ACERCA DE LAS ECUACIONES EVOLUTIVAS DEL CALOR Y DE LA MÉTRICA g

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ

Introducción

Las ecuaciones evolutivas son ecuaciones diferenciales a derivadas parciales que evolucionan con un parámetro que puede ser el tiempo o una magnitud que se comporta como tal. En este trabajo nos limitaremos a las de tipo parabólico, caracterizadas por relacionar derivadas segundas respecto a variables espaciales y primeras derivadas respecto al tiempo.

Desarrollo

Tomaremos como ejemplos el Flujo de Ricci y la Ecuación del Calor, cuyas ecuaciones diferenciales son similares. El Flujo de Ricci lo trataremos extensamente por su rol fundamental en la solución de la Conjetura de Poincaré (CP), y la Ecuación del Calor (CC) para didácticamente acercarnos al Flujo de Ricci.

La CP es un problema de la Topología, por lo cual comenzaremos por exponer algunos aspectos y conceptos esenciales de la misma utilizando un lenguaje mas bien coloquial, puesto nuestro objetivo es lograr un acercamiento didáctico sin faltar en lo posible al necesario rigor.

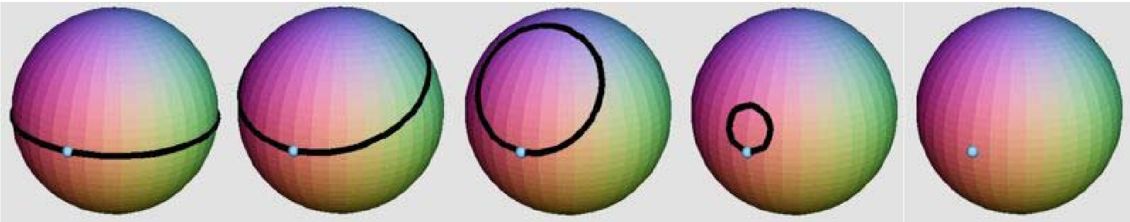
Variedad Diferenciable. Una Variedad Diferenciable es un espacio geométrico cerrado asimilable a una figura geométrica de la cual sólo atendemos a la superficie que lo encierra (esfera, toro, cubo, etc.) y como tal lo podemos tomar. La denominación diferenciable lo deben las variedades a que sus ecuaciones cartesianas pueden ser derivadas. En forma general una variedad se representará por el símbolo M^n donde n es el número de dimensiones de la variedad lo cual permitirá una generalización del concepto de esfera, así la esfera será una tri-sfera M^3, una esfera es una bi-esfera y un lazo una uni-esfera M^1. Una esfera redonda esto es, la que manejamos en la geometría euclídea la simbolizamos S^2.

Variedades múltiplemente conexas. Recordar que sólo nos referimos a superficies. Una variedad es simplemente conexa si un lazo (curva cuyos extremos coinciden sin entrecruzamientos) de la misma (esto es "dibujado" sobre ésta y en cualquier región de la misma), puede constreñirse a un punto sin abandonar la variedad. Este proceso será fundamental cuando tratemos la CP. Se evidencia que una esfera corriente es una variedad simplemente conexa pero no lo será un Toro (una dona o rosquilla) o una variedad en forma de taza de café, pues cualquier lazo "enrollado" en el asa no podrá constreñirse a un punto. Esto ocurrirá en cualquier variedad que presente huecos como en el toro o en la taza de café. En caso de varios huecos la variedad es múltiplemente conexa.

Variedades topológicamente equivalentes. Dos variedades son topológicamente equivalentes u homeomórficas si puede establecerse una correspondencia biunívoca entre los puntos de ambas de modo que lo que esté pegado en una permanezca pegado en la otra y lo que esté separado en una permanezca separado, así que el número de huecos en ambas ha de ser el mismo.

Adelantamos que la Conjetura de Poincaré expresa que "toda variedad, M^3, cerrada y simplemente conexa es homeomorfa con una esfera S^3.

Con otras palabras, en toda variedad M^3, sin huecos, un lazo "dibujado" en cualquier parte de su superficie podrá constreñirse en un punto sin abandonar la superficie ni entrecruzarse.



Ecuación del Calor
La ecuación del calor modeliza cómo evoluciona una concentración no uniforme de temperatura localizada por ejemplo en el centro de una lámina metálica circular, hasta expandirse hasta uniformemente llenar toda la lámina.

Representamos la temperatura por *u* y la ecuación por la expresión:

$$u_t = k.\nabla u \qquad (1)$$

El símbolo que aparece en el lado izquierdo de (1) consistente en una variable con subíndice t es una abreviatura que utilizaremos en lo que resta del artículo para indicar la derivada parcial respecto a t de la variable que se trate; en (1) equivaldrá a $\partial u/\partial t$.

La ecuación del Flujo de Ricci.
En la ecuación del Flujo de Ricci aparece la variable g, la cual simboliza la métrica de Minkowski una función de las coordenadas espaciales y del tiempo. La función g está relacionada con longitudes las cuales en el espacio-tiempo de Minkowski se expresa por $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. También aparecerá la curvatura de Ricci *R* de la geometría de Riemann, cumpliéndose en la Teoría General de la Relatividad $R = \frac{1}{2}\nabla g$, igualdad que nos permitirá expresar el Flujo de Ricci como una ecuación diferencial.

El Flujo de Ricci suele expresarse de la siguiente forma:

$$g_t = -2R \qquad (2)$$

Si sustituimos R por su dependencia del laplaciano antes vista, tendremos el Flujo de Ricci en forma diferencial análoga a la ecuación del Calor, con la siguiente expresión:

$$g_t = -\nabla g \qquad (3)$$

La analogía entre (2) y (3) nos muestra la de *u* y *g*, por lo cual si la del Calor muestra la evolución de la temperatura *u* hasta llenar uniformemente la lámina circular, así la del Flujo de Ricci mostrará la evolución de la métrica *g* hasta ocupar uniformemente toda la variedad diferenciable que evoluciona con *t* en el Flujo de Ricci. Nos servirá cuando tratemos la CP adelantar que en ambas evoluciones descritas, la de *u* y la de *g*, un tabique instalado de manera tal que divida la variedad en dos partes separadas, el llenado por la métrica sólo ocurrirá en una de las partes.

Otra relación que nos hará falta es la gaussiana $R = \frac{1}{2} g_0$, que puesta e (1) conduce a $g = -g_0 t + c$ que, para t=0, $c = g_0$ y:

$$g = (1-t) g_0 \qquad (4)$$

La ecuación (4) resulta de gran importancia para la demostración de la CP, por lo cual realizaremos el siguiente análisis. Como es evidente en (4), la métrica *g* se anulará al tomará valores en el intervalo $(-\infty, 1]$, lo cual implica un estrechamiento en la variedad correspondiente en forma de *cuello*, y como para *t=1* la métrica *g* se hace cero, el cuello experimentará un pinzamiento, o sea una discontinuidad en el proceso evolutivo de (4).

Motivación de la Conjetura de Poincaré

En líneas anteriores presentamos el enunciado de la Conjetura de Poincaré y a continuación nos referiremos a lo que motivó tal enunciado. En nuestro espacio tridimensional podemos observar directamente variedades diferenciables M^n para los valores 1 y 2 de n, esto es, hasta un valor una unidad menos que el número de dimensiones de nuestro espacio. Toda variedad de n dimensiones se encuentra embebida en una de n+1 dimensiones. Así que una variedad de nuestro espacio tridimensional tendría que estar embebida en un espacio de 4 dimensiones necesitándose que nuestro universo tenga la forma de una tri-esfera M^3 lo cual significa que no lo podemos observar puesto que no podemos salir a un espacio de 4 dimensiones y sólo podemos deducir sus características fisicomatemáticas a partir de hipótesis como la *Conjetura de Poincaré*.

La Tri-esfera

Una idea de la forma de una triesfera la podemos tener si la imaginamos como dos variedades M^3 unidas por un cuello como el definido por (4).

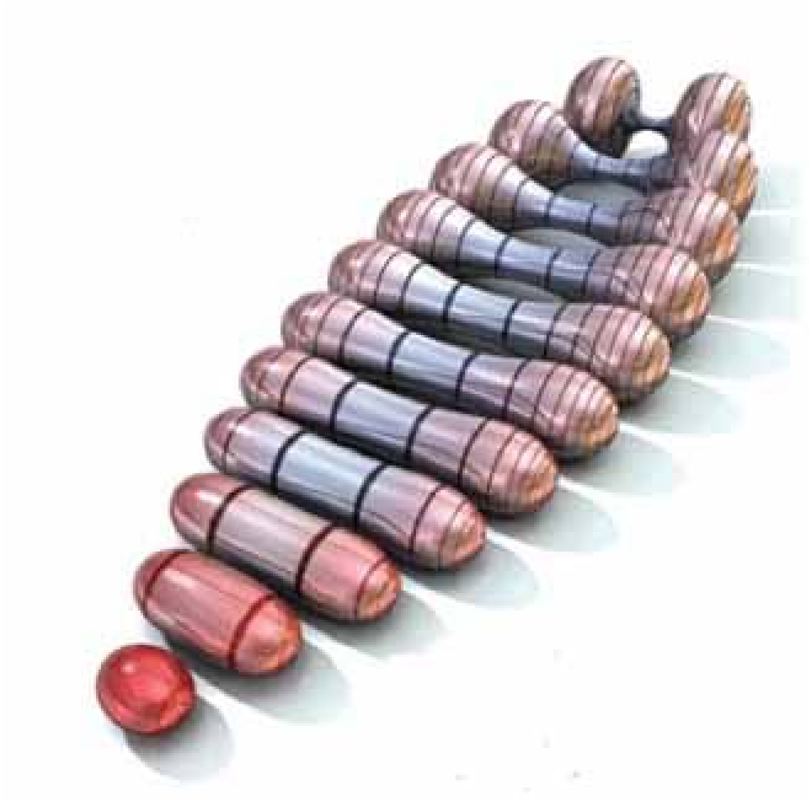
La demostración por Hamilton y Perelmam

En la demostración de la Conjetura de Poincaré por Richard Hamilton y Grigori Perelman, parten de la M^3 antes descrita y la hacen evolucionar mediante el Flujo de Ricci <u>tratando</u> de llegar a una esfera homeomórfica con S^3 como postula la CP. Hemos subrayado "tratando" porque como mostramos para (4), para ciertos valores del tiempo se producen pinzaduras de la variedad que interrumpen el proceso de evolución que no permiten llegar al final que postula la CP, se logró eliminarlas exitosamente por Perelman cortando el tramo afectado, uniendo las partes separadas y continuando la evolución, por un procedimiento matemático llamado *cirugía*, con lo cual demostró la *Conjetura de Poincaré*.

Como vamos a mostrar, la evolución mediante el Flujo de Ricci, no nos servirá la que toma para *R* la relación gaussiana y tomaremos la de Einstein $R = \Lambda g_0$, lo que puesto en (2) nos da: $g = -2\Lambda t g_0 + C$, para t=0, $C = g_0$, por lo cual

$$g = (1 - 2\Lambda t) g_0 \qquad (5)$$

La ecuación (5) es sumamente importante, pues mostrará como irá decreciendo la métrica g, esto es el "tamaño" de la variedad al hacerla evolucionar con el Flujo de Ricci desde una tri-esfera simplemente conexa hasta un esfera S^3, o sea hasta una superficie sobre la cual un lazo puede constreñirse en un punto. En el proceso evolutivo se producirán discontinuidades o sea puntos donde se haga *g=0*, como ocurrirá cuando como se videncia en (5), el tiempo sea $t = 1/2\Lambda$.



Cuando mas arriba mostramos la analogía entre ecuaciones de Calor y Flujo de Ricci, indicamos que si la variedad tratada es dividida en dos partes mediante un tabique, el llenado total por la métrica de la variedad no se producirá. Análogamente las pinzaduras en el Flujo de Ricci actúan como tabiques separadores impiden el llenado completo, en la demostración de la Conjetura de Poincaré, la métrica g sólo llenará la variedad cuando sean suprimidas todos los pinzaduras-tabiques por cirugía y esto ocurrirá cuando se llegue a la esfera S^3, culminación de la demostración de la Conjetura de Poincaré por Grigori Perelman.

Conclusión

El tratamiento de las ecuaciones evolutivas nos ha permitido llevar en forma didácticamente intuitiva de divulgación despojada de vulgarización, a un público no especializado pero interesado en asuntos que por su trascendencia han motivado atención generalizada, un tema como es el caso de la Conjetura de Poincaré. Sin faltar en lo posible al rigor y utilizando un lenguaje mas bien coloquial, presentando el tema de la Conjetura de Poincaré esperamos incentivar el estudio de carreras destinadas a formar especialistas en ciencias exactas y naturales, tan necesarios en el mundo actual.

Joaquín GONZÁLEZ ÁLVAREZ
j.gonzalez.a@hotmail.com