Ecuaciones de dinámica de fluidos

José Jesús MENA DELGADILLO

El estudio del movimiento de fluidos (líquidos y gases) constituye lo que se denomina dinámica de fluidos. Puesto que los fenómenos considerados en la dinámica de fluidos son microscópicos, un fluido se considera un medio continuo. Esto significa que siempre se supone que cualquier elemento pequeño del fluido es lo suficientemente grande para contener un numero muy grande de moléculas.

A continuación se mostraran las ecuaciones básicas de la dinámica de fluidos.

Ecuación de Continuidad

La masa total M, de fluido que sale de un volumen V_o en la unidad de tiempo t, esta dada por:

$$\frac{M}{t} = \oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad (1)$$

Donde:

$\vec{v}$: La velocidad de circulación del fluido en V_o.

$\vec{s}$: El vector normal a la superficie.

ρ: La densidad del fluido.

La disminución de la masa del fluido en el volumen V_o por unidad de tiempo esta dado por:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV \qquad (2)$$

Igualando las dos expresiones anteriores:

$$\oint \rho \vec{v} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV \qquad (3)$$

La integral de superficie puede transformarse utilizando la formula de Green en una integral de volumen:

$$\oint \rho\, \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int \nabla \cdot (\rho\, \vec{v})\, dV \qquad (4)$$

De (3) y (4) resulta:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho\, dV = \int \nabla \cdot (\rho\, \vec{v})\, dV$$

Por lo tanto:

$$\int \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \vec{v}) \right] dV = 0$$

Dado que la expresión anterior es valida para cualquier volumen, entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\, \vec{v}) = 0 \qquad (5)$$

La relación anterior (5) es llamada Ecuación de contuidad.

Considerando la identidad:

$$\nabla \cdot (\rho\, \vec{v}) = \rho\, \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla(\rho)$$

Entonces la Ecuación de continuidad se puede escribir de la forma:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\, \nabla \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

Ecuación de Euler

La fuerza total que actúa sobre un cierto volumen de fluido esta dada por:

$$-\oint P\, d\vec{s}$$

Donde:

P: Presión

$\vec{s}$: vector normal a la superficie del volumen encerrado por el fluido.

Transformando la integral anterior a una integral de volumen resulta:

$$-\oint P\, d\vec{s} = -\int \nabla \rho\, dV$$

Es decir el movimiento de un elemento de volumen del fluido es igual a menos la fuerza aplicada por unidad de volumen expresada por la relación:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla P \qquad (6)$$

Desarrollando la siguiente identidad:

$$(d\,\vec{r} \cdot \nabla)\,\vec{v} = (d\,x, d\,y, d\,z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \vec{v}$$

$$(d\,\vec{r} \cdot \nabla)\,\vec{v} = \left(d\,x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + d\,y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + d\,z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\right)$$

Dado que:

$$d\,\vec{v} = \left[(d\,x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + d\,y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + d\,z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}) + d\,t \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right]$$

Sustituyendo en la ecuación anterior la condición de la relación (7), resulta:

$$d\,\vec{v} = \left[(d\,\vec{r} \cdot \nabla)\,\vec{v} + d\,t \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right]$$

Derivando:

$$\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Sustituyendo la relación anterior en la ecuación (6), resulta:

$$\rho\left((\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = -\nabla P$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla P \qquad (7)$$

La ecuación (7) es llamada: Ecuación de Euler.

En el caso de un fluido en reposo sujeto a un campo gravitatorio uniforme la ecuación de Euler toma la forma:

$$\nabla P = \rho g \qquad (8)$$

Si no existen fuerzas externas que actúen en el fluido, la ecuación de Euler se convierte en $\nabla P = 0$, entonces P = constante en cualquier punto del fluido.

La ecuación (8) puede integrarse si la densidad del fluido es constante a través de todo el volumen de la siguiente forma:

Considerando el eje z vertical y hacia arriba, se obtienen:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \qquad y \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$$

Integrando la ultima condición resulta:

$$P = -\rho g h + cte \qquad (9)$$

Si el fluido esta en reposo y tiene una superficie libre a una altura h, en la cual se aplica una presión externa P_o, es decir $P = P_o$ y z = h de tal manera que se puede evaluar la constante y la ecuación (9) se escribe de la forma:

$$P = P_o + \rho g (h - z) \qquad (10)$$

En el caso de masas grandes de líquidos y gases ρ no es constante.

Flujo de impulso

El impulso o cantidad de movimiento de fluido por unidad de volumen se denota por: $\rho \vec{v}$ .Determinaremos su variación con respecto al tiempo utilizando notación tensorial:

$$\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} = \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial t} \qquad (11)$$

Utilizando la Ecuación de continuidad en forma tensorial:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} \qquad (12)$$

Entonces:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial (\rho v_k)}{\partial x_k} \qquad (13)$$

Y a partir de la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} \qquad (14)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (11) resulta:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial P}{\partial x_i} - v_i \frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Simplificando:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k} \qquad (15)$$

Dado que:

$$\frac{\partial P}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_k}$$

En donde: δ_{ik} corresponde a la delta de kronecker.

Entonces:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\delta_{ik}\frac{\partial P}{\partial x_k} - \frac{\partial(\rho v_i v_k)}{\partial x_k}$$

Es decir:

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} = -\frac{\partial(\delta_{ik} P + \rho v_i v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik} \qquad (16)$$

Donde: Π_{ik} es tensor simétrico.

Integrando la ecuación (16) respecto a un volumen determinado. resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, v_i\, d\,V = -\int \frac{\partial\, \Pi_{ik}}{\partial\, x_k}\, d\,V$$

Aplicando la formula de Gauss:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, v_i\, d\,V = -\oint \Pi_{ik}\, df_k \qquad (17)$$

En donde: $\Pi_{ik}\, df_k$ es la componente i del impulso que fluye a través del elemento superficial df_k.
Π_{ik}: es llamado tensor de densidad de flujo de impulso.

Conservación de la Circulación

La circulación de la velocidad de un fluido en un contorno cerrado: Ω, esta dada por:

$$\Omega = \frac{\partial}{\partial t}\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} \qquad (18)$$

Como nos interesa la circulación a lo largo de cualquier contorno del fluido, entonces se satisface: $d\,\vec{l} \equiv \delta\,\vec{r}$ de manera que sustituyendo en la ecuación (18) resulta:

$$\frac{d}{d\,t}\oint \vec{v} \cdot \delta\,\vec{r} = \oint \frac{d}{d\,t}\left(\vec{v} \cdot \delta\,\vec{r}\right) = \oint \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} \cdot \delta\,\vec{r} + \oint \vec{v} \cdot \frac{d\,\delta\,\vec{r}}{d\,t} \qquad (19)$$

Ahora:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\,\delta\,\vec{r}}{d\,t} = \vec{v} \cdot \delta\,\frac{d\,\vec{r}}{d\,t} = \vec{v} \cdot \delta\,\vec{v} = \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) \qquad (20)$$

Dado que:

$$\oint \delta\left(\frac{1}{2}v^2\right) = 0 \qquad (21)$$

Considerando las ecuaciones (19), (20) y (21), resulta:

$$\frac{d}{d\,t}\oint \vec{v} \cdot \delta\,\vec{r} = \oint \frac{d\,\vec{v}}{d\,t} \cdot \delta\,\vec{r} \qquad (22)$$

Utilizando la formula de Stokes para el termino de la derecha de la ecuación anterior:

$$\oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta\vec{r} = \oint \nabla \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) \cdot \delta\vec{f} \qquad (23)$$

Dado que:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \varpi \qquad (24)$$

De las ecuaciones (23) y (24) resulta:

$$\oint \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \delta\vec{r} = \oint \nabla \cdot (-\nabla \varpi) \cdot \delta\vec{f} = 0 \qquad (25)$$

Puesto que: $\nabla \cdot (-\nabla \varpi) = 0$

A partir de las relaciones (22) y (25) resulta:

$$\frac{d}{dt}\oint \vec{v} \cdot \delta\vec{r} = \frac{d}{dt}\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0 \qquad (26)$$

Es decir:

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = constante \qquad (27)$$

La expresión (27) corresponde a la circulación de la velocidad a lo largo de un contorno cerrado en un fluido "ideal" es constante en el tiempo.

El resultado representado en la relación (27) es llamado El teorema de Kelvin o Ley de la conservación de la circulación de un fluido ideal.

Flujo potencial

Suponiendo un flujo estacionario y una línea de corriente del fluido que satisface:

$\varpi = \nabla \times \vec{v} = 0$ (vorticidad es cero) para el contorno cerrado de la línea de corriente considerada, es decir "Un flujo es estacionario si en cualquier punto se satisface que ω=0".

Para flujos no estacionarios las trayectorias de la circulación de la velocidad, no coinciden en general con las líneas de corriente del fluido.

Un flujo en el cual ω=0 en todo el espacio se denomina flujo potencial o flujo irrotacional.

El esquema del flujo resultante esta caracterizado por la presencia de una superficie de discontinuidad tangencial que sale del cuerpo; en esta superficie la velocidad en los puntos es tangencial cuando se incluyen dichos flujos discontinuos, la solución de las ecuaciones se movimiento para un fluido ideal no es única.

Un caso de fluido potencial se presenta cuando existen oscilaciones pequeñas en el cuerpo sumergido en el fluido.

Si la amplitud de las oscilaciones es a y l es la dimensión del cuerpo y se satisface: $a \angle\angle l$, entonces el flujo que circula junto al cuerpo es un flujo potencial.

Considerando la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla \varpi \qquad (28)$$

Realizando las siguientes aproximaciones:

a) $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx \frac{u^2}{a}$, donde $\vec{u}$ es la velocidad del cuerpo oscilante.

b) $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} \approx \frac{u^2}{l}$

A partir de la desigualdad: $a \angle\angle l$, entonces el termino: $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ es pequeño comparado con $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.

De modo que la ecuación de movimiento de fluido se reduce a:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \varpi$$

Aplicando el rotacional a la ecuación anterior, resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \vec{0}$$

Por lo tanto:

$$(\nabla \times \vec{v}) = Constante$$

Como el promedio temporal es cero en un movimiento oscilante, entonces:

$$(\nabla \times \vec{v}) = \vec{0}$$

La velocidad en el flujo de potencial puede expresarse como un gradiente como el gradiente un escalar, este potencial de velocidad se designa por Φ y esta dado por:

$$\vec{v} = \nabla \Phi$$

Rescribiendo la ecuación de Euler general, (28):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = -\nabla \varpi \qquad (29)$$

Sustituyendo $\vec{v} = \nabla \Phi$ en (29), resulta:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \varpi \right) = 0$$

De modo que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \varpi = f(t) \qquad (30)$$

En el caso estacionario Φ es independiente de t, entonces la relación (30) se reduce a la ecuación de Bernulli.

$$\frac{1}{2} v^2 + \varpi = Constante \qquad (31).$$

Fluidos incompresibles

En un numero apreciable de casos de flujo de líquidos y gases, se considera que la densidad es constante en todo el volumen del fluido y a lo largo de todo el movimiento.

En otras palabras cuando no existe compresión o dilatación observable del fluido, entonces se dice que el fluido es incompresible.

Las ecuaciones generales de la dinámica de fluidos se simplifican en el caso de un fluido incompresible.

Para la ecuación de Euler, en el caso que ρ = constante, se obtiene:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) + \vec{g} \qquad (32)$$

La ecuación de continuidad para ρ = constante esta dada por:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \qquad (33)$$

Como la densidad deja de ser una función desconocida como en el caso general, puede considerarse las ecuaciones en donde solo interviene la velocidad, es decir:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{v}) = \nabla \times (\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}))$$

Dado que:

$$\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) = \nabla \varpi$$

Entonces la ecuación de Bernulli para el caso incompresible esta dado por:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{P}{\rho} + g\,z = Constante \qquad (34)$$

Bibliografía

Write F, Mecánica de Fluidos, Mc. Graw-Hill, (1992).
Bird R. B., Fenómenos de transporte, Reverte, (1998).
Streeter V. Y Wilie E., Mecánica de los Fluidos, Mc. Graw-Hill, (1986).

José Jesús Mena Delgadillo
menajess@gmail.com