iguales para cualquier observador, independientemente de su movimiento. ¿Cómo se obtiene una Ley Física?. Los pasos a seguir son mas o menos éstos[11]:

1-A partir de la observación y experimentación se va identificando un proceso físico. Se obtiene una descripción inicial de dicho proceso.

2-Control de variables: a partir de una experimentación mas depurada, o de alguna otra forma, se obtienen la información sobre variables relevantes en la descripción del proceso. Se trata de un proceso de captación de información relevante.

3-Modelo Empírico: Se intenta una primera relación matemática entre las variables relevantes.

4-En base a los datos anteriores se crea, como actividad intelectual, un modelo conceptual mas general. Por ejemplo, se asocian unidades de medida a la información anteriormente detectada y se traduce, si es posible, a un modelo matemático. En este momento a los datos se les da un contexto: pasan a tener significado, están ahí por algo, pasan a ser *información*. Este es el dominio de la ley física.

5-Se valida la Ley haciendo experimentos guiados por las predicciones del modelo.

La Teoría de la Relatividad dice algo sobre el proceso de la elaboración de las leyes físicas: Si las leyes físicas son las mismas para diferentes observadores, también la información que pueden obtener estos de los procesos físicos debe ser la misma o equivalente. Además existe un modelo matemático: el espacio-tiempo de Minkowsky, en el cual la *información* física que puede obtener un observador es la misma o es equivalente a la de cualquier otro observador.

Siguiendo a Einstein, llamamos Universo al conjunto de información común a todos los observadores; y suponemos que esta información se ordena en Leyes físicas. Pero existe la información y también existe la *incertidumbre*. Tomemos la conocida experiencia de las dos rendijas de difracción: ¿Por qué rendija ha pasado el fotón?. Esta información no esta disponible para el observador[12]. Si esto es así, si este hecho es real, si es parte de nuestro Universo, entonces la relatividad debiera asegurar que esta información no está disponible para ningún observador inercial. ¿Cómo puede la relatividad llegar a esta conclusión?. La forma mas lógica es demostrando que, de lo contrario, habría transporte de información a velocidad super-lumínica. Creo que la no disponibilidad de esta información está relacionada con el fenómeno de colapso de la onda cuántica cuando se utiliza un medidor para saber por que rendija pasa el fotón. El colapso representa la incapacidad de modular una onda cuántica; lo que conlleva la incapacidad de transmitir información a velocidad super-lumínica.

Permitanme plantear libremente dos ejemplos

1-Detección de información relevante.

Una habitación tiene una bombilla que se activa con uno de los 3 interruptores que se encuentran fuera de la habitación. Una persona está fuera de la habitación y la puerta de esta habitación está cerrada. Solo puede entrar una vez en la habitación para determinar que interruptor enciende la bombilla.

2-Determinación de unidades de medida.

Un operario A hace un trabajo en 1 hora mas que otro operario B. Si los dos trabajasen juntos harían el trabajo en 20/9 horas. ¿Cuánto tardaría B en hacer solo el trabajo?

APENDICE IV: Objetos, Acciones y Gramática.

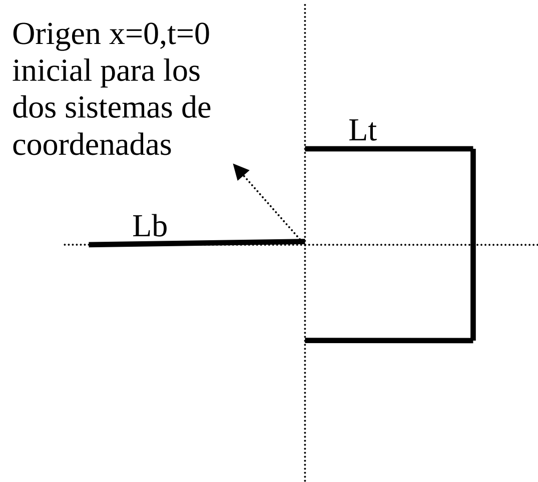
En el índice 2 de este trabajo se presentan las ideas de espacio y tiempo asociadas a acciones físicas. Este matiz puede parecer innecesario, sin embargo trataré de hacer ver al lector que esta sutileza está en la raíz del gran cambio que dio la física a principios del siglo XX. Propongo al lector la siguiente pregunta: Partiendo de nuestra experiencia física, ¿Que conocemos realmente, objetos físicos o acciones físicas?.
En realidad esta pregunta se realiza continuamente a lo largo de toda la historia de la física. Pensemos en el caso del *calórico*. El calor se comprendió inicialmente como un objeto físico: el calórico. Posteriormente la Termodinámica estableció que el concepto debía considerarse como una forma de interacción física. Pensemos en los fotones o los electrones. La polémica todavía sigue viva pero inicialmente se consideraron objetos. Para la interpretación mas aceptada de la mecánica cuántica se trata de *fenómenos* que no es posible separar del aparato de medida que se esté utilizando. Por tanto una postura razonable es pensar que, en realidad, solamente conocemos acciones físicas. Estas acciones actúan sobre nuestros sentidos o sobre nuestros aparatos de medida. "Materializamos" esta idea al asignar espacio y tiempo solamente a las acciones, no a los objetos. Esta es la sutileza: La física clásica concibe el espacio o extensión como una *propiedad* de los objetos físicos; repare el lector en el concepto de densidad. El objeto físico es una materialización del objeto mental de la geometría Euclídea, esto puede considerarse un axioma de la física clásica. En cambio la relatividad asigna espacio y tiempo al acto de medir: la acción espacio-simultánea y la acción tiempo-localizada. La longitud o volumen de una regla no es una propiedad exclusiva de la regla; el ritmo de un reloj no es una propiedad exclusiva del reloj. Esto depende también del movimiento relativo al observador. Finalmente pensemos en la famosa relación $\boldsymbol{E=mc^2}$. Desde Newton concebimos la masa como algo propio de los objetos. Representa la materialidad de los objetos. Por otro lado la Termodinámica nos dice que la energía es un parámetro característico de las acciones físicas, no característico de los objetos físicos. De hecho la elección de un origen de energías es una decisión arbitraria. Por tanto la famosa ecuación se puede interpretar diciendo que la masa es una forma de acción física.
Conclusión: No existen objetos, solo existen acciones físicas. Supongamos que la conclusión es legítima. En tal caso tenemos un serio problema…nuestro propio lenguaje natural. La regla *gramatical* mas elemental es que una frase consta de sujeto+acción+objeto. Si eliminamos sujeto y objeto nuestro lenguaje no serviría para comunicar nada. Para que el lenguaje natural sirva a la física debe considerarse que el sujeto y el objeto son atributos de la acción, algo que da un contexto a la acción para que nos sea comprensible. Esto supone entender el concepto de *objeto* como equivalente a *capacidad de acción*. Físicamente un objeto es un conjunto de comportamientos posibles; de hecho toda teoría física estipula la existencia de objetos determinados: desde átomos y ondas hasta sistemas de coordenadas inerciales y supercuerdas. Pero la relación entre acción y objeto puede ser circunstancial. Nuestra experiencia inmediata nos dice que una onda es una acción que se propaga sobre un medio material. Sin embargo la experiencia muestra la existencia de ondas electromagnéticas sin soporte

material, sustantivo…En este caso (relevante caso) existe la acción pura por sí misma, sin necesidad de objeto…pero nuestro instinto gramatical nos dice: ¡el vacío (éter) es un objeto!... un objeto inmaterial…tenemos que explicar un conjunto de comportamientos atribuibles al vacío…necesitamos una teoría del vacío…o tal vez… ¡la onda se ha convertido en partícula!, pero sigue siendo onda para el electromagnetismo... o tal vez el vacío es dual: onda-partícula... La física actual tiene difícil reconciliación con el sentido común.

Es probable que, psicológicamente, el concepto de *objeto* esté asociado a la capacidad de control o manipulación; algo que originalmente depende de los sentidos del tacto y de la vista. De esta forma la esencia de los objetos que imaginamos primariamente es la *localidad*. De cara al desarrollo de la Física esto ya implica una presunción: que las acciones físicas, las fuerzas, actúan localmente. La idea de *acciones no-locales* parece quedar al margen de la experiencia humana, para empezar a comprender este concepto debiéramos dejar de imaginar objetos…pero el resultado de nuestra experiencia física son objetos localizables, ya que los instrumentos de medida también lo son. En esta situación la Física busca la relación entre acciones no-locales y objetos perceptibles. Las fórmulas de De Broglie representan una relación en este sentido: las longitudes de onda y frecuencias de una onda cuántica no-local se nos presentan como Energías e Impulsos mecánicos que asociamos a partículas: fotón, electrón, átomos…perceptibles después del colapso cuántico Tal vez el tiempo de las ondas cuánticas es similar al tiempo para las personas: no existen para siempre, por eso es un tiempo *real* y las acciones se planifican en función del tiempo disponible.

En el desarrollo de este trabajo se relacionan modificaciones de masa de las partículas con ondas cuánticas no locales y covelocidades. Estas ideas derivan en que la masa de una partícula no es una propiedad totalmente local, y por tanto la masa de una partícula depende también de condiciones externas a la partícula. Esta idea ha ido evolucionando en el tiempo a través de autores como Match, Einstein, Landau y Haish/Rueda. Recordando la conclusión anterior según la cual *una onda cuántica representa una relación entre la materia y el vacío*; vemos que el vacío cuántico puede considerarse como una condición externa de la partícula y por tanto afectar a la masa de una partícula[**19**].

10-PROBLEMAS Y CUESTIONES



Problema de la barra y el tubo.
Supongamos un tubo hueco y en reposo de tamaño en reposo Lt Supongamos una barra de tamaño en reposo Lb>Lt que puede pasar a lo largo del eje del tubo. Supongamos que la barra alcaza una velocidad cercana a la de la luz. El observador solidario al tubo puede encontrar, a altas velocidades relativas y según la ec. 2.9, que hay un intervalo de tiempo en que la barra ha estado totalmente contenida en el tubo. En cambio para el observador solidario a la barra esta nunca ha estado totalmente contenida en el tubo. Imagine ahora tubo está cerrado por un extremo y por el extremo abierto tiene una válvula que se pueden abrir y cerrar. Podemos pensar que el observador solidario al tubo puede manipularla para cerrarla cuando la barra esté totalmente contenida en el tubo…¿Cómo ve el proceso el observador solidario a la barra?

Solución
El suceso origen x=0,t=0 es común al sistema de la barra y del tubo.

1-Sistema del tubo (barra móvil)

Suceso Choque: $(x, t) = (L_t, L_t / v)$
Coordenadas extremos barra

$$x_{1t}^{b} = L_t - L_b\beta$$

$$x_{2t}^{b} = L_b$$

Condición 1: La barra entra totalmente en el tubo si

$$x_{1t}^{b} = L_t - L_b\beta > 0$$

2-Sistema de la barra (tubo móvil)

Suceso Choque: $(x,t) = (0, \beta L_t / v)$
Coordenadas extremos barra

$$x_{1b}^{b} = -L_b$$

$$x_{2b}^{b} = 0$$

3-Sistema del tubo(barra móvil)

Suceso Cierre del tubo simultáneo al choque $(x, t) = (0, L_t / v)$

4-Sistema de la barra (tubo móvil)

Transformada de Lorentz del suceso anterior $(x;t)=(\frac{L_t}{\beta};\frac{L_t}{v\beta})$

Esto es compatible con la Condición 1 : para el sistema de la barra también esta entra totalmente en el tubo: $-\frac{L_t}{\beta}<-L_b$

Intervalo de pérdida de simultaneidad en el sistema de la barra para la acción de cierre del tubo simultáneo al choque (simultaneidad en el sistema del tubo)

$$\Delta t=\frac{L_t}{v\beta}-\frac{\beta L_t}{v}=\frac{v/c^2}{\beta}L_t$$

Para el sistema de la barra(tubo móvil), no es posible que una señal recorra el espacio entre el punto de impacto x=0 y el extremo del tubo Δx= $-L_t/\beta$ en el intervalo de tiempo anterior :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\frac{-L_t}{\beta}}{\frac{v/c^2}{\beta}L_t}=-c^2/v$$

Esta velocidad supera en módulo la velocidad de la luz, lo cual no es posible si la señal del impacto se propaga en un medio material (tubo) y tiene carácter informativo. En realidad se ha calculado una velocidad media, pero si la velocidad media excede en modulo a **c** entonces (si x(t) es una función continua) es seguro que existe al menos un intervalo de tiempo en que el modulo de la velocidad supera a **c** (Teorema de Roll del Análisis Matemático). Mientras el extremo del tubo no reciba ningún impulso procedente del choque, mantendrá su estado de movimiento inercial. Para el observador solidario a la barra el extremo abierto del tubo acaba conteniendo a la barra por que el efecto del impacto no es capaz de llegar a dicho extremo en un tiempo menor que el necesario para “engullir” a la barra. En cambio para el observador solidario al tubo el proceso parece mas natural: simplemente la barra cabe dentro del tubo. La respuesta a la pregunta ¿La barra acaba siendo absorbida por el tubo? Es afirmativa en los dos casos y la explicación, aunque nos parece muy diferente un caso de otro, está dentro de los límites de la relatividad especial. En este ejemplo resulta clave para reconciliar a los dos observadores la imposibilidad de transmisión de la señal informativa del choque a velocidad super-lumínica, de acuerdo con el principio 3.2.

Ejercicio para el lector: Comprobar que, en el sistema solidario al tubo, si el cierre del tubo se realiza en el mismo instante en que la barra entra en el tubo, entonces si el efecto del choque llegase en ese mismo instante necesitaría una velocidad media de

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} < -c^2 / v$$

que en módulo supera la velocidad de la luz.

Este problema muestra un indicio: el principio de relatividad exige que las leyes físicas no dependan de relaciones del tipo continente-contenido, ya que estas relaciones no tienen un carácter independiente del observador. Note el lector que las leyes físicas como las del electromagnetismo, la gravedad o incluso la mecánica cuántica se formulan en términos de densidades extendidas a todo el espacio.

Osciladores y Ondas.

Retomemos el escenario de la relatividad especial con dos observadores inerciales en movimiento relativo uniforme. Imaginen que uno de ellos tiene un oscilador (sobre el eje "y") en reposo (sobre el eje "x") que emite ondas electromagnéticas a lo largo del eje "x". Según la mecánica cuántica[14] un oscilador local tiene unos niveles de energía bien definidos por la expresión

$$E = (n + \frac{1}{2}) h \nu$$

Por otra parte el periodo del oscilador se transforma como el de un reloj (ecuación 2.10), y el periodo de la onda así según 3.3. Estas expresiones son en general diferentes, por lo que la frecuencia del oscilador y la frecuencia de la onda emitida no coinciden para un observador en movimiento relativo a dicho oscilador. Según la ley de Planck : *E=hv* , esto supone que la energía perdida por el oscilador no es igual a la energía de los fotones emitidos. ¿Qué pasa con la energía restante?

Discusión

Primero decir que la discrepancia entre la frecuencia de un oscilador en movimiento y la frecuencia de la onda que dicho oscilador emite es un fenómeno conocido en física clásica como efecto Doppler. El ejemplo típico es la sirena de la ambulancia que emite ondas sonoras que varían su frecuencia con el movimiento relativo al observador. La ley de niveles de energía solamente es válida para las energías permitidas de un oscilador en reposo (oscilador local). Si el oscilador pierde energía y emite un fotón, entonces sufrirá también algún tipo de retroceso, lo cual supone una energía cinética absorbida por el oscilador. Para que la ley de Planck sea aplicable en este caso el oscilador debe emitir energía sin que su movimiento se vea afectado. Para esto podemos imaginar el caso en que el observador en reposos ve que el oscilador emite simultáneamente dos fotones iguales y en sentidos contrarios. Para el observador en reposo el retroceso sufrido por el oscilador se compensa y por tanto permanece en reposo. ¿Cómo ve el proceso el observador en movimiento relativo? Si este observador suma la energía de los dos fotones emitidos en sentidos contrarios obtiene lo siguiente

$$\Delta E_{-}^{fot} = \hbar w_{+}\sqrt{\frac{1-\frac{v_{+}}{c}}{1+\frac{v_{+}}{c}}} + \hbar w_{+}\sqrt{\frac{1+\frac{v_{+}}{c}}{1-\frac{v_{+}}{c}}} = \frac{2\hbar w_{+}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta E_{+}^{fot}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Pero esto es lo que se deduce de las ecuaciones 4.2 aplicadas al oscilador. Es decir, para el observador en movimiento relativo la energía de los fotones también es igual a la energía perdida por el oscilador: por tanto no hay retroceso tampoco para el observador en movimiento; el oscilador no ve alterado su movimiento relativo. Sin embargo resulta inmediato que, para el observador en movimiento, los impulsos de los fotones (p=hk) no cancelan.

$$\Delta P_{-}^{fot} = \hbar k_{+}\sqrt{\frac{1-\frac{v_{+}}{c}}{1+\frac{v_{+}}{c}}} - \hbar k_{+}\sqrt{\frac{1+\frac{v_{+}}{c}}{1-\frac{v_{+}}{c}}} = \frac{-2\frac{v}{c}\hbar k_{+}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Este impulso no implica una modificación del movimiento del oscilador, por tanto es aplicable 4.5, lo que nos lleva a

$$\Delta P_{-}^{fot} = \frac{-2\frac{v}{c}\hbar k_{+}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta E_{-}}{c^2}v \Rightarrow \Delta E_{-} = \frac{-2\hbar w_{+}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Lo que coincide con el cálculo anterior de energías. Es decir, debemos asociar la alteración de impulso que percibe el observador en movimiento relativo al oscilador a una modificación de masa del oscilador. Así la modificación de masa es una explicación del caso válida para todos los observadores inerciales. En el caso general en que no se emitan 2 fotones iguales y en sentidos contrarios la equivalencia masa energía sigue siendo aplicable y hay que considerar que una parte de la masa del oscilador se ha perdido en la emisión de radiación.

Choque elástico de dos partículas.

Supongamos un choque de dos partículas de modo que se conserve la energía (E_0), el impulso (P_0) y la masa en reposo. Sin pérdida de generalidad podemos elegir como sistema de coordenadas uno en el que una de las partículas está, antes del choque, en reposo; de modo que podemos elegir $P_2 = 0$ y $E_2 = m_2c^2$. Las variables sin primar son anteriores al choque y las primadas posteriores. Tenemos las siguientes relaciones

Relación energía/impulso de una partícula	$E^2 = P^2c^2 + (mc^2)^2$
Conservación del Impulso	$\overline{P_1^'} + \overline{P_2^'} = \overline{P_0} = \overline{P_1}$
Conservación de la Energía	$E_1^' + E_2^' = E_0 = E_1 + m_2c^2$
Intercambio de impulso	$\Delta\overline{P} = \overline{P_2^'} = -(\overline{P_1^'} - \overline{P_1})$
Intercambio de energía	$\Delta E = E_2^' - m_2c^2 = -(E_1^' - E_1)$

Desarrollando a partir de la conservación del impulso, elevando al cuadrado:

$$\left(\overline{P_1}\right)^2 = \left(\overline{P_1^'}\right)^2 + \left(\overline{P_2^'}\right)^2 + 2\left(\overline{P_0} - \overline{P_2^'}\right)\bullet\overline{P_2^'} \rightarrow$$
$$\left(\overline{P_1}\,c\right)^2 = \left(\overline{P_1^'}c\right)^2 - \left(\overline{P_2^'}c\right)^2 + 2c^2\left(\overline{P_0}\bullet\overline{P_2^'}\right)\rightarrow$$
$$\left(E_1\right)^2 - \left(m_1c^2\right)^2 = \left(E_1^'\right)^2 - \left(m_1c^2\right)^2 - \left(E_2^'\right)^2 + \left(m_2c^2\right)^2 + 2c^2\left(\overline{P_0}\bullet\overline{P_2^'}\right)\rightarrow$$
$$\left[\left(E_1\right)^2 - \left(m_2c^2\right)^2\right] - \left[\left(E_1^'\right)^2 - \left(E_2^'\right)^2\right] = 2c^2\left(\overline{P_0}\bullet\overline{P_2^'}\right)\rightarrow$$
$$\left(E_1 + m_2c^2\right)\left(E_1 - m_2c^2\right) - \left(E_1^' + E_2^'\right)\left(E_1^' - E_2^'\right) \equiv 2c^2\left(\overline{P_0}\bullet\overline{P_2^'}\right)\rightarrow$$
$$E_0\left[(E_1 - E_1^') + (E_2^' - m_2c^2)\right] = 2c^2\left(\overline{P_0}\bullet\overline{P_2^'}\right)\Rightarrow$$

$$E_0\Delta E = c^2\,\overline{P_0}\bullet\Delta\overline{P} \quad (7.1)$$

donde los incrementos de energía e impulso (ΔE, ΔP) son los que se ponen de manifiesto en la interacción: la energía e impulso que pierde una partícula es la que gana la otra. Puede el lector comprobar que la expresión (7.1) es invariante por las transformaciones (4.2).La relación anterior se puede interpretar en el espacio de Minkowsky (de energías e impulsos) diciendo que la interacción (el par ΔE, ΔP) es perpendicular al estado estacionario (el par E_0, P_0).

Discusión

La expresión anterior es válida en principio solamente para un intervalo finito de tiempo, para un antes y un después del choque. Planteemos sin embargo la tesis contraria: supongamos que la expresión anterior es válida de modo continuo, es decir, para diferenciales en vez de incrementos. Tenemos dos casos:

I-La acción es puramente acelerativa. Sustituyendo 4.4 tenemos

$$E^0\,\overline{v}\bullet d\overline{P} = c^2\,\overline{P_0}\bullet d\overline{P} \;\Rightarrow\; \overline{P_0} = \frac{E_0}{c^2}\overline{v}$$

expresión que es falsa en nuestro caso. La incompatibilidad se debe a que no es sostenible en relatividad que dos partículas intercambien energía y momento de forma instantánea; el medio en que están estas partículas debe poder participar en el proceso físico absorbiendo o cediendo energía. En física clásica la incompatibilidad se explica por no haber considerado la Energía Potencial asociada al *sistema* formado por las dos partículas. En un proceso elemental la energía se redistribuye entre las partículas, pero también parte va a un depósito común de energía potencial. De este modo pensar que la energía que pierde una partícula la gana la otra no es correcto. Sin embargo en física clásica se acepta que el impulso mecánico se intercambie de forma instantánea: esta es la 3ª ley de Newton; no se considera la existencia de un depósito de “impulso potencial”. Esta es la aproximación del muelle en los problemas de física elemental. La energía potencial no tiene impulso mecánico en física clásica; pero en relatividad toda energía posee inercia(**n-18**). Por tanto el concepto clásico de energía potencial se aproxima al concepto relativista de energía en reposo y cabe preguntarse entonces que observador inercial "ve" en reposo la energía potencial de un sistema de partículas. Es razonable elegir el centro de masas (o de impulsos), donde el impulso mecánico neto del sistema de partículas es nulo.

II-La acción supone una modificación de masa de las partículas. Aplicando 4.5 tenemos

$$E^0 dE = c^2 \overline{P_0} \bullet \frac{dE}{c^2} \bar{v} \Rightarrow E_0 = \overline{P_0} \bullet \bar{v}$$

expresión que, de nuevo, es incorrecta.

Con la expresión (7.1) y las aproximaciones adecuadas (electrón inicialmente en reposo) se puede deducir fácilmente la ecuación de difusión de la luz por electrones libres que se da en el *efecto Compton.* Este es un caso límite de aplicación ya que una de las partículas es un fotón, que no tiene masa en reposo. ¿Existe entonces una energía potencial entre el fotón y el electrón?. Parece que no existe tal cosa: un rayo de luz no se curva por efecto de un campo eléctrico. En cambio tenemos que aceptar la existencia de una zona espacio-temporal de discontinuidad asociada al “choque” entre el fotón y el electrón. Esta *discontinuidad esencial de las acciones físicas* limita la aplicación continua de la ley del choque y está descrita por el principio de incertidumbre de Heisenberg. La falta de continuidad de las acciones físicas supone que, a nivel microscópico, resulta difícil establecer el precedente y el consecuente de una determinada acción. En cambio, estadísticamente, las acciones acaban organizándose en promedio según la física macroscópica. El efecto Compton se interpreta como evidencia de la existencia de electrones como entidades independientes, aún formando parte de objetos materiales. En el contexto de este artículo la interpretación sería que la radiación produce el colapso de *una* onda cuántica electrónica, no de varias.

Un tópico del choque elástico entre partículas es el caso en que una de ellas está en reposo y las trayectorias finales de las partículas después de la colisión forman un ángulo recto. El lector puede comprobar que siempre que se aproxime (7.1) para bajas velocidades de las partículas respecto de la luz, entonces las dos partículas deben tener la misma masa si sus trayectorias finales están en ángulo recto. En este caso para la partícula inicialmente en reposo con masa m_1 y valores de energía-impulso representados por Δ tenemos lo siguiente

$$\text{conservación impulso} \rightarrow \overline{P}_0 = \overline{P'}_2 + \Delta\overline{P}\ ;$$
$$\text{angulo recto} \rightarrow \overline{P'}_2 \bullet \Delta\overline{P} = 0\ ;$$
$$\text{aprox. baja velocidad} \rightarrow E_0 \approx (m_1 + m_2)\, c^2\ ;$$
$$\rightarrow \Delta E \approx \frac{\left(\Delta\overline{P}\right)^2}{2m_1}$$

aplicando esto a (7.1) tenemos $m_1 + m_2 \approx 2m_1$, y por tanto las masas 1 y 2 son iguales en la aproximación clásica de bajas velocidades.

Otra cuestión interesante relacionada es el impulso gravitacional sobre naves espaciales que pasan cerca de planetas; tal como el que utilizaron las naves Voyager con Júpiter. El cambio de energía de la nave se puede estimar con (7.1) . Aproximando para velocidades mucho menores que la luz tenemos

$$E_0 = (m_p + m_n)\, c^2 \approx m_p\, c^2$$
$$P_0 = m_p\, v_p + m_n\, v_n \approx m_p\, v_p$$

donde los subíndices hacen referencia al planeta (p) y la nave (n).En nuestro sistema de referencia el planeta se mueve con velocidad v_p; por ejemplo el movimiento del planeta Júpiter visto desde un sistema inercial de coordenadas con origen en el sol. Aplicando esto a 7.1 tenemos

$$\Delta E_n \approx \overline{v_p} \bullet \Delta\overline{P_n}$$

Entre el cambio de energía cinética de la nave y la velocidad del planeta. El cambio de impulso mecánico se puede calcular con el modelo gravitatorio Newtoniano de trayectoria hiperbólica para la nave. En la aproximación clásica el valor <u>ΔP</u> es independiente del sistema inercial de coordenadas elegido y el planeta puede considerarse en este caso un sistema inercial con precisión suficiente. Sin embargo ΔE no es independiente del sistema inercial que se tome.

Es fácil ver que la aproximación de 7.1 correspondiente con la mecánica clásica es

$$\Delta E \approx \overline{v_{cm}} \bullet \Delta\overline{P}$$

donde la velocidad corresponde a la del centro de masa del sistema de dos partículas. En el caso del planeta y la nave la velocidad del centro de masas coincide muy aproximadamente con la velocidad del planeta. Un observador en el sistema de coordenadas asociado al centro de masas de un sistema de dos partículas constata $v_{cm} = 0$ y por tanto ΔE=0. Dado que en general ΔP no es nulo, tenemos que, visto desde el sistema centro de masa, el proceso de choque en un sistema aislado consta de fases en que las partículas aumentan su energía y otras fases en que su energía disminuye. Pero el resultado final desde el sistema centro de masas es que no hay modificación neta de energía en cada una de las partículas, aunque si puede haber modificación de impulso en cada una de ellas.

El tiempo en un satélite en órbita circular entorno a la tierra: G.P.S.
Un satélite artificial en una órbita alrededor de la tierra lleva un reloj muy preciso. Calcular el desajuste de este reloj respecto del reloj de la estación base G.P.S en la superficie de la tierra.

Discusión:
El contexto propio de este problema es la relatividad general (RG) y el tiempo propio asociado al satélite. Sin embargo este problema se complica ya que incluye un sistema de coordenadas giratorio asociado a la superficie de la tierra.

Tenemos el sistema de coordenadas solidario al satélite, en el que funciona el reloj del satélite, y el sistema de coordenadas gravitatorio asociado la RG; para el cual tomaremos el sistema de coordenadas de Schwartzchild. Veremos que se puede aprovechar la simetría del problema para utilizar la relatividad especial (RE) en este cambio de sistema de coordenadas.

La dilatación del tiempo en RE supone la existencia de una línea de relojes en reposo sincronizados y un reloj en movimiento en esa línea. Cuando el reloj en movimiento coincide con cada uno de los relojes fijos, el observador en reposo constata que el reloj móvil marca mas lento que cada reloj fijo correspondiente.

Si queremos aplicar RE en el caso del satélite necesitamos una línea de relojes síncronos en reposo respecto de un observador en tierra a lo largo de la trayectoria orbital. Asegurar que esto es posible atañe a la relatividad general (RG), y tiene que ver con que todos los relojes de dicha línea síncrona tienen el mismo potencial gravitatorio y por tanto sus marchas se ven igualmente afectadas por la gravedad. Otra forma de ver que esto es posible es transportar relojes sincronizados en el infinito, donde la gravedad no influye, hasta el punto correspondiente en la orbita. Si todos los relojes se transportan en condiciones similares resultarán afectados en su marcha de la misma forma y al llegar al su punto de anclaje en la órbita seguirán marchando al mismo ritmo entre si.

En cuanto a los observadores tenemos que el satélite puede considerarse inercial por estar en caída libre según la RG. También tenemos un observador gravitatorio asociado a cada uno de los relojes de la línea orbital síncrona. Resulta que, local e instantáneamente, estos observadores gravitatorios pueden considerarse inerciales; esto es un postulado de la RG. Por tanto entre estos observadores se puede aplicar el resultado de la dilatación del tiempo de la RE en términos diferenciales (**2.12**).

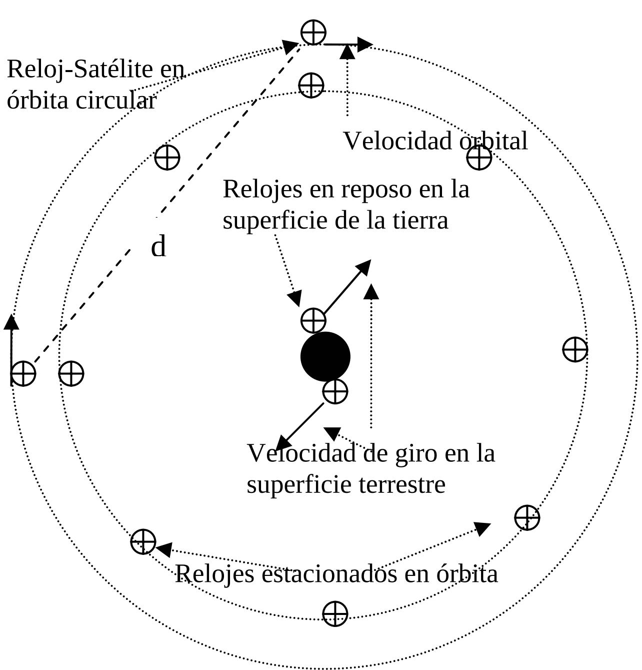
Entre los relojes de la línea orbital síncrona y los relojes en tierra, supuestos ambos en reposo relativo en una primera aproximación (no se considera el giro diurno de la tierra) pero a distinto potencial, se puede aplicar la modificación de tiempos de la RG en el sistema de coordenadas de Schwartzschild (**7.1**).
Estas dos aportaciones tienen signo contrario: respecto de la línea síncrona orbital el reloj del satélite va mas lento. Respecto de la estación base GPS en tierra los relojes orbítales van mas rápidos. Por tanto el desajuste total del reloj del satélite respecto de la estación base es $\Delta T = \Delta T_{RG} - \Delta T_{RE}$. El lector puede comprobar, aplicando una aproximación Newtoniana para estimar la velocidad del satélite, que existe una altura entorno a los 9.500 kilómetros del centro de la tierra en que estos dos términos cancelan. Por encima de esta altura, donde están los satélites GPS, el término dominante es el RG.

El satélite es capaz de emitir una señal codificada con la información de lo que marca su reloj en el momento de la emisión. El receptor de la señal, en la superficie de la tierra, puede rectificar los efectos relativistas y calcular lo que marcaba un reloj en tierra cuando se hizo la emisión (t_s). En esta situación, el observador en tierra puede aplicar la formula sencilla de propagación de la luz:

$$(x-x_s)^2 + (y-y_s)^2 + (z-z_s)^2 = c\,(t-t_s) \quad (10.1)$$

Si se dispone de al menos 4 señales independientes correspondientes a 4 satélites, entonces el sistema de ecuaciones correspondiente se puede resolver unívocamente; supuesto que la posición de los satélites (x_s,y_s,z_s) en el momento de la emisión también se codifica en la señal emitida o es conocida en función de t_s para cada satélite convenientemente identificado a través de su señal. Esta posición se refiere a un sistema de coordenadas global (WGS84) solidario con la superficie de la tierra y centrado en su centro de masas. De la expresión anterior vemos que las imprecisiones en las variables espaciales son relativamente menos importantes que las imprecisiones en el tiempo, debido al elevado valor de la velocidad de la luz.

Sin embargo esto todavía no es toda la historia; falta el *efecto Sagnac*. Hemos supuesto un observador en la superficie de la tierra según la métrica de Schwartzschild, por tanto sin considerar el giro de la tierra. Mediante las correcciones temporales hemos creado un sistema (S') aproximadamente inercial a partir de la métrica de Schwartzschild en el que podemos adaptar los relojes-satélite y los relojes en "una tierra que no gira" para que funcionen al mismo ritmo. Si consideramos ahora que el observador terrestre está en



realidad en un sistema de coordenadas (WGS84) solidario con la superficie de la tierra y que podemos elegir con origen en el centro de masa de la tierra, entonces este sistema WGS84 está en giro respecto S'. Hay que incluir una transformación de coordenadas adicional que nos lleve de S' a WGS84. Recordemos que los satélites son capaces de transmitir su posición en el sistema WGS84, y que por tanto debemos utilizar tiempos medidos en el sistema WGS84 para resolver (1.10). El efecto mas importante de esta transformación es una modificación del intervalo de tiempo en WGS84 asociado al camino (path) que sigue la luz desde el satélite hasta el receptor en tierra respecto del correspondiente intervalo en S'. En esencia, durante este intervalo los relojes de S' y los de WGS84 ,en un volumen que va desde la superficie de la tierra hasta la órbita de los satélites, se desplazan relativamente una cierta cantidad debido al giro de la tierra respecto de su propio eje. Para ángulos de giro pequeños, hay que modificar el tiempo relativo de emisión de señal entre dos satélites en la cantidad $\Delta T' = \pm v\ d/c^2$ donde "*d*" se refiere a la distancia entre satélites proyectada sobre el vector velocidad de giro del sistema WGS84 (tierra) en el punto correspondiente al observador (órbita), y v es la velocidad de giro del sistema WGS84 (tierra) en el lugar ocupado por el observador (órbita). Note el lector que esta contribución es relativa a un satélite determinado tomado como referencia, de los 4 que se necesitan como mínimo; y está afectada de un signo positivo o negativo que depende de cada caso. Puede ver un análisis mas detallado en **[18]**

Problemas de física clásica.

Este escrito es crítico con las ideas de la física clásica. Sin embargo se faltaría a la justicia si no se hiciese ver al lector la gran importancia práctica de las ideas de la física clásica para cualquier técnico o ingeniero. Una de las mayores contribuciones clásicas es la coordinación entre la teoría matemática y nuestra intuición del movimiento, así como una mayor precisión en fuerzas experimentables a diario como las normales de contacto, las fuerzas de rozamiento y la tensión en cuerdas:

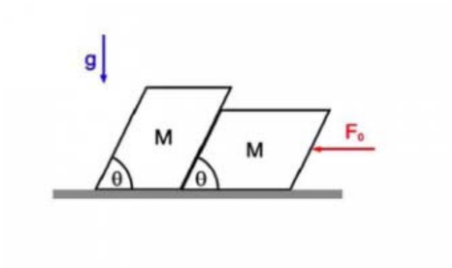
Se lanza un cilindro rodando cuesta arriba por un plano inclinado. Determinar la dirección de la fuerza de rozamiento.

En este caso la intuición del movimiento nos dice que el cilindro tenderá a girar cada vez mas despacio a medida que sube por el plano. Esta condición determina la dirección de la fuerza de rozamiento del plano con el cilindro para este caso; aplicando la ley del torque en un sólido rígido.

Se hace que el cilindro se desplace a velocidad constante por la rampa aplicando una fuerza en el cilindro.

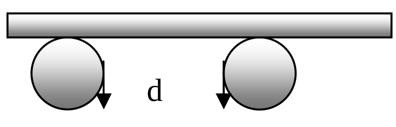
La intuición del movimiento nos dice que la fuerza tiene que aplicarse hacia arriba en el plano inclinado. Para que el cilindro se mueva se tiene que vencer el *umbral de rodadura*, de modo que la fuerza tiene que compensar la suma de la componente correspondiente de la gravedad y de la fuerza de rozamiento. Esto determina la dirección de la fuerza de rozamiento en este caso.

Dos bloques de igual masa M se colocan de manera que sus lados en contacto forman un ángulo O respecto del eje horizontal. Suponga que no existe roce entre todas las superficies de contacto. Calcule el valor mínimo de la fuerza Fo que hace levantarse del suelo al segundo bloque.



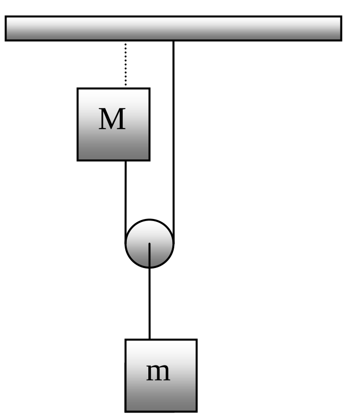
Este ejemplo nos hace pensar sobre las fuerzas de contacto entre los bloques y del bloque con tierra. Estas fuerzas no son fijas, sino que el contacto entre objetos puede tener un rango de valores de fuerza de contacto, limitado por el valor de fuerza de contacto cero, que supone una la pérdida del contacto físico. Este hecho se aplica también al problema de una partícula que resbala sobre una superficie esférica bajo el efecto de la gravedad. El punto en que la partícula abandona la superficie es aquel en que la fuerza de contacto se anula. El siguiente es otro ejemplo de esta modulación de la fuerza de contacto

Considere dos cilindros que giran rápidamente en sentidos contrarios. Sobre estos cilindros se coloca un tablón de masa M y densidad uniforme. Sea d la distancia entre cilindros y sea m el coeficiente de roce cinemático entre el tablón y los cilindros. Demuestre que el movimiento del tablón es armónico. Encuentre el periodo del movimiento



Una bola de masa M está unida a una cadena de longitud de densidad lineal de masa "m". Se lanza lo bola hacia arriba con velocidad inicial v0. Calcular la altura máxima a que llega la bola.

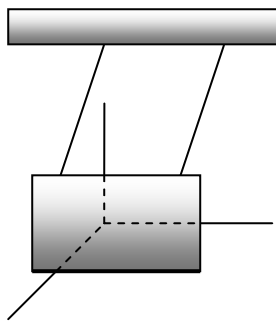
En este problema la intuición del movimiento nos dice que cuando la bola llega a su máxima altura no solo dicha bola tiene velocidad nula, sino también el resto de la cadena. Una adecuada concepción de las fuerzas entre el sistema cadena+bola y la tierra (gravedad + contactos) y un análisis energético sencillo del centro de masas nos llevan rápidamente a la solución.



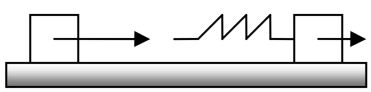
Considere dos masas "M" y "m" unidas por un hilo que pasa por una polea ideal tal como se muestra en la figura adjunta. Inicialmente la masa M se sujeta al techo con un hilo auxiliar y el sistema está en reposo. En cierto instante el hilo auxiliar se corta. Calcular la aceleración inicial de la masa M.

En este problema es fundamental no olvidar la descripción cinemática del movimiento de las masas respecto de un sistema de coordenadas inercial adecuado. La 2ª ley de Newton supone que el análisis cinemático es un paso obligado en todo problema de mecánica. Sin una descripción suficientemente precisa del movimiento no se puede aplicar la 2ª Ley de Newton. Esto llega a ser un hábito para el físico; recuerde el lector que el trabajo de Einstein de 1905 se divide en *Parte Cinemática* y *Parte Dinámica.* Esta división es recomendable en cualquier problema de mecánica.

El bloque de la figura oscila levemente colgado del techo. Calcular la frecuencia de oscilación



No es difícil ver que la superficie inferior del bloque (marcada con una línea mas gruesa) se mantiene paralela a si misma en cualquier instante del movimiento; y lo mismo ocurre para las superficies laterales, frontal y posterior. Esto indica que el movimiento del bloque es un desplazamiento sin giro. Las líneas coordenadas de un sistema de coordenadas cartesiano *arraigado* en el bloque serán vistas desplazándose *sin cambiar de dirección* en todo el movimiento. Una vez percibido el carácter del movimiento del sólido adecuadamente, la solución del problema es rápida.



Un cuerpo de masa de 3 kg. se desliza, sin fricción, sobre una mesa horizontal con una velocidad inicial 9 m/s. Frente a él, moviéndose en la misma dirección y sentido se encuentra el cuerpo de masa 4 kg. cuya velocidad inicial es 3 m/s, éste tiene unido un resorte en la parte de atrás, cuya constante elástica es k = 1120 N/m, ¿cuál será la máxima compresión del resorte cuando los cuerpos choquen?

La máxima compresión del muelle corresponde al mínimo de distancia entre las masas. En el instante de la máxima compresión la velocidad relativa entre masas es 0, ya que corresponde con la derivada temporal, y por tanto las masas tienen la misma velocidad para cualquier observador inercial. Por tanto en el momento de máxima compresión cada parte del sistema se mueve con la misma velocidad del centro de masas del sistema. En este estado se pueden calcular la modificación de energía cinética de cada masa, despreciando la mas del muelle, y sumarlas. Se verá que la suma no es nula. De acuerdo con el principio de conservación de la energía esta energía debe compensarse con la energía absorbida por el muelle.

Finalmente vemos que nuestras intuiciones sobre fuerzas y movimientos que experimentamos diariamente pueden, y deben, ser precisadas por medio de la mecánica clásica. En algunos casos el resultado será el esperado, pero en otros no lo será. Desde este momento habremos aprendido algo.

11-NOTAS

n-1:La propagación de una onda electromagnética en un medio material está asociada a la polarización de dicho medio. Esto es así por la naturaleza eléctrica de la materia. En este caso sí hay unas fuentes asociadas a la onda.

n-2:Este principio es necesario ya que las coordenadas inerciales se definen a partir de la medida de espacios y tiempos utilizando reglas y relojes en reposo relativo para el observador inercial. Evidentemente la luz en el vacío es una excepción a este principio y no puede definirse un sistema de coordenadas inercial asociado a un rayo de luz. El análisis de las propiedades cinemáticas de las ondas implica que es posible el reposo relativo entre una onda y un sistema de coordenadas inercial. Este análisis cinemático de las ondas es lo que se conoce como efecto Doppler. Un sistema de referencia ligado a la superficie de la tierra, en intervalos de tiempo relativamente pequeños (horas), se puede considerar prácticamente un sistema de coordenadas inercial.

n-3: Esta es una primera condición de simetría basada en el criterio de sencillez. Por otra parte note el lector que el planteamiento cinemático hecho atiende rigurosamente a la definición de tiempo que se da en el apéndice; no se ha utilizado en ningún momento la composición de velocidades de la mecánica clásica.

n-4: El planteamiento supone la existencia de relojes en reposo sincronizados y espacialmente separados en los lugares donde los sucesos ocurren.

n-5:Una carga no interactúa simultáneamente con otros centros de fuerza distantes(acción a distancia: 3ª ley de Newton), sino que solo hay *una acción* local del campo único (fuerza de Lorentz :$\mathbf{F}=q(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B})$). Sin embargo la física cuántica parece prescindir del requisito de causalidad.

n-6:*Nota sobre la covelocidad:* El valor $\Delta\mathbf{r}$ lo relaciono con las dimensiones de un objeto, el valor $\Delta\mathbf{t}$ lo relaciono con el desplazamiento relativo en el tiempo de cierta acción que ocurre dentro de los límites del objeto. Es el caso de la regla presentado en el punto 2: *Espacio y Tiempo*. La covelocidad instantánea se obtiene en el límite en que el tamaño de la “regla” tiende a cero. Cuando el objeto se aproxima a un punto, la covelocidad converge en cierto valor instantáneo no nulo. Una partícula (un punto físico) tiene velocidad y covelocidad instantáneas. La hipótesis de una estructura interna de las partículas es el punto de partida de la teoría de cuerdas. Resumo la idea de movimiento relativo así:

Velocidad: relación entre el espacio inducido por el movimiento relativo y el tiempo real medido por un reloj en reposo.
Covelocidad: relación entre el tiempo inducido por el movimiento relativo y el espacio real asociado a las dimensiones de un objeto en reposo.
Este artículo plantea un cambio en la idea de movimiento. Aparecen dos componentes del movimiento: la primera es la intuitiva que ya conocemos, la

segunda es la covelocidad. Aunque la covelocidad está asociada a la velocidad no es un concepto intuitivo. Einstein mantuvo explícitamente solo el primer concepto de movimiento, aunque en realidad también acepta el otro: el desplazamiento relativo en el tiempo. El problema clásico de los gemelos aborda esta propiedad del movimiento relativo. El concepto intuitivo de movimiento es muy querido para los físicos por razones de peso:

1- Por nuestra evolución biológica prestamos mas atención a los objetos en movimiento que a los fijos. Nuestra experiencia física es rica en lo relativo al movimiento, incluyendo predicción o intuición del movimiento en muchos casos.

2- La 2ª ley de Newton permite deducir fuerzas a partir de una correcta utilización de nuestra intuición del movimiento y al revés.

Es posible potenciar una capacidad natural del ser humano. Este debería ser el enfoque educativo para la mecánica clásica, y pasa por un planteamiento mas intuitivo en la presentación de la cinemática del sólido rígido.

n-7:La física actual asocia una energía al vacío, cuyos efectos se han comprobado experimentalmente en el efecto Casimir. Este efecto muestra que el vacío es un sistema físico que puede intercambiar energía con otros sistemas físicos. En mi opinión, asociar una energía al vacío equivale a decir que no se sabe de qué foco proviene.

n-8: Las expresiones 4.2 introducen la energía y el impulso mecánico con independencia del concepto de masa. Estas expresiones presentan cierta asimetría. Se acepta que existe la combinación de energía no nula e Impulso nulo; según la equivalencia masa-energía es lo que se denomina masa o energía en reposo. Sin embargo la asociación Impulso no nulo y energía nula parece no existir. No existe ningún sistema de referencia inercial en que la energía de una partícula sea nula. Análogamente a las transformaciones de Lorentz, según 4.2 existe energía e impulso inducidos por el movimiento relativo.

n-9:Este caso excluye la radiación de una carga acelerada por la gravedad.

n-10: Según Heisenberg la propia observación de la materia, es decir, la extracción de información, provoca este colapso. Parece que no hay forma de asociar la medida de un estado cuántico a una cadena determinada de sucesos, a la manera clásica. En física clásica el aparato de medida interviene en la cadena causal asociada al objeto a medir de una forma determinada; se sabe como afecta el aparato de medida al objeto medido y viceversa. Para los objetos que maneja la física cuántica el papel del aparato de medida es similar a un juego de dados: se conocen los resultados posibles y sus probabilidades; pero no se sabe, en general, cual será el resultado de una medida (jugada) determinada.
Analogías con la Termodinámica:
1-La ecuación 4.7 recuerda el primer principio de la Termodinámica:
parece faltar un término calorífico que hace de la energía una diferencial exacta.

2-El colapso cuántico es una acción *básicamente irreversible*: si un electrón libre emite un fotón, se produce un cambio de estado cuántico impredecible; si volviese a absorber el "mismo" fotón el cambio de estado cuántico sería igualmente impredecible. De forma análoga a la mecánica estadística, la reversibilidad es una cuestión probable, no determinista; la diferencia estriba en que la probabilidad se asocia ahora a entidades elementales, no a poblaciones de átomos.

n-11: La consecuencia de este colapso es que, para el observador, la materia aparece según la imagen de la física clásica: "Creo que el concepto de trayectoria clásica puede entenderse de esta forma: La trayectoria se manifiesta solo cuando está asociada a un fenómeno de observación." (Heisenberg-1927). Las ecuaciones 4.4 y 4.5 son las de la mecánica de un punto material, por tanto toda interacción, tal como se ha definido, supone el colapso de la onda cuántica. El término colapso hay que entenderlo como cambio de estado cuántico. Un estado cuántico puede ser medido físicamente.

Cuestión: Si la gravedad se comportase como una interacción debería provocar también el colapso de la onda cuántica, lo que introduciría una pérdida de coherencia en experiencias como la de las dos rendijas. Parece que esto no ha sido observado. ¿Por qué?. Note el lector que, para la teoría general de la relatividad, la gravedad no es una interacción, un "intercambio" de acciones; sino que tiene relación directa con la geometría del espacio-tiempo.

n-12: *La unidad es la variedad, y la variedad en la unidad es la ley suprema del universo. (*Isaac Newton). La idea de Universo como unión profunda del todo es de origen religioso.

n-13: Esta es la situación que resulta del experimento, planteado bajo ideas clásicas, de Michelson y Morley: Si existe una velocidad relativa entre la tierra y el "éter luminífero", entonces resulta imposible medirla experimentalmente[6]. El punto de vista de Lorentz sobre este experimento es que el éter existe, pero le atribuye acciones dinámicas sobre la materia que hace que sea indetectable: la contracción de reglas y la dilatación del ritmo de relojes móviles. Poincaré señaló en una conferencia (Septiembre 1904) que atribuir estas acciones al éter, de la forma que lo hace Lorentz, es insostenible.

n-14: El espacio de Minkowsky es un espacio muy parecido al Euclídeo pero que consta de relojes puntuales en vez de puntos; estos relojes puntuales están descritos por cuatro dimensiones independientes : **x**,**y**,**z**,**t** . En principio es posible definir un sistema *ortogonal* con estas coordenadas. En una situación no ortogonal puede ser que el eje de tiempos tenga proyecciones sobre alguno de los otros ejes. Así se puede decir, por ejemplo, que la dirección **t** proyecta sobre la dirección **x** de una manera similar al caso Euclídeo en que las direcciones x,y no sean perpendiculares. En el espacio de Minkowsky esto significa que los relojes puntuales que utilizamos como referencia se mueven sobre la dirección **x**. La ortogonalidad del sistema de coordenadas se logra al anular estas proyecciones, es decir, cuando todos los relojes puntuales que utilizamos como referencia están en reposo. De paso, esto justifica la transformación de Lorentz para las direcciones y,z: los relojes puntuales del sistema en movimiento relativo no se mueven sobre las direcciones **y**, **z**, solo sobre la dirección **x**. De este modo, el eje $\mathbf{t}_+$ proyecta sobre el eje $\mathbf{x}_-$ y el eje $\mathbf{x}_+$ sobre el $\mathbf{t}_-$; es similar a un giro entre dos sistemas de ejes ortogonales: ($\mathbf{t}_+$, $\mathbf{x}_+$) y ($\mathbf{t}_-$, $\mathbf{x}_-$). Conceptualmente, en el espacio de Minkowski no tienen sentido las ideas de espacio y tiempo independientemente una de la otra, de la misma forma que las coordenadas cartesianas no tienen sentido por separado; esto es precisamente lo que significa el prefijo "co" del término "co-ordenadas". La existencia de un universo físico con 3 dimensiones espaciales y 1 temporal supone que los conceptos fundamentales con sentido físico son los de *espacio simultáneo*, *tiempo local*, y otros similares que suponen una unión intrínseca de las ideas habituales de espacio y tiempo. Tal vez sea esta la lección mas importante de la teoría de la relatividad: no pensemos ya en términos de *espacio* y *tiempo*, sino en nuevos términos tales como *espacio simultáneo*, *tiempo local y fase de una onda*. Solo de esta forma la relatividad puede ser herramienta para resolver problemas y paradojas. El tradicional espacio euclídeo tridimensional debe asociarse al concepto de espacio simultáneo. Un concepto importante es el elemento de línea de Minkowsky: $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2$, magnitud invariante en coordenadas inerciales que juega un papel similar a la distancia en el espacio Euclídeo tridimensional.

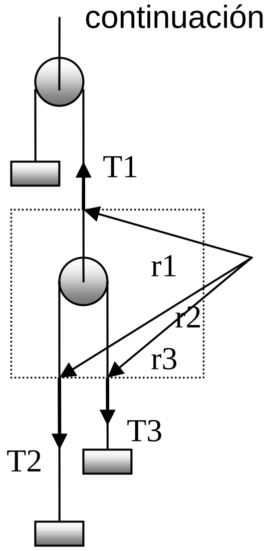
n-15: Es un hecho experimental que, de acuerdo con la *teoría general de la relatividad,* los relojes en reposo situados a distinto potencial en un campo gravitatorio pierden su sincronismo inicial progresivamente (experimento de Pound-Rebka). La isotropía del tiempo solo es válida en el límite de campos gravitatorios débiles e intervalos de tiempo suficientemente cortos. A causa del movimiento relativo y de la diferencia de potencial de cada satélite respecto de la superficie terrestre, el sistema G.P.S debe coordinar los relojes de cada satélite con los relojes de las estaciones de control en tierra cada cierto tiempo (2 minutos).Esto supone que los sistemas de coordenadas ligados rígidamente a las fuentes de un campo gravitatorio "débil" solo pueden ser aproximadamente inerciales; sin embargo un sistema de coordenadas en caída libre en cualquier campo gravitatorio puede considerarse *instantánea y localmente* inercial. Esta es la interpretación que introdujo Einstein de la equivalencia entre masa inercial y masa gravitatoria; una de las bases de la teoría general de la relatividad.[2] Podemos imaginar, al menos en el margen de nuestra experiencia, que las líneas coordenadas cartesianas *x,y,z* estén hechos de algún material rígido e indeformable. ¿Qué significa una línea coordenada temporal rígida?: una línea coordenada temporal rígida significa que la velocidad de la luz es independiente del campo gravitatorio; pero esto va en contra del famoso experimento mental en que Einstein interpreta la equivalencia de la masa inercial y la masa gravitatoria: un rayo de luz curva su trayectoria en un campo gravitatorio[2].

n-16: La relatividad especial no es aplicable, en general, a sistemas de coordenadas acelerados; esto no quiere decir que no se puedan estudiar movimientos acelerados con la relatividad especial. Para un sistema de coordenadas inercial, el concepto de velocidad instantánea de una partícula se supone válido y de acuerdo con la ley de composición de velocidades 3.2.a.

n-17: Otra forma de indeterminación de la velocidad es que el cociente v=Δr/Δt no sea convergente y oscile entre dos valores en el límite en que Δt →0. Para algunos autores esta oscilación puede ser entre los extremos ±**c**

n-18: Hay que matizar mas este punto en lo tocante a la física clásica: La transmisión instantánea de impulso asociada al tercer principio puede ser una aproximación muy aceptable si el mecanismo de transferencia se basa en un medio material continuo en el que cada punto material interacciona solo con su vecino "infinitamente" próximo. Es el caso de las ondas mecánicas. Sin embargo a escalas atómicas la interacción no se basa en la existencia de un medio mecánico; sino que el concepto relevante es el de campo. Se pierde así la referencia a un medio mecánico. Fijémonos en las aproximaciones habituales en los problemas elementales de mecánica : la cuerda "sin masa", la polea "sin masa" y el muelle "sin masa". En todos los casos esta aproximación equivale a una transmisión instantánea del impulso mecánico entre los objetos conectados por la cuerda, la polea o el muelle. En cuanto a la energía, la cuerda sin masa y la polea sin masa no pueden absorber energía, pero el muelle sin masa si puede hacerlo en forma de Energía Potencial. De este modo la energía potencial aparece relacionada con una aproximación quasi-estacionaria de la dinámica de un sistema mecánico. En esta aproximación clásica se eluden los estados intermedios del sistema asociados a la propagación a velocidad finita del impulso mecánico y la energía. Esta aproximación es correcta en la medida en que estos estados intermedios evolucionen y se estabilicen en tiempos mucho menores que el movimiento de las partes del sistema. Pero dado que existe un límite de velocidad **c**, los sistemas con partículas veloces (próximas a **c**) pueden evolucionan en tiempos comparables a los de propagación del impulso y la energía mecánica y por tanto la aproximación clásica ya no es aplicable.

A continuación unos ejemplos de problemas clásicos con transmisión instantánea de impulso y energía:

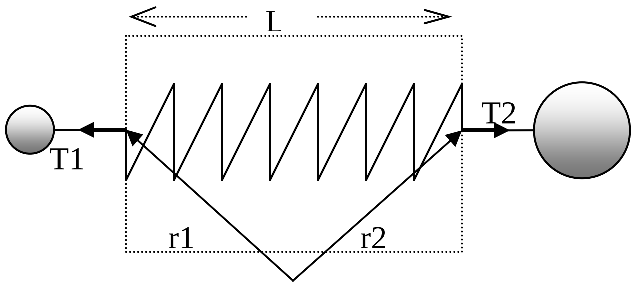


Sistema de poleas y cuerdas "sin masa".

Fijando nuestra atención en el subsistema material delimitado por el rectángulo punteado con límites solidarios con las cuerdas tenemos: Transmisión instantánea del impulso a través del subsistema: $\overline{T_1}+\overline{T_2}+\overline{T_3}=0$

Transmisión instantánea de energía a través del subsistema: $\overline{T_1}\bullet d\overline{r_1}+\overline{T_2}\bullet d\overline{r_2}+\overline{T_3}\bullet d\overline{r_3}=0$ .Considerando también la condición de longitud constante de la cuerda de abajo: $d(\overline{r_2}-\overline{r_1})=-d(\overline{r_3}-\overline{r_1})$; se deduce que $T_2 = T_3$: no hay pérdida de tensión.

Muelle « sin masa » conectando dos cuerpos.
También se ha señalado el límite del subsistema material como marcas punteadas solidarias al los extremos del muelle:



Transmisión instantánea del impulso a través del subsistema-muelle:

$$\overline{T_1} + \overline{T_2} = 0$$

Transmisión instantánea de energía en el muelle con acumulación de energía potencial:

$$\overline{T_1} \bullet d\overline{r_1} + \overline{T_2} \bullet d\overline{r_2} = \overline{T_1} \bullet d(\overline{r_1} - \overline{r_2}) = dE_{pot} = d\{\frac{1}{2}k(L - L_0)^2\}$$

Note el lector que en los dos ejemplos se sustituye la ecuación de flujo de impulso en la ecuación de flujo de energía. Esto hace que debamos considerar también instantánea la transmisión de energía.
La aproximación quasi-estacionaria, aplicada a grandes o pequeñas escalas, es la marca distintiva de la física clásica. Asociada a esta aproximación está la consideración de la energía y el impulso como conceptos independientes, mientras que en relatividad estos conceptos van unidos intrínsecamente y están sometidos a procesos de propagación a velocidad finita.
Tomemos el ejemplo elemental de la compresión de gas por medio de un mecanismo de émbolo. Existe un mecanismo de propagación de las variaciones de presión en el gas; las ondas sonoras son ejemplo de esto. Pero si, en el caso considerado, la propagación de las alteraciones de presión en el gas y la consiguiente estabilización de dicha presión es significativamente mas rápida que el movimiento del émbolo; entonces podemos considerar que el gas va adoptando distintos estados de equilibro caracterizados por una presión y una temperatura bien definidas en todo el proceso. Este es un ejemplo de un principio básico de la termodinámica: No importa como se desarrolle un proceso real en un sistema físico, siempre se podrá desarrollar lo bastante lento como para considerar que los estados que recorre el sistema en todo el proceso son aproximadamente de equilibrio termodinámico. De esta forma se elude en Termodinámica Clásica los mecanismos de propagación del impulso mecánico y la energía. Esta aproximación puede estar muy cercana a la realidad si estos mecanismos son suficientemente rápidos. La forma clásica por excelencia de conseguir esto es considerar sistemas físicos de dimensiones “elementales” de modo que los mecanismos de propagación actúen con rapidez suficiente en dichos “elementos”. Esta aproximación lleva a utilizar el cálculo diferencial, extendiendo así los principios de la mecánica a escalas infinitesimales de espacio y tiempo.
La Electricidad y el Magnetismo antes de Fáraday y Maxwell son otro ejemplo de esta aproximación clásica. De hecho Fáraday siempre se opuso a la mecánica de Newton por permitir la propagación instantánea de las acciones físicas; sin embargo esta aproximación, considerada con las debidas precauciones, es excelente en un área que abarca gran parte de la experiencia humana común. En

los ejemplos presentados las acciones instantáneas aparecen por no considerar la masa; es decir, todo retardo de transmisión requiere un medio material en mecánica clásica. La idea de propagación de la luz en el vacío queda muy lejos de la mecánica clásica. Los ejemplos anteriores, y la propia experiencia del autor, indican que los conceptos de flujo de energía y flujo de cantidad de movimiento son fundamentales para resolver problemas de mecánica a partir de las leyes fundamentales. Sin embargo este concepto no suele ser objeto de enseñanza por posibles causas:

1-La característica de interacción instantánea propia de la mecánica clásica hace difícil introducir los conceptos de *SUBSISTEMA MATERIAL* y flujo de energía/impulso entre sistemas físicos desde la enseñanza básica, de modo que es difícil *enseñar* un “método directo” de resolución de problemas. El concepto de sistema material requiere *elementos de materia*. Un sistema material es un conjunto de elementos de materia distinguibles, por lo demás elegidos a conveniencia. En base a leyes físicas, ligaduras, condiciones de contorno, intuiciones y aproximaciones se establece la evolución de los distintos subsistemas y la conexión física de unos subsistemas con otros dentro del sistema completo. Esta conexión física supone un intercambio de energía y/o impulso a través de la superficie límite, rígida o móvil, entre los subsistemas. La única condición de estas superficies es contener siempre los mismos elementos de materia. Parece que el primero en adoptar formalmente este planteamiento fue Cauchy, aunque Bernoulli y Euler lo utilizaron implícitamente en sus planteamientos de dinámica de fluidos y otras áreas **[15]**. Es educativo para el estudiante *plantear* los ejercicios de mecánica elemental identificando los subsistemas componentes y sus relaciones físicas.

2-En niveles de aprendizaje superiores se enseñan los métodos analíticos de Lagrange y Hamilton, que eliminan por completo el concepto de flujo de energía e impulso. Por esta razón estos métodos parecen de aplicación mas sencilla que el “método directo” y se les atribuye mas “verdad”, aunque creo que la realidad es que el “método directo” (Cauchy) no se enseña correctamente. Además el aprendizaje en mecánica elemental no genera una adecuada comprensión física de algunas fuerzas: La tensión de una cuerda como fuerza interna, las fuerzas de contacto entre objetos, las presiones y las fuerzas de rozamiento.

n-19: En la cinemática clásica tenemos el problema de la relación entre la medida de la velocidad de un cuerpo en dos sistemas de coordenadas que están en movimiento relativo arbitrario; incluyendo desplazamiento y giro. El análisis clásico de este problema incluye una hipótesis que a veces no se hace explícita: que es posible hacer coincidir completamente(hasta la identidad) en un instante determinado los ejes coordenados del sistema móvil con los ejes coordenados de un sistema en reposo y que la métrica de los dos sistemas es la euclídea.

12-EPILOGO

En la física actual aparecen de forma patente las relaciones dialécticas materia-vacío e información-incertidumbre. Según Hegel la superación de estas dicotomías requiere un nuevo proceso de Síntesis; es decir, nosotros somos también parte del problema.

"El conocimiento actual, mas que consistir en un camino hacia la verdad, se ha convertido en un acceso costoso a lo desconocido." (Fernando Colina)

"Allí donde el hombre no es capaz de ver ni es capaz de tocar o imaginar, tampoco es capaz de pensar." (F. Nietzsche)

"..sabe… si empieza a acumular detalles acaba cambiando la visión general del caso…"
(Peter Falk as Lt. Columbo)

Bibliografía

[1]J.Stachel: Einstein 1905 un año milagroso. Ed. Drakontos Clásico.
Capitulo 3: Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.
[2]A.Einstein: El Significado de la Relatividad. Ed Planeta-Agostini.
[3]Landau-Lifshitz:Teoría Clásica de Campos. Ed. Reverté 2ª edición.
[4]Bredov-Rumiantsev-Toptiguin:Electrodinámica Clásica. Ed. MIR.
[5]Feynman- Leighton-Sands:Lecciones de Física de Feynman. Vol 2. Ed. McGraw-Hill
En especial el capítulo sobre la masa electromagnética.
[6]R.K.Wangsness: Campos Electromagnéticos. Ed. Limusa.
[7]P.Kittl: Deducción Elemental de la Estructura Fina del Espectro del Hidrógeno.
Ciencia Abierta Vol 18: http://cabierta.uchile.cl/revista/18/educacion/edu10/
[8]R.Penrose: La Nueva Mente del Emperador. Ed. Mondadori. *Capítulos 5 y 6.*
[9]Igor Saavedra : El tiempo en la física:http://www.uchile.cl/publicaciones/anales/9/doc2.html
Xabier Zubiri sobre el tiempo:http://www.zubiri.org/works/spanishworks/Conceptodescrip.htm
[10] M. Arndt y A. Zeilinger: Probing the limits of the quantum world. Revista Physics World: Mayo 2005: http://physicsweb.org/articles/world/18/3/5/1
[11]Sixto Ríos: Modelización. Alianza Editorial-1995.
[12]Gilles Cohen-Tannoudji. Michel Spiro: La materia-espacio-tiempo. EspasaUniversidad 1988.
[13] P.Kittl , G.Díaz. Teoría Elemental de la Gravitación y de los Agujeros Negros.
Ciencia Abierta Vol. 27: http://cabierta.uchile.cl/revista/27/articulos/pdf/edu3.pdf
[14]Dicke-Wittke: Introducción a la mecánica cuántica. Edit Librería General.1960.
[15]C. Truesdell, Ensayos de Historia de la Mecánica, Tecnos, 1975.
[16] http://prl.aps.org/abstract/PRL/v104/i7/e070401
More surprises in theoretical physics ,Sir Rudolf Ernst Peierls. Disponible en google books
[17] http://en.wikipedia.org/wiki/Zitterbewegung
[18]http://www.emis.ams.org/journals/LRG/Articles/lrr-2003-1/download/lrr-2003-1BW.pdf
[19] http://www.calphysics.org/ **,** una excelente referencia sobre vacío cuántico.
[20] http://rqgravity.net , en concreto la sección sobre fundamentos de física.

Sobre cargas aceleradas por un campo gravitatorio

La bibliografía muestra un desacuerdo: para unos hay emisión de radiación en situaciones que para otros no la hay. Tal vez las referencias mas citadas sean estas:

D. Boulware – *"Radiation from a Uniformly Accelerated Charge"* - Annals of Physics 124, 169-188, 1980. http://www.hep.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/boulware_ap_124_169_80.pdf

T. Fulton; F. Rohrlich – *"Classical Radiation from a Uniformly Accelerated Charge".* Ann. Phys. 9, 499-517 (1960). http://puhep1.princeton.edu/~mcdonald/examples/EM/fulton_ap_9_499_60.pdf

S. Parrott – "Radiation from a Uniformly Accelerated Charge and the Equivalence Principle". arXiv:gr-qc/9303025v8, 5 Oct 2001. http://xxx.lanl.gov/PS_cache/gr-qc/pdf/9303/9303025v8.pdf

Sobre la magnetización por impacto

Magnetometer / Electron Reflectometer Results Lunar Prospector (NASA). 2001. Retrieved 2007-04-12. http://lunar.arc.nasa.gov/results/magelres.htm

THE EFFECT OF SHOCK ON THE MAGNETISM OF TERRESTRIAL ROCKS
S. M. Cisowski, M. Fuller
Department of Geological Sciences, University of California, Santa Barbara, California 93106
http://europa.agu.org/?uri=/journals/jb/JB083iB07p03441.xml&view=article

Sobre la corona solar

Sol/ Corona Solar http://en.wikipedia.org/wiki/Corona
http://en.wikipedia.org/wiki/Sun
http://en.wikipedia.org/wiki/Solar_cycle
http://en.wikipedia.org/wiki/Solar_variation
http://idd008cq.eresmas.net
http://soi.stanford.edu/press/ssu11-97/

NASA/Marshal Solar Physics http://solarscience.msfc.nasa.gov/
Quiescent Coronal Loops Heated By Turbulence por Ian J. O'Neill
http://www.astroengine.com/projects/thesis06.pdf
Kinetic Physics of the Solar Corona and Solar Wind por Eckart Marsch
http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2006-1/
Manchas Solares http://radioastronomia.achaya.googlepages.com/manchassolares2
Sonda TRACE http://trace.lmsal.com/POD/TRACEpodarchive22.html
Sonda SOHO : http://soho.esac.esa.int/
Sonda MESSENGER: http://messenger.jhuapl.edu/
Transito de Mercurio en 2003
http://www.eso.org/public/outreach/eduoff/vt-2004/mt-2003/mt-display.html

Autor: ENRIQUE CANTERA DEL RÍO. Lcdo. en Cª Físicas e I.T Telecomunicaciones. corxan@hotmail.es