

# ¿QUE ES LA DIFUSIVIDAD TÉRMICA Y COMO MEDIRLA EN UN CILINDRO DE COBRE?

*Barreiro, Nadia – Laborde, Cecilia*

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Universidad de Buenos Aires  
Julio de 2009*

En este trabajo se explica un modelo simple de propagación de calor por convección a través de un sólido y se realiza una experiencia en la que, aplicando el modelo, se obtiene el coeficiente de difusividad térmica del cobre. Con este objetivo se observó el comportamiento de una onda térmica que se propagaba a través de un cilindro de este material sin sufrir pérdidas de calor. Midiendo el coeficiente de decaimiento de la amplitud de la temperatura y la velocidad de la onda fue posible estimar tres valores para la difusividad:  $\kappa_c = (3,7 \pm 1,3) 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $\kappa_v = (5,6 \pm 2,7) 10^{-5} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$  y  $\kappa = (1,44 \pm 0,74) 10^{-4} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$ . Además, se estudió el comportamiento de la temperatura en el período transitorio.

## Introducción

Cuando distintas partes de un cuerpo se encuentran a diferentes temperaturas existe un flujo de calor de las zonas más calientes a las más frías. La transferencia de calor se puede llevar a cabo a través de tres mecanismos:

1) *Conducción*, el flujo se propaga a través de medios sólidos por la vibración interna y choques entre las moléculas. Las correspondientes a la fracción del cuerpo con elevada temperatura vibran con más intensidad que las moléculas de otras regiones del mismo sistema con menor temperatura. Las moléculas con una velocidad más alta chocan con las menos excitadas y les transfieren parte de su energía. Al absorber el excedente de energía estas moléculas también adquirirán una mayor velocidad vibratoria y generarán más calor,

2) *Convección*, es el desplazamiento de masas de algún líquido o gas. Cuando la masa de un fluido se calienta, sus moléculas se separan y se dispersan, causando que la masa del fluido llegue a ser menos densa. Esto hace que se desplace hacia arriba u horizontalmente hacia una región fría, mientras que las masas menos calientes, pero más densas, del fluido se moverán en un sentido opuesto al del movimiento de la masa más caliente (el volumen de fluido más frío es desplazado por el volumen más caliente),

3) *Radiación*, el calor es transferido directamente entre diferentes partes del cuerpo por radiación electromagnética. No se requiere de un medio para su propagación.<sup>[1]</sup>

En los sólidos no se produce la transferencia de calor por convección y la transmisión por radiación es despreciable, por lo tanto en ellos se estudia la transferencia de calor por conducción.

Para desarrollar la teoría matemática se supondrá que el sólido es homogéneo e isótropo. Es decir, cuando un punto del mismo es calentado, el calor se propaga igualmente en todas las direcciones. Además, se estudiará el caso de propagación unidimensional.<sup>[2]</sup>

La tasa de transferencia de calor a través de una superficie por unidad de área por unidad de tiempo, se denomina **flujo de calor**.<sup>[2]</sup>

Para un sólido isótropo y homogéneo, cuya conductividad térmica es independiente de la temperatura, la ecuación que rige el comportamiento de la misma, es:

$$\frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial t} \quad (1)$$

Ésta es conocida como la ecuación de conducción del calor o ecuación de Fourier unidimensional.  $\theta$  representa la temperatura en  $(x,t)$  y  $\kappa$  es el coeficiente de difusividad térmica del material. Cabe aclarar que esta ecuación es válida en el caso ideal donde no

se consideran pérdidas térmicas. El valor  $\kappa$  indica como fluye el calor por el material. Cuanto más alta es la difusividad térmica de una sustancia, más alto es el ritmo de propagación del perfil de temperatura. [4]

En esta experiencia se modificó la temperatura del sólido periódicamente en un extremo, por lo tanto, su comportamiento en el origen puede describirse mediante la ecuación:

$$\theta(0,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4\theta_0}{n\pi} \text{sen}\left(\frac{2n\pi t}{\tau}\right) \quad (2)$$

donde  $\tau$  es el período de la oscilación y el origen temporal ha sido elegido de tal forma que  $\theta(0,t)$  es impar.

En el otro extremo suponemos que la onda térmica ha decaído completamente de tal forma que no haya onda reflejada, por lo tanto  $\theta(\infty,t)=0$ .

Una vez alcanzado el estado estacionario se propone como solución las series de Fourier:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \text{sen}(\omega_n t - k_n x) \quad (3)$$

donde  $A_n$  es la amplitud,  $\omega_n$  la frecuencia y  $k_n$  el número de onda asociado al n-ésimo armónico. Se reconoce el estado estacionario como aquel donde la temperatura en cada punto oscila alrededor de un valor medio fijo.

Introduciendo la ecuación (3) en (1) y aplicando las condiciones de contorno se obtiene finalmente como solución:

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \theta_n e^{-\epsilon_n x} \text{sen}(\omega_n t - \epsilon_n x) \quad (4)$$

Donde

$$\theta_n = \frac{4\theta_0}{n\pi} \quad (5)$$

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\tau} \quad (6)$$

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{\omega_n}{2\kappa}} \quad (7)$$

donde  $\epsilon_n$  es el coeficiente de decaimiento del n-ésimo armónico.

Se puede observar que para valores de n mayores, la amplitud decae más rápidamente al aumentar la frecuencia. Por lo tanto, es posible aproximar la distribución de temperatura únicamente por el primer armónico en los puntos suficientemente alejados del origen del cuerpo. Luego, se redefine el origen del sistema de coordenadas en la posición donde el segundo armónico es despreciable. Así,

$$\theta(x,t) \cong A_0 e^{-\epsilon x} \cos \omega \left(t - \frac{x}{v}\right) \quad (8)$$

donde se ha elegido el origen temporal de modo tal que  $\theta$  es máximo en  $x=0$ .

La onda térmica posee las siguientes características:

- 1) La amplitud de la oscilación decae exponencialmente al aumentar la distancia al origen.
- 2) El máximo valor de temperatura se alcanza en un punto un tiempo después de haberse alcanzado en  $x=0$ .
- 3) Es periódica en el tiempo, con período  $\tau$ , y en el espacio, con longitud de onda  $\lambda = v\tau$ .

Considerando la ecuación (8) y el primer armónico de la solución completa, ecuación (4), podemos obtener las expresiones:

$$\kappa_\epsilon = \frac{\pi}{\tau \epsilon^2} \quad (9)$$

y

$$\kappa_v = \frac{v^2 \tau}{4\pi} \quad (10)$$

Que relacionan las propiedades térmicas del material, en nuestro caso la difusividad térmica,  $\kappa$ , con las dos propiedades de la onda: velocidad,  $v$ , y el coeficiente de decaimiento,  $\epsilon$ , que será determinado experimentalmente. Calculando  $\epsilon/v$  de (9)

y (10) podemos obtener una expresión para el coeficiente de difusividad térmica que combina las dos propiedades de la onda simultáneamente:

$$\kappa = \frac{v}{2\epsilon} \quad (11)$$

Es importante destacar que la ecuación 11 es válida independientemente de las pérdidas de calor pues se puede demostrar que se anulan matemáticamente. [5]

El coeficiente de decaimiento y la velocidad de la onda pueden medirse a partir de las oscilaciones de la temperatura en distintos puntos del cuerpo. Es posible determinar el coeficiente de decaimiento ajustando una exponencial a la amplitud. La velocidad se obtiene a partir del desfase de la onda en dos puntos, es decir midiendo el tiempo empleado para que un mismo máximo recorra una distancia  $\Delta x$ :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (12)$$

El objetivo de esta experiencia fue medir el coeficiente de difusividad térmica del Cobre. Para ello se estudió la velocidad y el coeficiente de decaimiento de una onda térmica propagándose a través de una barra formada por dicho material en el estado estacionario.

Por otro lado, se buscó analizar el comportamiento del sistema en el período transitorio utilizando una fuente de potencia constante. Bajo estas condiciones, la temperatura se comporta de la siguiente manera:

$$\theta(x,t) = \frac{2F_0}{K} \left\{ \left( \frac{\kappa}{\pi} \right)^{1/2} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} - \frac{x}{2} \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{\kappa t}} \right) \right\} \quad (13)$$

donde  $F_0$  es el flujo de calor por unidad de tiempo y área aplicado,  $K$  la conductividad térmica del cobre y  $\kappa$  la difusividad térmica. Esta ecuación es válida bajo la aproximación de que la barra es semi-infinita y el calor es aplicado en  $x = 0$ .<sup>[2]</sup>

## Arreglo experimental

Para efectuar las mediciones mencionadas en la introducción se dispuso de una barra cilíndrica homogénea de cobre de  $(50,4 \pm 0,2)$  cm de largo y  $(15,9 \pm 0,2)$  mm de diámetro. En uno de los extremos se colocó un soldador de baja potencia. Éste se hallaba conectado a un contactor que era encendido y apagado periódicamente a través de un generador de funciones digital Hewlett Packard modelo 33120A. De este modo se enviaron pulsos cuadrados de 160 seg de período al soldador.

Se realizaron 6 orificios de  $(5,04 \pm 0,02)$  mm de profundidad espaciados cada 4 cm a lo largo de la barra. Para medir la temperatura se construyeron dos Termocuplas de Chromel-alumel que fueron conectadas a sendos multímetros y colocadas en los agujeros. La punta fría de cada una de éstas se colocó en un recipiente de telgopor con agua y hielo que sirvió de referencia. Dado que el tamaño de los orificios era apreciablemente mayor que las uniones calientes de las termocuplas, se las envolvió en papel de aluminio para que ajustaran bien aumentando el contacto con la barra. Además, en cada abertura se colocó grasa siliconada con el objetivo de mejorar la conducción de calor hacia la termocupla y permitir el deslizamiento de ésta en el interior del agujero para introducirla y quitarla con facilidad.

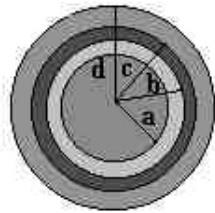
Previo al armado de las termocuplas se estimó el calor que éstas aportaban al sistema y se concluyó que éste era despreciable en comparación al cedido por la barra si se las construía de aproximadamente 1 m de largo (ver apéndice 1).

Como el experimento se llevó a cabo bajo la hipótesis de que el calor se propaga linealmente a lo largo de la barra y sin pérdidas radiales, ésta debió ser aislada adecuadamente. Para ello se dispuso de 3 aislantes colocados como se observa en la figura 1. Los materiales utilizados fueron: Acrílico: espesor =  $(19,6 \pm 0,2)$  mm; conductividad =  $0,19 \frac{\text{watt}}{\text{mK}}$

Pvc: espesor =  $(4,02 \pm 0,02)$  mm; conductividad entre 0,12 y  $0,25 \frac{\text{watt}}{\text{mK}}$

Cinta de aluminio espumado adhesivo "Ipsoband": espesor = 2 mm (por

indicación del fabricante); conductividad =  $0,09 \frac{\text{watt}}{\text{mK}}$  (indicación del fabricante)

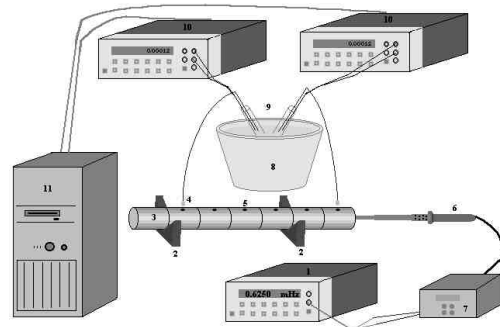


**Figura 1:** Se observa un corte transversal de la barra. El interior corresponde al cilindro de cobre. La primera capa es de acrílico, la segunda es el tubo de pvc y la capa exterior consta de dos vueltas de espuma aislante.

Previo a comenzar con la medición fue necesario alcanzar el estado estacionario. Para ello se encendió el sistema enviando con el generador de funciones una onda cuadrada de frecuencia de 6,25 mHz y amplitud de 1,2 Volt. De este modo el soldador se prendía durante 80 segundos y se apagaba otros 80 segundos. El estado estacionario se logró alcanzar aproximadamente 3 horas después de encender el sistema. Las mediciones se realizaron colocando las dos termocuplas en dos orificios. La información fue adquirida por los dos multímetros Hewlett Packard modelo 33120A conectados a la computadora (ver figura 2). Se utilizó un programa hecho en Quick basic que proporciona los datos en función del tiempo y mide con una frecuencia de 1 medición por segundo aproximadamente, pudiendo tomar hasta 5000 datos.

Para realizar mediciones se tomó en cuenta que al cambiar la termocupla de posición ésta perturbaba el comportamiento de la onda térmica. Por ello, cada vez que se cambiaba de orificio era necesario esperar aproximadamente 15 minutos antes de medir. Así, la termocupla entraba en equilibrio térmico con la barra de cobre y ésta última llegaba al estado estacionario nuevamente.

Los datos se obtuvieron colocando una de las termocuplas en una posición fija (la más cercana al soldador) y cambiando la segunda en los 5 orificios restante. Para cada caso se midió durante 15 minutos para asegurar entre 5 y 6 períodos de la onda.

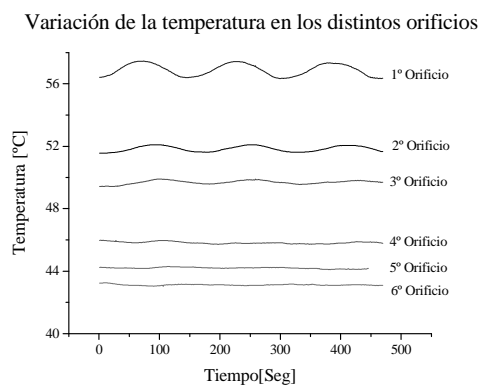


**Figura 2:** Montaje del experimento. 1) generador de funciones; 2) tabiques de madera para sostener la barra; 3) cilindro de cobre aislado 4) termocupla con punta envuelta en aluminio; 5) orificios en el cilindro de cobre; 6) soldador introducido en el extremo del cilindro; 7) contactor conectado al generador de funciones; 8) recipiente de telgopor con agua y hielo; 9) puntas frías de las termocuplas introducidas en el recipiente; 10) multímetros; 11) computadora a la que se conectan los multímetros.

Para medir el transitorio de la barra. Se conectó el soldador a una potencia constante y se esperó hasta alcanzar una temperatura máxima. La medición se realizó colocando una termocupla en el primer orificio (más cercano al soldador) y otra en el tercero.

## Resultados y discusión

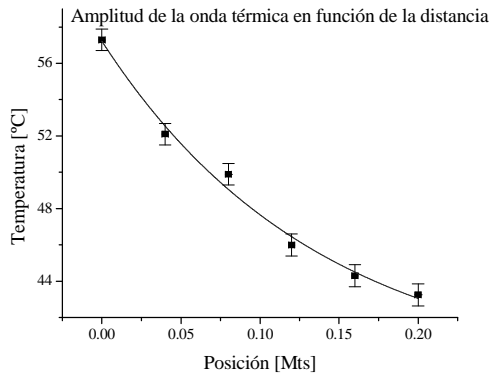
Al realizar mediciones en distintos puntos de la barra se puede observar la oscilación de la temperatura y el decaimiento de la amplitud al aumentar la distancia a la fuente de calor. Esto se observa en las figuras 3 y 4.



**Figura 3:** Se observa en el gráfico como la onda térmica varía su amplitud y valor medio a medida que se propaga desde el extremo en el que se encuentra la fuente de calor. Se puede

notar como la cresta de la onda llega desfasada a los diferentes orificios.

Para calcular el valor de  $\epsilon$  se observó el decaimiento de la amplitud de la temperatura. A los valores máximos medidos en los distintos orificios se les ajustó una curva exponencial cuyo coeficiente de decaimiento correspondía con el valor de  $\epsilon$ .



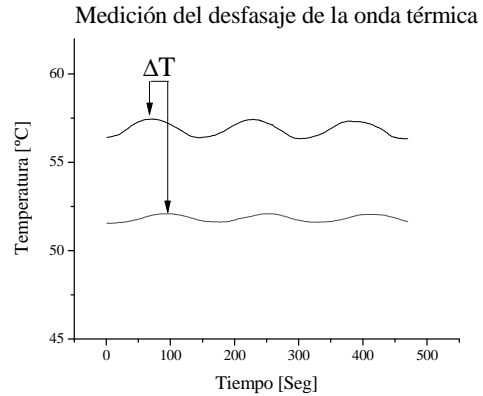
**Figura 4:** Se observa como disminuye la amplitud de la onda térmica al alejarse de la fuente de calor. Con el coeficiente de decaimiento de la exponencial ajustada se puede calcular la difusividad térmica.

El coeficiente de decaimiento es  $(7,3 \pm 2,0) \text{ mts}^{-1}$

Usando la ecuación 9 se calculó que el coeficiente de difusividad térmica es  $\kappa_{\epsilon} = (3,7 \pm 1,3) 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

Como se mencionó anteriormente, también es posible calcular la difusividad térmica conociendo la velocidad de propagación. Ésta se obtiene a partir de la ecuación 12 midiendo el tiempo requerido para que la cresta de la onda avance entre dos orificios y la distancia entre ellos. Se repitió la medición para diferentes combinaciones de orificios (colocando una termocupla en el 1º y cambiando la otra en los orificios restantes). Así, fue posible medir el tiempo que tardaba la onda en recorrer diferentes distancias.

Con estos datos fue posible obtener varios valores para la velocidad con los cuales se realizó un promedio.



**Figura 5:** Midiendo el tiempo en que la cresta de la onda llega a dos orificios diferentes se puede estimar su velocidad.

El valor obtenido para la velocidad de propagación fue:

$$v = (2,1 \pm 0,5) 10^{-3} \text{ Mts seg}^{-1}$$

Usando la ecuación 10 se obtuvo que coeficiente de difusividad es  $\kappa_v = (5,6 \pm 2,7) 10^{-5} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$

Finalmente, con el coeficiente de decaimiento y la velocidad de propagación medidas y usando la ecuación 11 se obtuvo una difusividad térmica  $\kappa = (1,44 \pm 0,74) 10^{-4} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$

La más reciente referencia encontrada para la difusividad térmica del Cobre es  $\kappa = 1,02 10^{-4} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$  [3]

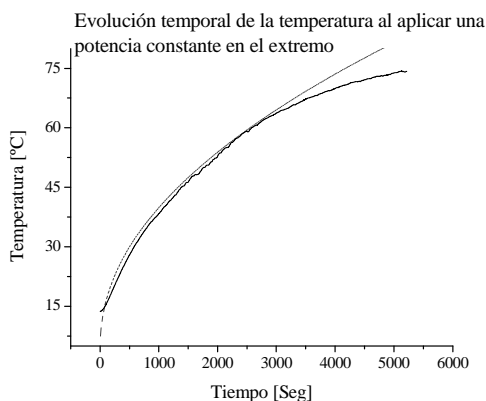
Se puede observar que los valores  $\kappa_{\epsilon}$  y  $\kappa_v$  no se solapan con lo estipulado en la referencia. Sin embargo, al utilizar la ecuación que es independiente de las pérdidas se obtuvo un valor similar al esperado. Esto permite concluir que el aislamiento de la barra no era suficientemente adecuado como para poder utilizar el modelo teórico. Por otro lado, la diferencia en el  $\kappa_v$  se puede adjudicar a dos hechos. Por un lado, es posible que la barra no fuese completamente homogénea, y por otro que los orificios realizados fueran demasiado profundos y anchos. Esto pudo haber perjudicado la propagación de la onda térmica.

Otro factor de error a considerar es que, si bien el aluminio tiene una alta conductividad, esta es menor que la del

cobre. Por lo tanto, es posible que el aluminio que recubría las termocuplas no condujera adecuadamente el calor con lo cual no se estaba midiendo exactamente la temperatura del cilindro.

Es importante recalcar que los resultados fueron obtenidos principalmente con las mediciones realizadas en los tres primeros orificios. Esto se debió a que por ser la potencia de la fuente muy baja, no era posible apreciar la onda térmica en los puntos más alejados. Sin embargo, si se deseara repetir esta experiencia utilizando una fuente de mayor potencia sería necesario usar una barra de mayor longitud para que siga siendo válida la aproximación de barra semi-infinita.

Para estudiar el período transitorio se reemplazó en la curva de la ecuación 13 el valor de difusividad obtenida ( $\kappa$ ). Esta curva se contrastó con las mediciones realizadas:



**Figura 6:** Período transitorio del sistema al ser excitado con una potencia constante. Se puede observar que la curva punteada aproxima bien a la medición (línea continua) hasta los 3000 segundos.

Se puede observar en la figura 6 que con los parámetros obtenidos experimentalmente la curva se ajusta razonablemente durante la primera etapa del transitorio. Las diferencias entre ambas curvas al transcurrir aproximadamente 3000 seg se puede adjudicar al hecho de que la barra no estaba suficientemente bien aislada por lo cual su comportamiento se aleja del predicho por el marco teórico.

### Conclusiones

Los valores obtenidos para la difusividad térmica utilizando el coeficiente de

decaimiento y la velocidad de propagación de la onda térmica fueron:

$$\kappa_e = (3,7 \pm 1,3) 10^{-4} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$$

$$\kappa_v = (5,6 \pm 2,7) 10^{-5} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$$

$$\kappa = (1,44 \pm 0,74) 10^{-4} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$$

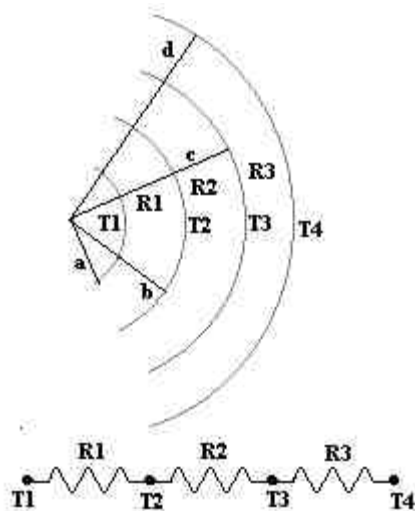
Se puede observar que el valor obtenido con la ecuación en la que no intervienen las pérdidas de calor se solapa con el mencionado en la referencia ( $\kappa = 1,02 10^{-4} \text{ Mts}^2 \text{ seg}^{-1}$ ). Esto permite inferir que el insuficiente aislamiento de la barra hace que la experiencia no se encuentre bajo las hipótesis del marco teórico (barra homogénea y semi-infinita con propagación unidimensional)

Se sugiere para futuras experiencias perfeccionar el aislamiento, por ejemplo con poliuretano expandido cuya conductividad es 0.03 Watt/m K. Además, es importante que los orificios sean del menor tamaño posible para no afectar la propagación de la onda. También se podría mejorar el trabajo utilizando una fuente de mayor potencia para tener mayor definición en las mediciones a distancias mayores a 20 cm de la misma.

En cuanto a la etapa transitoria del sistema al ser excitado con una potencia constante cabe destacar que el modelo se adapta durante los primeros 3000 seg al utilizar la difusividad medida. Esto no sucede para tiempos mayores posiblemente por las relevantes pérdidas de calor.

### Apéndice 1

Para estimar el calor emitido por la barra se consideró el modelo que hace una analogía con electricidad.



**Figura 7:** Se aprecia la analogía entre el cilindro cubierto de aislante y las resistencias colocadas en serie.

$$Q \cdot R = \Delta T \Leftrightarrow I \cdot R = \Delta V$$

Donde R es la resistencia que corresponde a cada capa de aislante y se calcula mediante la ecuación:

$$R = \frac{\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)}{2 \cdot \pi \cdot \kappa \cdot L} \quad (14)$$

Con  $r_0$  el radio interno,  $r_1$  el radio externo,  $\kappa$  la conductividad del material y L el largo de la barra.<sup>[6]</sup>

De aquí se obtiene que el calor Q emitido por unidad de tiempo y área por la barra es:

$$Q_{\text{cilindro}} = \frac{\Delta T}{R_1 + R_2 + R_3} \approx 9,4 \frac{\text{Watt}}{\text{m}^2}$$

donde  $\Delta T$  es la diferencia entre la temperatura en el tubo de cobre y la temperatura exterior que se estimó en 40°C.

Para calcular el calor cedido por unidad de tiempo por una termocupla de 1 metro aproximadamente se tiene que:

$$Q_{\text{termocupla}} = \frac{\kappa \cdot A \cdot \Delta T}{L} \approx 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ watt}$$

donde A es el área transversal del cable, L el largo del mismo,  $\kappa$  es la conductividad y  $\Delta T$  la diferencia de temperatura entre las uniones fría y caliente que se estimó en 60°C.

Se puede observar que el calor emitido por una termocupla de 1 metro es apreciablemente menor que el emitido por la barra, por lo tanto sus cables no afectarán la experiencia.

## Referencias

- [1] *Transferencia de Calor*; Nahle, Nasif. 2006; Biology Cabinet; [http://www.biocab.org/Transferencia\\_Calor.html](http://www.biocab.org/Transferencia_Calor.html)
- [2] *Conduction of Heat in Solids*; H. S. Carslaw, L. C. Jaeger, Segunda edición; Oxford University Press, Amen House; London; 1959
- [3] *An undergraduate experimente on the propagation of thermal waves*; A. Bodas, V. Gandía, E. López-Baeza; American Association of Physics Teachers, 1998
- [4] *Nuevo dispositivo para medición de difusividad térmica*, R. Yañez, J. D. Marconi, C. López, G. H. Rubiolo, S. N. Goyanes, Dep.de Física, FCEN, UBA, Dep. de Materiales, CAC-CNEA, CONICET, Buenos Aires, Argentina.
- [5] *Thermal conductivity of solids*, J.E. Parrott and A.D. Stuckes, Pion, London, 1975, pp. 24 -28
- [6] *Fenómenos de transferencia, Transferencia molecular de calor masa y cantidad de movimiento*, R Betancourt Grajales