QUANTIZACIÓN BRST-BFV DE TEORÍAS DE CALIBRACIÓN
(BRST-BFV quantization of gauge theories)

Adunador: **ALBERTO MEJÍAS**[1]

R

Resumen. Se presenta una introducción didáctica a la quantización de teorías de calibración empleando el método hamiltoniano de BATALIN-FRADKIN-VILKOVISKY (BRST-BFV), que tiene como característica esencial ser independiente de la condición de calibración. Además, este método generaliza el método de FADDEEV-POPOV, ya que permite construir una teoría quántica unitaria, a partir de cualquier teoría de calibración conocida. El procedimiento se ilustra con el cálculo del propagador para el rotor rígido bidimensional reformulado como una teoría de calibración.

Descriptores. Interacciones fundamentales, Teorías de calibración, Teoría quántica unitaria, Quantización de teorías de calibración, supersimetría, Simetría BRST.

Abstract. We present a didactical introduction to the quatization of gauge theories using the Hamiltonian method of BATALIN-FRADKIN-VILKOVISKY (BRST-BFV). This method is independíent of the gauge choice and generalizes the FADDEEV-POPOV method, since it allows the construction of a unitary quantum theory starting from any gauge theory. The method is illustrated with the calculation of the quantum mechanical propagator of the two dimensional rigid rotor, which is reformulated as a gauge theory.

Keywords. Fundamental interactions, gauge theories, unitary quantum theory, quantization of gauge theories, supersymmetry, BRST symmetry.

---

[1] ALBERTO R. MEJÍAS E. es Licenciado en Matemáticas, egresado de la Facultad de Ciencias de la Universidad de los Andes (ULA) Mérida-Venezuela. Es profesor de Topología, jubilado de la Universidad de los Andes. alrame59@gmail.com

1 INTRODUCCIÓN

Uno de los problemas fundamentales de la física teórica es la quantización de las teorías de calibración, ya que éstas abarcan todas las interacciones fundamentales desde la gravitación con la relatividad general, hasta el modelo estándar SU(3) × SU(2) × U(1).

Existen varios métodos que se han propuesto para quantizar dichas teorías de calibración. Sin embargo, hasta ahora ninguno ha sido exitoso para obtener una teoría quántica, físicamente consistente, de la gravitación. Entre éstos se encuentran, por ejemplo, el "método DIRAC" [1] y el "método de quantización por lazos" [2]. Uno de los métodos de quantización más exitosos es el llamado "BRST-BFV" (por los descubridores de la simetría BRST: BECHI, ROUET, STORA y TYUTIN, junto con los que desarrollaron el método de quantización: BATALIN, FRADKIN y VILKOVISKY) [3], ya que es posible aplicarlo desde las teorías más simples, como la de la partícula relativística, hasta teorías tan complicadas como la de supergravedad o las teorías topológicas.

Entre las ventajas que posee el método BRST-BFV se encuentran las siguientes: (i) su aplicación es muy sistemática, (ii) es independiente de las condiciones de calibración y (iii) produce una teoría quántica unitaria, a partir de cualquier teoría de calibración conocida. Este método requiere de la introducción de variables adicionales llamadas "fantasmas". El objetivo es obtener una descripción más simple de la dinámica, al usar la integral de línea que define la evolución del sistema. Otra de sus características es que rompe la covariancia explícita de los modelos a los cuales se aplica, dado que es un método hamiltoniano. Esto tiene como consecuencia que en algunos casos la interpretación física de los resultados obtenidos sea menos transparente, como sucede en el caso de la relatividad general. Para resolver este problema BATALIN y VILKOVISKY (BV) [4] propusieron una versión lagrangeana del método, la cual resulta ser explícitamente covariante. Sin embargo, esta versión tiene el problema de que no existe una forma precisa de evaluar la medida de la integral funcional y, de aquí, al operador evolución del sistema; mientras que en el método BRST-BFV, éste se encuentra completamente determinado. De este modo las dos versiones se complementan.

En este artículo analizaremos el método hamiltoniano, dejando para un trabajo posterior, al formalismo lagrangeano [5].

En Sección 2, revisaremos el método DIRAC, dado que éste es un excelente punto de partida para comprender lo que es una teoría de calibración desde el punto de vista hamiltoniano y posteriormente proceder a su quantización.

En Sección 3 introducimos primero, la simetría BRST vista como un reflejo quántico de la simetría de calibración. En seguida aplicamos esta simetría para construir el método de BRST-BFV. Dado el gran éxito que ha tenido este método, tanto recuperando resultados ya conocidos, como proporcionando una manera consistente de quantizar teorías donde los métodos previamente conocidos han fallado [6], es tentador aceptar la idea de promover la invariancia BRST al nivel de postulado fundamental para la quantización. Este postulado permite construir al lagrangeano quántico completo como la función más general de los campos físicos y de los fantasmas, que sea invariante bajo BRST. Este procedimiento naturalmente refleja a nivel quántico, la estrategia empleada para determinar al lagrangeano clásico a partir del principio de invariancia de calibración. Dentro de este contexto entonces, cobra gran importancia la pregunta de cómo reformular todos los esquemas previos de quantización en términos de dicha simetría.

Por último, en Sección 4 se presenta el ejemplo del rotor rígido bidimensional. Este ejemplo cumple tres propósitos que son: (i) ilustrar el método DIRAC, (ii) ilustrar el método BRST propiamente dicho y (iii) ilustrar la idea de que siempre es posible reformular una teoría con constricciones de segunda clase como una teoría de calibración, es decir únicamente con constricciones de primera clase [7] llevando a cabo su quantización según el método BRST-BFV. Una motivación más detallada de este punto de vista se da al final de Sección 3, donde ya se han presentado los antecedentes necesarios para su mejor comprensión.

2 QUANTIZACIÓN DIRAC

El método hamiltoniano de quantización BRST-BFV puede considerarse como una extensión del método DIRAC, por lo cual revisaremos primero a éste, tanto para fijar notación como para fijar ideas.

El primer punto a considerar, es comprender desde el punto de vista hamiltoniano, qué es lo que se entiende por una teoría de calibración.

Toda teoría de calibración está caracterizada por un lagrangeano singular, es decir,

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Esto significa que no todas las aceleraciones se encuentran determinadas por las ecuaciones de movimiento y, en consecuencia, nuestra teoría posee cierta arbitrariedad, la cual se ve reflejada en que las soluciones de las ecuaciones de movimiento contienen parámetros arbitrarios. De este modo, los observables de la teoría serán solamente aquellas combinaciones de variables dinámicas que son independientes de dichos parámetros arbitrarios. Esto precisamente es lo que se entiende por un objeto invariante por calibración. Aquí valdría la pena preguntarse si la aseveración recíproca es correcta; es decir, si toda teoría cuyo lagrangeano es singular, es una teoría de calibración. Como veremos a continuación la respuesta es negativa.

Ec. (2.1) nos dice, por otra parte, que no todos los momentos $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}$ están determinados por las velocidades, es decir, que existen m_1' relaciones del tipo

$$\phi(p, q)_{A_1} \approx 0 \tag{2.2}$$

donde $\approx$ significa que estas relaciones son cero una vez que se hayan evaluado todos los corchetes POISSON donde ellas aparezcan. Llamaremos 'constricciones primarias' a estas relaciones. El número de constricciones primarias independientes es igual a la dimensión de la matriz en (2.1) menos el rango de la misma. A este número lo denotaremos por m_1.

A continuación, por simplicidad, supondremos que todas las constricciones primarias son independientes y que son bosónicas, aunque el formalismo también puede desarrollarse en casos más generales [8]. Las constricciones (2.2) definen una subvariedad del espacio de fase llamada superficie de constricción, sobre la cual está restringido el movimiento.

La siguiente etapa en el análisis es introducir el hamiltoniano canónico

$$H_0 = \dot{q}^j p_j - L. \tag{2.3}$$

El hamiltoniano definido en (2.3) no está unívocamente determinado como una función de momentos y coordenadas, ya que las variaciones en estas variables no son todas independientes sino que deben estar restringidas para preservar las constricciones primarias (2.2). En consecuencia el hamiltoniano (2.3) está bien definido únicamente sobre la superficie de constricción y, por lo tanto, existe arbitrariedad para extenderlo fuera de ésta. Así podemos definir un nuevo hamiltoniano dado por

$$H_1 = H_0 + \lambda^{A_1} \phi_{A_1}, \tag{2.4}$$

donde A_1 marca a las constricciones primarias independientes y los λ^{A_1} son multiplicadores LAGRANGE, que son arbitrarios hasta este momento.

El paso siguiente en la determinación de la consistencia del método, es asegurarse de que la superficie de constricción se preserve en el tiempo. Esto implica pedir que $\dot{\phi}_{A_1} \approx 0$; es decir, que

$$\{\phi_{A_1}, H_1\} = V_{A_1}^{\ B_1} \phi_{B_1} + V_{A_1}^{\ A_2} \phi_{A_2} \approx 0, \tag{2.5}$$

donde $\{A, B\}$ es el corchete POISSON de las cantidades A y B. En esta etapa podrían aparecer nuevas constricciones llamadas secundarias, que son independientes de las primarias. Si en el proceso se obtienen constricciones secundarias, es necesario pedir que éstas también se conserven en el tiempo, como resultado de lo cual todavía puede surgir otra generación de constricciones. El proceso se continúa hasta que ya no se encuentren nuevas constricciones.

Una vez que se tenga la colección completa de constricciones, se definen las variables de primera clase como aquellas que tienen corchetes POISSON ≈ 0 con todas las constricciones. Es decir, F es de primera clase si

$$\{F, \phi_A\} = V_A^{\ B}(p, q)\phi_B, \tag{2.6}$$

con el índice $A = 1, \dots, M$, donde $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$, y m_n es el número de constricciones de la n-ésima generación. Las cantidades de segunda clase son todas aquellas que no satisfacen esta condición. En consecuencia, es posible definir como constricciones de primera clase, G_a, a todas aquellas que satisfagan la relación

$$\{G_a, \phi\} = C_{aB}^{\ \ C}(p, q)\phi_C \tag{2.7}$$

con $a = 1, \dots, p$. De este modo, las funciones de estructura $C_{aB}^{\ \ C}(p, q)$, pueden depender de las coordenadas y los momentos; es decir, no necesariamente se tiene un algebra LIE.

En el caso de las constricciones de primera clase no es posible determinar los multiplicadores LAGRANGE asociados a ellas y éstos son los parámetros arbitrarios que aparecen en la solución de las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, para cl caso de constricciones de segunda clase, χ_α, es posible determinar dichos multiplicadores debido a la existencia de la matriz

$$C_{\alpha\beta} = \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} \tag{2.8}$$

cuyo determinante es diferente de cero y por lo tanto invertible. Esto permite mostrar que todos los multiplicadores LAGRANGE asociados a estas constricciones pueden ser determinados. En consecuencia, cuando se tienen sólo constricciones de segunda clase no existe libertad de calibración aun cuando el lagrangeano sea singular.

Así, desde el punto de vista hamiltoniano, una teoría de calibración es aquélla que tiene al menos una constricción de primera clase.

En lo que respecta a las constricciones de segunda clase, suponiendo que son bosónicas, la matriz (2.8) implica que éstas deben de ser de un número par, dado que, de lo contrario, esta matriz no sería invertible ya que es antisimétrica.

Las constricciones de segunda clase siempre pueden ser tratadas como de primera clase, si uno incluye variables adicionales al problema, de tal manera que la matriz $C_{\alpha\beta}$ no sea invertible. Posteriormente veremos un ejemplo de cómo se puede llevar a cabo esta extensión. Así que, *de aquí en adelante, consideraremos que existen solamente constricciones de primera clase*.

De todas las constricciones de primera clase, de acuerdo al hamiltoniano H_1, sólo las primarias son generadoras de transformaciones de calibración, ya que sólo ellas tienen asociado un multiplicador LAGRANGE. Sin embargo, DIRAC postuló que todas las constricciones de primera clase, incluyendo las secundarias y las de orden superior, generan transformaciones de calibración. Este postulado se conoce como la conjetura de DIRAC y es válida en todos los sistemas físicos conocidos. Sin embargo, existen sistemas un poco patológicos que son contraejemplos de esta conjetura.

Hasta ahora existen varias demostraciones de la conjetura de DIRAC bajo ciertas restricciones [8]. Como aquí trataremos sistemas que tienen algún contenido físico, asumiremos que la conjetura de DIRAC es válida, es decir, postularemos que el cambio de una función arbitraria de momentos y coordenadas $F(p, q)$ bajo una transformación de calibración, está dado por

$$\delta F = \{F, \epsilon^a G_a\}, \tag{2.9}$$

donde recordamos que el índice a rotula a todas las constricciones de primera clase.

El parámetro de la transformación, $\epsilon^a(q, p, t)$, puede depender de las coordenadas del espacio de fase y del tiempo, aunque lo más común es que se le considere sólo como función del tiempo. Si tomamos en cuenta que todas las constricciones de primera clase son generadores de transformaciones de calibración podemos escribir, en lugar del hamiltoniano H_1, otro hamiltoniano que tome en cuenta la arbitrariedad inherente al extenderlo fuera de la superficie de constricción. Este hamiltoniano se conoce como el hamiltoniano extendido y está dado por

$$H_0 = H_1 + \lambda^a G_a \tag{2.10}$$

Las ecuaciones de movimiento, sobre la superficie de constricción, asociadas a este hamiltoniano son

$$\dot{q} = \{q, H_E\} = \frac{\partial H_0}{\partial p} + \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial p} \tag{2.11a}$$

$$\dot{p} = \{p, H_E\} = -\frac{\partial H_0}{\partial q} - \lambda^a \frac{\partial G_a}{\partial q} \tag{2.11b}$$

Las ecuaciones de movimiento anteriores, junto con las constricciones $G_a, \approx 0$ pueden obtenerse a partir de la acción

$$S = \int_a^b (p\dot{q} - H_0 - \lambda^a G_a) \tag{2.12}$$

variando con respecto a p, q y λ^a. Esta acción va a ser importante cuando querramos hacer contacto con el método de quantización usando integrales de línea.

Como los n multiplicadores LAGRANGE λ^a son arbitrarios, se puede imponer n condiciones de calibración para determinarlos

$$N_a(\lambda, p, q) = 0.$$

Ya que deseamos que dichas condiciones fijen completamente la calibración, éstas deben satisfacer la relación

$$\det\{G_a, N_b\} = 0$$

de manera tal, que la matriz $\{G_a, N_b\}$ sea invertible y de este modo puedan determinarse todos los multiplicadores LAGRANGE. Debe notarse que el imponer condiciones de calibración es equivalente a transformar al conjunto (G_a, N_b) en constricciones de segunda clase.

A nivel quántico, los pasos fundamentales del método DIRAC son los siguientes.

El primer paso es promover las constricciones de primera clase a nivel de operadores en el espacio HILBERT del problema. luego se postula que un estado $|\psi\rangle$ es *físico*, sólo si es aniquilado por éstas:

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0. \tag{2.13a}$$

Aquí $\hat{G}_a$ denota a la versión quántica de las constricciones de primera clase introducidas previamente, donde se han reemplazado las variables clásicas por sus respectivos operadores lo que, en general, produce problemas de ordenamiento que deben ser resueltos imponiendo algún criterio adicional.

El segundo paso es establecer que los observables de nuestra teoría son todos aquellos operadores hermíticos del espacio de fase, invariantes bajo una transformación de calibración, es decir, que conmutan con todas las constricciones de primera clase:

$$\hat{F} = \hat{F}^{\dagger} \text{ es observable} \Leftrightarrow \delta\hat{F} = [\hat{F}, \epsilon^a \hat{G}_a] = 0. \tag{2.13b}$$

Como vemos, una de las grandes ventajas del método DIRAC es que no es necesario fijar una calibración para obtener una teoría quántica. Sin embargo, este método no provee automáticamente una solución a algunos problemas que naturalmente aparecen en la formulación de cualquier teoría quántica, como son los siguientes:

(i) la versión quántica de las relaciones (2.7), aplicada a nuestras constricciones de primera clase, debe ser consistente con las condiciones (2.13a) que definen un estado físico. Esto se logra forzando a que en el lado derecho de la Ec. (2.7), el operador que representa a las funciones de estructura aparezca a la izquierda del operador que representa a las constricciones. Sin embargo, al implementar esto podrían aparecer términos adicionales (anomalías) que no fuesen proporcionales a las constricciones. Dichos términos son un reflejo del problema de ordenamiento y esta situación puede presentarse cuando las funciones de estructura dependen de los momentos y las coordenadas.

(ii) El segundo problema importante es que el método DIRAC proporciona los estados físicos del sistema, pero no nos da una regla para definir el producto escalar que permita llevar a cabo la interpretación probabilística de la teoría quántica.

(iii)

Como veremos más adelante, el método BRST-BFV mantiene las ventajas del método DIRAC proporcionando en muchos casos una guía para resolver los problemas anteriores.

3 EL MÉTODO BRST-BFV

La idea básica de este método consiste en extender el espacio de fase del problema promoviendo los multiplicadores LAGRANGE a nivel de coordenadas e introduciendo nuevas variables canónicas, que se denominan fantasmas, con estadística opuesta a las ya existentes. Dicha extensión se realiza hasta implantar de manera exacta, una transformación de supersimetría global que incorpora la simetría de calibración original. Esta resulta ser la simetría BRST, que explicaremos con más detalle en esta sección.

Una vez que el sistema original se ha completado con estas propiedades generales, se postula que la correspondiente medida de la integral funcional está dada por la medida LIOUVILLE correspondiente a todas las variables canónicas involucradas. Así, una vez integrados los fantasmas, se obtiene la medida correcta en las variables originales del sistema que define al producto escalar necesario para la interpretación de la teoría. Este procedimiento tiene la virtud de ser sistemático y, en más de un caso, ha producido correcciones no-triviales e inesperadas al método de FADDEEV-POPOV que, usualmente, es el más utilizado para quantizar teorías de calibración [8].

Los fantasmas fueron introducidos por primera vez por FEYNMAN [9], con el fin de mantener la unitaridad de una teoría YANG-MILLS. Se les dió el nombre de fantasmas porque, a pesar de ser escalares bajo transformaciones de coordenadas, no tienen estadística de bosón, es decir, violan el teorema de espín-estadística, por lo cual no son observables. Estos campos adquirieron más sentido cuando FADDEEV y POPOV [10] mostraron que los fantasmas podían obtenerse como resultado de un cálculo correcto de la medida de la integral de línea y por esto se les dió el nombre de fantasmas FADDEEV-POPOV. Posteriormente, con el trabajo de BECCHI-ROUET-STORA [3] y TYUTIN [11], éstos adquirieron un carácter más formal, ya que se mostró que eran parte esencial de una nueva simetría, que ahora se conoce con el nombre de simetría BRST.

La simetría BRST tiene dos características esenciales:

(i) es el residuo de la simetría de calibración una vez que la calibración se ha fijado, es decir, es una simetría que prevalece aun a pesar de que se haya seleccionado una calibración;

(ii) a diferencia de la simetría de calibración, esta simetría es de carácter global, es decir, el parámetro de la transformación no depende de la posición. Además, este parámetro es un número GRASSMANN, por lo cual la simetría BRST es un tipo de supersimetría, ya que la transformación relaciona bosones con fermiones. Las variables GRASSMANN pueden considerarse como el límite clásico de campos fermiónicos+, que están quantizados con anticonmutadores con el objeto de satisfacer la estadística FERMI-DIRAC. En efecto, si consideramos el límite clásico ($\hbar \to 0$) del anticonmutador $\{\psi_a, \psi_b\} = \hbar\delta_{ab}$, obtenemos que el álgebra satisfecho por las variables $\theta_a = lim_{\hbar \to 0}\ \psi_a$, está dado por $\theta_a\theta_b + \theta_b\theta_a = 0$. En particular $\theta_a^2 = 0$. Las relaciones anteriores definen la estructura básica de un álgebra GRASSMANN. Para una discusión más detallada de las propiedades de este tipo de álgebra se recomienda consultar a [12].

Como un ejemplo de la simetría BRST consideremos el caso de la electrodinámica, cuyo lagrangeano es

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{3.1}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.2}$$

Este lagrangeano es invariante bajo las transformaciones de calibración locales

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda \tag{3.3}$$

El lagrangeano efectivo en la calibración LORENTZ es

$$L_{\text{eff}} = L + L_{gf} + L_{FPG} \tag{3.4}$$

con

$$L_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial^\mu A_\mu)^2, \tag{3.5}$$

$$L_{FPG} = -i\partial^\mu \bar{c}\,\partial_\mu c \tag{3.6}$$

donde L_{gf} impone la condición de calibración LORENTZ y L_{FPG} es el lagrangeano de los fantasmas que en este caso simple se desacoplan. El lagrangeano efectivo ya no es invariante bajo las transformaciones (3.3), sin embargo, es invariante bajo las siguientes transformaciones:

$$\delta A_\mu = -\frac{\omega}{g}\,\partial_\mu c, \tag{3.7a}$$

$$\delta \bar{c} = -i\frac{\omega}{g\xi}\,\partial^\mu A_\mu, \tag{3.7b}$$

$$\delta c = 0 \tag{3.7c}$$

De las ecuaciones anteriores vemos que dicha transformación es del tipo supersimétrico, dado que relaciona fantasmas, que son fermiones, con el campo bosónico A_μ. En consecuencia, el parámetro de la transformación ω debe ser un número GRASSMANN impar. Estas transformaciones se conocen con el nombre de transformaciones BRST.

Del teorema de NOETHER sabemos que dada una simetría existe una carga conservada, en este caso la carga BRST. En el formalismo lagrangeano de las ecuaciones anteriores dicha carga está dada por

$$Q_{\mathrm{BRST}} = \frac{1}{g}\int d^3x\left[c\nabla\cdot E - \frac{1}{\xi g}\dot{c}\,\partial^\mu A_\mu\right] \tag{3.8}$$

Esta expresión es lineal en los fantasmas y, en consecuencia, es una variable grassmaniana impar. Consideraremos a esta propiedad como de carácter fundamental. Para implementar esta idea introducimos el concepto de paridad GRASSMANN, $\epsilon(z)$, de la variable z, que toma los valores 0 ó 1 según z sea par o impar en los generadores del álgebra GRASSMANN, respectivamente. De este modo tenemos que $\epsilon(Q_{\mathrm{BRST}}) = 1$.

El problema ahora es construir una expresión general para esta carga dentro del formalismo hamiltoniano de una teoría de calibración, sin fijar una calibración específica. Para hacer esto agrandamos el espacio de fase (p, q) considerando a los multiplicadores LAGRANGE, λ^a, asociados a las constricciones de primera clase como nuevas variables canónicas. Por lo tanto, es necesario también, agregar a sus momentos conjugados π_a, de tal modo que

$$\{\lambda^b, \pi_a\} = -\{\pi_a, \lambda^b\} = \delta_a^b \tag{3.9}$$

Para que la teoría original no se modifique es necesario considerar que estos momentos van a ser nuevas constricciones de primera clase $\pi_a \approx 0$. Así, el conjunto total de constricciones es

$$C_a = \{\pi_a, G_a\} \tag{3.10}$$

con $A = 1, \ldots, 2n$, donde n es el número de constricciones de primera clase sin tomar en cuenta a los momentos conjugados de los multiplicadores LAGRANGE.

Como siguiente paso introducimos los fantasmas η^A y consideramos que también son variables canónicas, a las cuales asociamos sus momentos canónicos conjugados, que llamaremos antifantasmas

$$\{\eta^B, \mathcal{P}_A\} = \{\mathcal{P}_A, \eta^B\} = -\delta_A^B \tag{3.11}$$

donde $\epsilon(\mathcal{P}_A) = \epsilon(\eta^A) = 1$, $(\eta^A)^* = \eta^A$, y $(\mathcal{P}_A)^* = -\mathcal{P}_A$. Imponemos además, que las nuevas variables canónicas η^A y $\mathcal{P}_A$ tengan corchetes POISSON cero, con el resto de las variables $Z_\Delta, = (p_i, q^i, \lambda^a, \pi_a)$:

$$\{\eta^A, Z_\Delta\} = \{\mathcal{P}_A, Z_\Delta\} = 0. \tag{3.12}$$

El espacio de fase extendido, con coordenadas $(Z_\Delta, \eta^A, \mathcal{P}_A)$, equipado con esta estructura de corchetes POISSON, se denomina superespacio de fase. Además de la paridad GRASSMAN, es conveniente definir en este superespacio una estructura adicional $\mathcal{G}$, que denominaremos número fantasma. Esto lo hacemos atribuyendo a cada una de las variables básicas un número fantasma de la siguiente manera:

$$\mathcal{G}(Z_\Delta) = 0, \quad \mathcal{G}(\eta^A) = 1, \quad (\mathcal{P}_A) = -1. \tag{3.13}$$

Además requerimos que el número fantasma de un producto de variables, sea igual a la suma de los números fantasmas de sus componentes.

La carga BRST se construye requiriendo que genere las transformaciones de calibración asociadas a las constricciones de primera clase dadas en la Ec. (3.10), al orden más bajo en una expansión en serie de potencias de los fantasmas. Por otra parte, con base en la expresión (3.8), consideraremos que dicha carga es real, tiene número fantasma $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y paridad GRASSMANN $\epsilon(\Omega) = 1$. Con estas condiciones la carga BRST queda completamente determinada a orden más bajo, donde debe tener la forma

$$\Omega = \eta^A C_A + \text{términos de orden superior.} \tag{3.14}$$

Los términos de mayor orden quedan determinados por la propiedad de nilpotencia

$$\{\Omega, \Omega\} = 0. \tag{3.15}$$

Para entender mejor esta propiedad, tomemos en cuenta que Ω genera las transformaciones BRST, entonces una segunda variación de una función arbitraria está dada por

$$\delta^{(2)} F = \{\{F, \Omega\}, \Omega\}. \tag{3.16}$$

Empleando en (3.16) la superidentidad JACOBI

$$\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + (-)^{\epsilon F_1(\epsilon F_2 + \epsilon F_3)}\{\{F_2, F_3\}, F_1\} + (-)^{\epsilon F_3(\epsilon F_1 + \epsilon F_2)}\{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0, \tag{3.17}$$

válida para cuando se tienen cantidades con paridad GRASSMANN arbitraria, se obtiene

$$\delta^{(2)} F = -\frac{1}{2}\{\{\Omega, \Omega\}, F\}. \tag{3.18}$$

Así, vemos que si Ω es nilpotente, una transformación BRST queda completamente determinada por la primera variación. La propiedad de nilpotencia determina a Ω hasta una transformación BRST, dado que

$$\{\Omega, \Omega\} = 0 \Rightarrow \{\Omega', \Omega'\} = 0, \tag{3.19a}$$

con

$$\Omega' = \Omega + \{K, \Omega\}, \tag{3.19a}$$

para K arbitraria. Una solución de la condición de nilpotencia (3.15), que toma en cuenta a (3.14) y las condiciones $\mathcal{G}(\Omega) = 1$ y $\epsilon(\Omega) = 1$, está dada por

$$\begin{aligned} \Omega &= \eta^A C + \eta^B \eta^C \overset{(1)}{U}_{BC}{}^{A} \mathcal{P}_A + \eta^C \eta^D \eta^E \overset{(2)}{U}_{CDE}{}^{AB} \mathcal{P}_A \mathcal{P}_B + \cdots \\ &+ \eta^{B_1} \ldots \eta^{B_{n+1}} \overset{(n)}{U}_{B_1 \ldots B_{n+1}}{}^{A_1 \ldots A_n} \mathcal{P}_{A_1} \ldots \mathcal{P}_{B_n B}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

con

$$\overset{(1)}{U}_{BC}{}^{A} = -\frac{1}{2} C_{CB}{}^{A}, \tag{3.21}$$

donde las $C_{AB}{}^{C}$ son las funciones de estructura dadas en (2.7). Las funciones de estructura de segundo orden, $\overset{(2)}{U}_{B_1 B_2 B_3}{}^{A_1 A_2}$, se calculan de la expresión

$$\overset{(2)}{U}{}_{B_1\,B_2\,B_3}{}^{A_1A_2}C_{A_2} = \{\overset{(1)}{U}{}_{[B_1B_2}{}^{A_1},\, C_{B_3]}\} + 2\overset{(1)}{U}{}_{[B_1B_2}{}^{D},\, \overset{(1)}{U}{}_{B_3D]}{}^{A_1}. \tag{3.22}$$

Las expresiones para las funciones de estructura de mayor orden pueden encontrarse en [131. Para algunas teorías conocidas, como por ejemplo las que describen al modelo estándar SU(3) × SU(2) × U(1) y la gravitación de EINSTEIN, el desarrollo de Ω llega sólo hasta orden uno.

Una vez calculada la carga BRST, se definen los observables del sistema como aquellas cantidades con número fantasma igual a cero y que son invariantes bajo BRST, es decir que tienen corchetes POISSON cero con Ω. La dinámica del sistema queda determinada por el hamiltoniano BRST. Éste se encuentra definido por la condición de que al orden más bajo en los fantasmas debe reducirse al hamiltoniano canónico. Además, debe tener paridad GRASSMANN cero, ser real y con número fantasma igual a cero. Por último, debe preservar la invariancia BRST del sistema de tal manera que

$$\{H_{\mathrm{BRST}},\, \Omega\} = 0. \tag{3.23}$$

Bajo estas condiciones, a primer orden en los fantasmas, el hamiltoniano BRST está dado por

$$H_{\mathrm{BRST}} = H_0 + \eta^A V_A{}^B \mathcal{P}_B + \text{"más"} \tag{3.24}$$

donde "más" significa términos de, al menos, cuatro fantasmas [13].

Para completar la descripción del método BRST-BFV, nos falta ahora, determinar cuál es el equivalente de las condiciones quánticas (2.13), sobre los estados físicos del sistema y cuál es el equivalente de los observables definidos en el método DIRAC. Dado que en el método BRST-BFV los generadores de transformaciones de calibración (originalmente representados por las constricciones de primera clase), se han extendido al generador Ω de las transformaciones BRST, es natural suponer que el equivalente de las condiciones (2.13) corresponde a

$$\hat{\Omega}\,|\psi\rangle = 0, \tag{3.25a}$$

$$F = F^\dagger \text{ es observable} \Leftrightarrow [\hat{\Omega},\, \hat{F}] = 0, \tag{3.25b}$$

con $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^\dagger$. Sin embargo, las Ecs. (3.25) no describen únicamente a los estados físicos y a los observables del sistema. Los estados físicos se obtienen por una identificación adicional de las soluciones de (3.25a) y también están sujetos a una condición sobre el número fantasma. Para obtener estas condiciones adicionales primero observamos que, dada la nilpotencia de $\hat{\Omega}$ ($\hat{\Omega}^2 = 0$, quánticamente), un estado de la forma $\hat{\Omega}\chi$ con χ arbitraria, satisface a (3.25a). Entonces, cualquier estado que se pueda escribir como

$$\psi = \psi' + \hat{\Omega}\chi, \tag{3.26}$$

es solución de (3.25a) si ψ' es solución. Por lo tanto un estado físico será realmente la clase de equivalencia definida por (3.26).

En el caso de los observables también existe una clase de equivalencia, ya que cualquier operador de la forma $[\hat{\Omega}, \hat{K}]$, con $\hat{K}$ arbitraria satisface a (3.25b). Así, un observable de la forma

$$\hat{F} = \hat{F}' + [\hat{\Omega}, \hat{K}], \tag{3.27}$$

donde $\hat{F}'$ es solución de (3.25b), también es solución de esta ecuación.

Además, como los fantasmas no son observables, por violar el teorema de espín-estadística, se exige que todos los observables $\hat{F}$ deben tener número fantasma cero y, además, deben satisfacer

$$[\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{G}}] = 0. \tag{3.28}$$

Esto implica que todos los estados físicos deben poseer el mismo número fantasma, ya que en caso contrario deberían existir operadores que conectaran estados con número de fantasma diferente y por lo tanto éstos no cumplirían la condición (3.28).

Un postulado adicional de BRST-BFV, es asumir que el número fantasma de los estados físicos es igual a cero, es decir,

$$\hat{\mathcal{G}}|\psi\rangle = 0. \tag{3.29}$$

El siguiente paso consiste en evaluar el operador evolución del sistema, utilizando el método BRST-BFV. Tomando en cuenta que este operador es unitario, una vez que hemos introducido los fantasmas, podemos tomar la representación de éste, en términos de la integral FEYNMAN de línea. Además debernos considerar que los estados de interés físico, son aquellos aniquilados por la carga BRST; en consecuencia, sólo es necesario considerar elementos de matriz del operador evolución entre estos estados. Esto implica que debernos imponer condiciones de contorno en la integral de línea, que sean BRST-invariantes. Esta condición no garantiza unicidad en las condiciones de contorno, dado que tenemos la libertad de seleccionar una clase de equivalencia de estados físicamente permisibles, además de que podemos elegir la representación en que deseamos trabajar (momentos o coordenadas). Existen, al menos, tres tipos de condiciones de frontera adecuadas [13] y, nosotros, elegiremos una representación que hace contacto con el método FADDEEV-POPOV. En esta representación las constricciones se clasifican de manera análoga a (3.10) y los fantasmas se ordenan de la siguiente manera:

$$\eta^A = (-(i)^{\epsilon_a + 1}\mathcal{P}^a, \mathcal{C}^a), \quad \mathcal{P}_A = ((i)^{\epsilon_a + 1}\overline{\mathcal{C}}_a, \overline{\mathcal{P}}_a) \tag{3.30}$$

Las variables $\mathcal{C}^a$, $\overline{\mathcal{C}}_a$ son reales y, respectivamente, conjugadas de $\overline{\mathcal{P}}_a$, $\mathcal{P}^a$, que son puramente imaginarias, de tal modo que se satisfacen los siguientes corchetes POISSON:

$$\{\mathcal{C}^a, \overline{\mathcal{C}}_b\} = \{\mathcal{C}^a, \mathcal{P}^b\} = \{\overline{\mathcal{C}}_a, \overline{\mathcal{P}}_b\} = \{\overline{\mathcal{P}}_a, \mathcal{P}^b\} = 0 \tag{3.31a}$$

$$\{\overline{\mathcal{P}}_a, \mathcal{C}^b\} = -\delta_a^b = \{\mathcal{P}^b, \overline{\mathcal{C}}_a\} \tag{3.31b}$$

Estamos denotando por ϵ_a a la paridad GRASSMANN de la constricción G_a. Las condiciones de contorno a tiempo final τ_2 y tiempo inicial τ_1, que son BRST-invariantes para este conjunto de variables, son

$$\mathcal{C}^a(\tau_2) = \mathcal{C}^a(\tau_1) = 0, \tag{3.32a}$$

$$\overline{\mathcal{C}}_a(\tau_2) = \overline{\mathcal{C}}_a(\tau_1) = 0, \tag{3.32b}$$

$$\pi_a(\tau_2) = \pi_a(\tau_1) = 0, \tag{3.32c}$$

donde recordamos que π_a denota a los momentos canónicos conjugados asociados a los multiplicadores LAGRANGE λ^a. Estas condiciones de frontera son BRST-invariantes en general, dado que, en términos de estas variables la carga BRST puede escribirse como

$$\Omega = \mathcal{C}^a G_a - (i)^{\epsilon_a + 1}\mathcal{P}^a \pi_a + \text{"más"},$$

donde "más" contiene al menos a un antifantasma y dos fantasmas. Así, la variación de $\mathcal{C}$ se cancela debido a (3.32a) y la variación de $\overline{\mathcal{C}}$ se cancela por (3.32c). Por último, la variación de π es automáticamente igual a cero.

Es claro que aún falta fijar las condiciones de contorno de las restantes variables dinámicas, lo que dependerá específicamente, del problema en cuestión. Una vez determinadas éstas, el operador evolución está dado por la acción quántica efectiva

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}_\mu \exp(iS_{\text{eff}}), \tag{3.33a}$$

donde $\mathcal{D}_\mu$ es la medida LIOUVILLE correspondiente a todas las variables canónicas introducidas y

$$S_{\text{eff}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \, (\dot{q}^i p_i - \lambda^a \dot{\pi}_a + \dot{\eta}^A \mathcal{P}_A - H_{\text{eff}}). \tag{3.33b}$$

El hamiltoniano efectivo H_{eff} no se encuentra unívocamente definido, ya que como mencionamos en (3.27), todo observable en BRST-BFV queda indeterminado hasta un operador de la forma $\{\Omega, K\}$. Por lo tanto podemos definir al hamiltoniano efectivo como

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{BRST}} - \{\Psi, \Omega\}, \tag{3.34}$$

donde Ψ se conoce como la condición de calibración fermiónica. Usualmente ésta se escoge de la forma

$$\Psi = (i)^{\epsilon_a + 1} \overline{\mathcal{C}}_a \chi^a + \overline{\mathcal{P}}_a \lambda^a, \tag{3.35}$$

donde las χ^a son funciones arbitrarias de las variables canónicas, que no involucran fantasmas ni antifantasmas y son tales que $(\chi^a)^* = (i)^{\epsilon_a} \chi_a$.

Una de las propiedades fundamentales de (3.33) es su invariancia ante transformaciones infinitesimales de Ψ, lo que quiere decir que la integral de línea es independiente de la elección de calibración (teorema de FRADKIN-VILKOVISKY [3]). Esto permite realizar diversas pruebas de consistencia de las teorías de calibración sin imponer alguna condición de calibración particular. Sin embargo, no es posible utilizar el valor $\Psi = 0$, ya que en este caso la integral no se encuentra bien regularizada [8].

Antes de detallar el ejemplo que hemos escogido para ilustrar de una manera simple el método BRST, es conveniente hacer algunas consideraciones con el objeto de poner dicho ejemplo en la perspectiva adecuada.

En general, los sistemas de interés en física poseen constricciones, tanto de primera, como de segunda clase y, en particular, las teorías de calibración, consideradas como el paradigma de una teoría física, sólo tienen el primer tipo de constricciones.

Estrictamente hablando, todos los sistemas con constricciones de primera clase pueden reducirse a sistemas que poseen únicamente constricciones de segunda clase, una vez fijada la calibración. Más aún, en principio sería posible resolver dichas constricciones de forma tal que se identificaran los verdaderos grados de libertad del sistema. Sin embargo, este proceso puede resultar imposible en la práctica. Un camino a seguir en este caso es trabajar con las constricciones introduciendo los respectivos corchetes DIRAC. No obstante, en muchos casos de interés físico, la realización quántica de estos corchetes se vuelve muy complicada. En otras ocasiones, aunque cualquiera de los procedimientos arriba mencionados sea factible, podría no resultar conveniente su implantación debido al hecho de que algunas simetrías importantes de la teoría ya no son manifiestas, como es el caso de la partícula libre relativística, por ejemplo.

Por otra parte, la construcción de la integral de línea para los verdaderos grados de libertad de un sistema, es un problema aún no resuelto, en general. Frente a esta situación podemos adoptar el punto de vista opuesto, que consiste en pensar que cualquier sistema físico con constricciones puede escribirse como un sistema que contiene solamente constricciones de primera clase, es decir, como una teoría de calibración. Una forma de lograr esto es agregando un par de variables canónicas por cada par existente, de constricciones de segunda clase y cuidando que el hamiltoniano total se modifique de tal manera que no se produzcan nuevas constricciones en el proceso de establecer que éstas sean consistentes con la evolución temporal del sistema.

Esta idea de transformar todas las constricciones en constricciones de primera clase, es también consistente con la idea de promover la invariancia bajo transformaciones BRST, al nivel de postulado fundamental, para proceder a la quantización correcta de cualquier sistema físico.

Si aceptamos este postulado, entonces cobra gran importancia la pregunta de cómo describimos teorías con constricciones de segunda clase de acuerdo al método BRST-BFV. En este caso la integral funcional está perfectamente definida, puesto que la medida correspondiente es la LIOUVILLE en el conjunto de variables canónicas que cierra bajo BRST.

Otra ventaja de este modo de proceder es que las simetrías originales del sistema siempre quedan manifiestas. Recientemente, este punto de vista se ha empleado exitosamente en la quantización de teorías de calibración originalmente anómalas, y se ha hecho contacto con ideas alternativas previamente propuestas para lograr una quantización correcta de ellas [14].

El ejemplo del rotor rígido que discutimos en la siguiente sección ilustra las ideas mencionadas anteriormente, de una manera simple y transparente. Como sucede con todos los ejemplos sencillos, existen varios métodos alternativos para su discusión. En este caso, la quantización, empleando constricciones de segunda clase y corchetes DIRAC no presenta ningún problema y la obtención de los verdaderos grados de libertad es trivial.

Se trata entonces de enfatizar la ilustración del método BRST-BFV, en un contexto simple que, además, posee todos los ingredientes básicos del punto de vista expuesto en los párrafos anteriores y cuyo verdadero potencial se aprecia realmente en sistemas más complicados como los citados en [14].

4 QUANTIZACIÓN BRST-BFV DEL ROTOR RÍGIDO

Como un ejemplo específico e ilustrativo del método de quantización BRST-BFV consideremos el problema del rotor rígido. Éste no es un sistema que inicialmente posee invariancia de calibración, pero lo podemos convertir en uno de este tipo, adicionando nuevas variables canónicas.

Para comenzar, consideremos la descripción del rotor rígido bidimensional según el método DIRAC.

El lagrangeano es

$$L = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - \lambda(r-a); \tag{4.1}$$

donde hemos usado coordenadas polares r y θ y λ es un multiplicador LAGRANGE. Los momentos canónicos asociados a este sistema son

$$p_r = m\dot{r}, \qquad p_\theta = mr^2\dot{\theta}; \tag{4.2}$$

con lo que el hamiltoniano total resulta

$$H_{\mathrm{T}} = H_0 + \lambda(r-a) = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2}\right) + \lambda(r-a). \tag{4.3}$$

De acuerdo al método DIRAC tenemos una constricción primaria dada por

$$\xi_1 = r - a \approx 0, \tag{4.4}$$

cuya conservación en el tiempo, da lugar a una constricción secundaria ξ_2

$$\dot{\xi}_1 = \{\, r - a,\, H_\mathrm{T}\} = \frac{p_r}{m} \Rightarrow \xi_2 = p_r \approx 0. \tag{4.5}$$

La constricción secundaria ξ_2 no origina nuevas constricciones y permite evaluar al multiplicador LAGRANGE, que resulta ser

$$\lambda = \frac{p_\theta^2}{mr^3} \tag{4.6}$$

Esto quiere decir que nuestro par de constricciones (4.4) y (4.5) son de segunda clase, como es fácil mostrarlo al evaluar la matriz $C_{\alpha\beta}$:

$$\{\xi_\alpha, \xi_\beta\} = C_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Con el objeto de emplear el método DIRAC en sistemas que poseen constricciones de segunda clase, es necesario construir nuevos corchetes POISSON que mantengan las propiedades algebraicas de éstos, pero que sean consistentes con el hecho de imponer las constricciones de manera fuerte, es decir como identidades. Estos son los llamados corchetes DIRAC, que están definidos por

$$\{A,B\}_\mathrm{D} = \{A,B\} - \{A,\xi_\alpha\}\, C^{\alpha\beta} - \{\, \xi_\beta, B\}, \tag{4.8}$$

donde $C^{\alpha\beta}$ denota a la matriz inversa de $C_{\alpha\beta}$. Estos corchetes son los que van a ser promovidos a conmutadores o anticonmutadores al momento de quantizar y, dado que satisfacen la propiedad esencial

$$\{A,\xi_\alpha\}_\mathrm{D} = 0 \quad \text{para toda } A, \tag{4.9}$$

podemos considerar a las constricciones de segunda clase ξ_1 y ξ_2 como identidades fuertes. Esto implica que nuestro hamiltoniano total (4.3) se reduce a

$$H_\mathrm{TD} = \frac{p_\theta^2}{2ma^2} \tag{4.10}$$

que es el hamiltoniano natural que describe al rotor rígido. Además obtenemos $\{\theta, p_\theta\}_\mathrm{D} = 1$, lo que nos garantiza que θ y p_θ resultan ser las variables canónicas conjugadas adecuadas.

El problema ahora es cómo aplicar el método de quantización BRST-BFV a este sistema, ya que no contamos con constricciones de primera clase. Existen al menos dos soluciones a este problema: la primera es considerar que de las dos constricciones ξ_1 y ξ_2, sólo una de ellas es una constricción, mientras que a la otra la podemos considerar como una condición de calibración. Dado que el método BRST-BFV es independiente de la elección de calibración, podemos calcular al propagador del sistema utilizando la acción funcional en esta calibración. La segunda solución, que utilizaremos a continuación, consiste en transformar las dos constricciones de segunda clase en constricciones de primera clase, añadiendo dos nuevas variables canónicas. Así, agregamos a nuestro sistema las variables canónicamente conjugadas (q, π), de forma tal que nuestras nuevas constricciones de primera clase sean

$$\phi_1 = r - a + q \approx 0, \qquad \phi_1 = p_r - \pi \approx 0, \tag{4.11}$$

que se reducen a las constricciones originales (4.4) y (4.5) cuando $q = 0$ y $\pi = 0$. El hamiltoniano (4.3) debe ser modificado de forma tal que las nuevas constricciones (4.11) se mantengan en el tiempo sin que se generen nuevas constricciones. La forma de lograr esto, es imponer que el nuevo hamiltoniano total sea una variable de primera clase, o sea, que satisfaga (2.6). Un hamiltoniano que cumple esta condición y que además, se reduce a (4.3) cuando $q = 0 = \pi$, es

$$\tilde{H}_{\mathrm{T}} = \frac{1}{2m}\left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2}\right] + \lambda(r + q - a). \tag{4.12}$$

Este hamiltoniano está indeterminado hasta un múltiplo de las constricciones de primera clase, por lo cual podemos definir un hamiltoniano extendido

$$\tilde{H}_{\mathrm{E}} = \tilde{H}_0 + \lambda^\alpha \phi_\alpha, \tag{4.13}$$

con $\tilde{H}_0 = \frac{1}{2m}\left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2}\right]$.

Asociado al hamiltoniano extendido, tenemos el lagrangeano

$$\tilde{L}_{\mathrm{E}} = p_i\,\dot{q}_i - \tilde{H}_{\mathrm{E}}$$

$$= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} + \pi\dot{q} - \frac{1}{2m}\left[(p_r - \pi)^2 + \frac{p_\theta^2}{(r+q)^2}\right] - \lambda(r + q - a) - \sigma(p_r - \pi) \tag{4.14}$$

Las ecuaciones de movimiento provenientes de este lagrangeano son invariantes bajo las siguientes transformaciones de calibración, generadas por las constricciones:

$$\delta p_r = -\epsilon^1(\tau), \quad \delta p_\theta = 0, \quad \delta\pi = -\epsilon^1(\tau), \quad \delta\lambda = -\dot{\epsilon}^1(\tau), \tag{4.15a}$$

$$\delta r = -\epsilon^2(\tau), \quad \delta\theta = 0, \quad \delta q = -\epsilon^2(\tau), \quad \delta\sigma = -\dot{\epsilon}^2(\tau), \tag{4.15b}$$

Así, hemos construido una teoría de calibración para el rotor rígido. Como un paso previo a la aplicación del método BRST-BFV a este sistema, es necesario identificar claramente las condiciones de contorno que permiten resolver en forma única el sistema de ecuaciones provenientes del lagrangeano (4.14). Estas condiciones de contorno serán subsecuentemente utilizadas en el cálculo del propagador del sistema, en la formulación de la integral funcional.

Dado que tenemos una teoría de calibración, las variables dinámicas estarán únicamente determinadas por las condiciones iniciales del problema siempre que fijemos la calibración asociada a las transformaciones (4.15). Con este objeto y para hacer contacto posterior con la formulación BRST-BFV, escogemos la calibración no-canónica determinada por las condiciones $\dot{\lambda} = 0$ y $\dot{\sigma} = 0$ [15].

La forma del lagrangeano (4.14) sugiere la conveniencia de introducir las siguientes variables canónicas

$$\xi = \frac{1}{2}(r - q), \qquad \pi_\xi = p_r - \pi \tag{4.16a}$$

$$Q = r + q, \qquad \pi_Q = \frac{1}{2}(p_r + \pi) \tag{4.16b}$$

que reemplazan a las variables r, p_r, q, π. De este modo, el lagrangeano (4.14) se transforma en

$$\tilde{L}_{\mathrm{E}} = p_\theta\dot{\theta} + \pi_\xi\dot{\xi} + \pi_Q\dot{Q} - \frac{1}{2m}\left[\pi\xi 2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2}\right] - \lambda(Q - a) - \sigma\pi_\xi \tag{4.17}$$

Las ecuaciones de movimiento resultan dadas por

$$\dot{\theta} - \frac{p_\theta}{mQ^2} = 0, \qquad \dot{\xi} - \frac{\pi_\xi}{m} - \sigma = 0, \qquad \dot{Q} = 0, \tag{4.18a}$$

$$\dot{p}_\theta = 0, \qquad \dot{\pi}_\xi = 0, \qquad \dot{\pi}_Q - \frac{p_\theta^2}{mQ^3} + \lambda = 0 \tag{4.18b}$$

$$Q = a, \qquad \pi_\xi = 0, \qquad \dot{\lambda} = \dot{\sigma} \tag{4.18c}$$

donde la última ecuación incluye la variación con respecto a los multiplicadores LAGRANGE, junto con la elección de la calibración no-canónica.

De las Ecs. (4.18) concluimos que

$$\ddot{\theta} = 0, \qquad \ddot{\xi} = 0, \qquad \ddot{\pi}_Q = 0. \tag{4.19}$$

Para obtener solución única, de estas ecuaciones, debemos fijar las variables respectivas en los extremos $\tau = \tau_1$ y $\tau = \tau_2$. En otras palabras, las condiciones de contorno del sistema son

$$z(\tau_1) = z_1, \qquad z(\tau_2) = z_2, \tag{4.20}$$

donde z es cualquiera de las variables θ, ξ, π_Q.

La solución de cada una de las Ecs. (4.19) y (4.20) está dada por

$$z(\tau) = z_1 + (z_1 - z_2)\frac{(\tau - \tau_1)}{(\tau_2 - \tau_1)} \tag{4.21}$$

y todas las restantes variables canónicas, junto con los multiplicadores LAGRANGE, quedan determinadas por las constricciones, las condiciones de contorno (4.20) y las ecuaciones de movimiento (4.18). En efecto, resulta

$$Q = a, \qquad \pi_\xi = 0, \qquad p_\theta = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(\tau_2 - \tau_1)} a^2, \tag{4.22a}$$

$$\sigma = \frac{(\xi_2 - \xi_1)}{(\tau_2 - \tau_1)}, \qquad \lambda = \frac{m(\theta_2 - \theta_1)^2}{(\tau_2 - \tau_1)} a - \frac{(\pi_{Q_2} - \pi_{Q_1})}{(\tau_2 - \tau_1)}. \tag{4.22b}$$

De este modo hemos obtenido la solución explícita de las Ecs (4.18) en la calibración no canónica $\dot{\lambda} = 0$, $\dot{\sigma} = 0$, en virtud de fijar correctamente las condiciones de contorno, de las respectivas variables.

Si queremos que las Ecs. (4.18) sean estrictamente un extremo de la acción $S = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \overline{L}_{\mathrm{E}} d\tau$, con las condiciones de contorno (4.20), debemos escribir los términos cinéticos en ésta, de tal manera que las derivadas con respecto al tiempo, aparezcan sobre las variables que se están fijando en los extremos. Así entonces, la parte correspondiente de la acción resulta ser

$$p_\theta \dot{\theta} + \pi_\xi \dot{\xi} - Q \dot{\pi}_Q \tag{4.23}$$

Observemos que para recuperar exactamente el problema original, descrito por el hamiltoniano (4.3) más las constricciones (4.4) y (4.5) con el valor (4.6) para el multiplicador LAGRANGE λ, debemos escoger $\xi_1 = \xi_2 = \frac{1}{2}a$ y $\pi_{Q_1} = \pi_{Q_2} = 0$ en las soluciones (4.22).

A continuación calcularemos el operador evolución del sistema, empleando el método BRST-BFV, descrito en la sección anterior.

Para el caso particular del rotor rígido tenemos

$$C_A = (\pi_\lambda, \pi_\sigma, Q - a, \pi_\xi), \tag{4.24a}$$

$$\eta^A = (-i\mathcal{P}^1, -i\mathcal{P}^2, \mathcal{C}^1, \mathcal{C}^2), \qquad \mathcal{P}_A = (i\overline{\mathcal{C}}_1,\ i\overline{\mathcal{C}}_2,\ \overline{\mathcal{P}}_1,\ \overline{\mathcal{P}}_2) \tag{4.24b}$$

con lo que la carga BRST resulta ser

$$\Omega = -i\mathcal{P}^1\pi_\lambda - i\mathcal{P}^2\pi_\sigma + \mathcal{C}^1(Q-a) + \mathcal{C}^2\pi_\xi. \tag{4.25}$$

Tomando la condición de calibración fermiónica

$$\Psi = \overline{\mathcal{P}}_1\lambda + \overline{\mathcal{P}}_2\sigma, \tag{4.26}$$

el hamiltoniano efectivo resulta

$$H_{\text{eff}} = \frac{1}{2m}\left(\pi_\xi^2 + \frac{p_\theta^2}{Q^2}\right) + i\overline{\mathcal{P}}_1\mathcal{P}^1 + i\overline{\mathcal{P}}_2\mathcal{P}^2 + \lambda(Q-a) + \sigma\pi_\xi. \tag{4.27}$$

donde $H_{\text{BRST}} = H_0$, en este caso. La acción clásica efectiva es,

$$S_{\text{eff}} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \Big(p_\theta\dot{\theta} + \pi_\xi\dot{\xi} - \dot{\pi}_Q Q - \dot{\pi}_\lambda\lambda - \dot{\pi}_\sigma\sigma - \mathcal{P}^1\dot{\overline{\mathcal{C}}}_1 - \mathcal{P}^2\dot{\overline{\mathcal{C}}}_2 + \dot{\mathcal{C}}^1\overline{\mathcal{P}}_1 + \dot{\mathcal{C}}^2\overline{\mathcal{P}}_2$$

$$-\frac{p_\theta^2}{2mQ^2}-\frac{\pi_\xi^2}{2m}-i\overline{\mathcal{P}}_1\mathcal{P}^1-i\overline{\mathcal{P}}_2\mathcal{P}^2-\lambda(Q-a)-\sigma\pi_\xi\Big) \tag{4.28}$$

y la integral de línea queda definida por

$$Z_\Psi=\int\mathcal{D}\mathcal{P}^1\,\mathcal{D}\overline{\mathcal{P}}_1\,\mathcal{D}\mathcal{C}^1\,\mathcal{D}\overline{\mathcal{C}}_1\,\mathcal{D}\mathcal{P}^2\,\mathcal{D}\overline{\mathcal{P}}_2\,\mathcal{D}\mathcal{C}^2\,\mathcal{D}\overline{\mathcal{C}}_2$$

$$\mathcal{D}\pi_\xi\,\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}p_\theta\,\mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}\pi_\lambda\,\mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}\pi_\sigma\,\mathcal{D}\sigma\,\mathcal{D}\pi_Q\,\mathcal{D}Q\,\exp[iS_{\text{eff}}] \tag{4.29}$$

Las condiciones de frontera para la integral de trayectoria son

$$\mathcal{C}^1(\tau_1)=\mathcal{C}^2(\tau_1)=\mathcal{C}^1(\tau_2)=\mathcal{C}^2(\tau_2)=\overline{\mathcal{C}}_1(\tau_1)=\overline{\mathcal{C}}_2(\tau_1)=\overline{\mathcal{C}}_1(\tau_2)=\overline{\mathcal{C}}_2(\tau_2)=0, \tag{4.30a}$$

$$\pi_\lambda(\tau_1)=\pi_\lambda(\tau_2)=\pi_\sigma(\tau_1)=\pi_\sigma(\tau_2)=0, \tag{4.30b}$$

$$\theta(\tau_1)=\theta_1,\quad \theta(\tau_2)=\theta_2,\quad \xi(\tau_1)=\xi(\tau_2)=a/2,\quad \pi_Q(\tau_1)=\pi_Q(\tau_2)=0. \tag{4.30c}$$

Las Ecs. (4.30c) corresponden precisamente a las condiciones de contorno obtenidas previamente en (4.20) con la elección indicada después de (4.23). El hecho de que éstas se mantengan se debe a que los fantasmas se acoplan solamente entre ellos y no con las coordenadas originales del problema. Usando la expresión (4.25) para el generador Ω, es posible verificar que todas las condiciones de contorno (4.30) son efectivamente invariantes bajo BRST.

Ahora procederemos a calcular la integral de línea (4.29). Las integrales funcionales sobre los fantasmas son idénticas para los subíndices uno y dos, por lo que mostraremos como se calcula esta integral para el caso genérico:

$$I_{\text{F}}=\int\mathcal{D}\mathcal{P}\,\mathcal{D}\overline{\mathcal{P}}\,\mathcal{D}\mathcal{C}\,\mathcal{D}\overline{\mathcal{C}}\,\exp\Big[i\int_{\tau_1}^{\tau_2}d\tau\Big(-\mathcal{P}\dot{\overline{\mathcal{C}}}+\dot{\mathcal{C}}\overline{\mathcal{P}}-i\overline{\mathcal{P}}\mathcal{P}\Big)\Big]. \tag{4.31}$$

Integrando por partes con respecto a los dos primeros términos en la exponencial, vemos que el resultado de integrar funcionalmente sobre $\mathcal{C}$ y $\overline{\mathcal{C}}$ son dos deltas funcionales de $\dot{\mathcal{P}}$ y $\dot{\overline{\mathcal{P}}}$, lo cual permite realizar las integraciones restantes sobre $\mathcal{P}$ y $\overline{\mathcal{P}}$. Tomando en cuenta que estas variables no están fijas en los extremos, se obtiene

$$I_{\text{F}}=\int d\mathcal{P}_0\,d\overline{\mathcal{P}}_0\,\exp\big[\overline{\mathcal{P}}_0\,\mathcal{P}_0\,T\big], \tag{4.32}$$

con $T=\tau_2-\tau_1$. Las integrales (4.32) son ahora del tipo BEREZIN [16], definidas por

$$\int d\mathcal{P}\mathcal{P} = 1, \qquad \int d\mathcal{P} = 0. \tag{4.33}$$

De este modo se obtiene finalmente

$$I_{\mathrm{F}} = T \tag{4.34}$$

Así, una vez integrados los fantasmas, la acción efectiva quántica es

$$Z_{\Psi} = T^2 \int \mathcal{D}\pi_{\xi}\,\mathcal{D}\xi\,\mathcal{D}p_{\theta}\,\mathcal{D}\theta\,\mathcal{D}\pi_{\lambda}\,\mathcal{D}\lambda\,\mathcal{D}\pi_{\sigma}\,\mathcal{D}\sigma\,\mathcal{D}\pi_{Q}\,\mathcal{D}Q\,\exp\Big[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,\Big(p_{\theta}\dot{\theta} + \pi_{\xi}\dot{\xi} - \dot{\pi}_{Q}\,Q$$

$$-\dot{\pi}_{\lambda}\lambda - \dot{\pi}_{\sigma}\sigma - \frac{p_{\theta}^2}{2mQ^2} - \frac{\pi_{\xi}^2}{2m} - \lambda(Q-a) - \sigma\pi_{\xi}\Big)\Big]. \tag{4.35}$$

Para la integral funcional sobre λ y π_{λ}, tenemos

$$I_{\lambda} = \int \mathcal{D}\pi_{\lambda}\,\mathcal{D}\lambda\,\exp\Big[i\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,\Big(-\dot{\pi}_{\lambda}\lambda - \lambda[Q-a]\Big)\Big]. \tag{4.36}$$

Con la partición del intervalo $T = N\epsilon$, podemos escribir I_{λ} como

$$I_{\lambda} = \int d\pi_{\lambda_1}\cdots\, d\pi_{\lambda_{N-1}}\, d\pi_{\lambda_0}\cdots\, d\pi_{\lambda_{N-1}}\,\exp\Big[-i\sum_{n=0}^{N-1}\;\big([\pi_{\lambda_{n+1}} - \pi_{\lambda_n}] + \epsilon\lambda_n[Q_n - a]\big)\Big],$$

donde se tomó en cuenta que π_{λ} está fijo en los extremos y por esa razón existe una integral de más sobre λ. Dada la condición de contorno (4.30b), al integrar sobre π_{λ} se obtiene

$$I_{\lambda} = \int d\lambda_0\cdots\, d\lambda_{N-1}\;\delta(\lambda_1 - \lambda_0)\cdots\,\delta(\lambda_{N-1} - \lambda_{N-2})\,\exp\Big[-i\sum_{n=0}^{N-1}\;\epsilon\lambda_n[Q_n - a]\big)\Big]$$

$$= \int d\lambda_0 \exp\Big[-i\,\lambda_0\int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\,(Q-a)\Big]. \tag{4.37}$$

Las integrales funcionales sobre σ y π_{σ}, Q y π_{Q}, ξ y π_{ξ} son muy similares a la anterior, dando como resultado final una integral, ya no funcional, con respecto a las variables que no están fijas en los extremos. En el caso de la integración sobre ξ, cuyos valores fijos en los extremos, son diferentes de cero, se obtiene el término adicional $\exp i\pi_{\xi_0}[\xi(2) - \xi(1)]$ que es igual a uno, en nuestro caso particular. De este modo resulta

$$Z_{\Psi} = T^2 \int \mathcal{D}\theta\mathcal{D}p_{\theta}\, d\lambda_0 d\sigma_0 dQ_0 d\pi_{\xi_0} \exp\Big[-\,i\,\Big(\lambda_0[Q_0 - a] + \sigma_0\pi_{\xi_0}\;\frac{\pi_{\xi_0}^2}{2m}\Big)T$$

$$+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\theta \dot{\theta} - \frac{p_\theta^2}{2mQ^2}\right)\Big]. \quad (4.38)$$

Con los cambios de variable $\bar{\lambda}_0 = \lambda_0 T$ y $\bar{\sigma}_0 = \sigma_0$ se obtienen dos funciones delta asociadas a los dos primeros términos en la exponencial:

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}\theta \mathcal{D}p_\theta \, dQ_0 d\pi_{\xi_0} \delta(\pi_{\xi_0}) \, \delta(Q_0 - a)$$

$$\times \exp\Big[- i\left(\frac{\pi_{\xi_0}^2}{2m}\right)T + i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\theta \dot{\theta} - \frac{p_\theta^2}{2mQ_0^2}\right)\Big].$$

Finalmente, integrando sobre Q_0 y π_{ξ_0} se obtiene

$$Z_\Psi = \int \mathcal{D}p_\theta \mathcal{D}\theta \exp\Big[i \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \left(p_\theta \dot{\theta} - \frac{p_\theta^2}{2mQ_0^2}\right)\Big]. \quad (4.39)$$

Esta integral funcional es la que se tiene que realizar normalmente para el cálculo del propagador del rotor rígido y puede encontrarse, por ejemplo, en [17], dando como resultado

$$Z_\Psi = \langle \theta_2 \tau_2 | \theta_1 \tau_1 \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2\pi} \exp\Big[in(\theta_2 - \theta_1) - i \frac{n^2}{2ma^2}(\tau_2 - \tau_1)\Big]. \quad (4.40)$$

Así, hemos ilustrado el método de quantización de BRST-BFV en el marco de una teoría bastante simple como lo es el rotor rígido en dos dimensiones, formulado como una teoría de calibración, mostrando de una manera explícita, el cálculo del operador evolución del sistema. Es necesario enfatizar que la efectividad y potencial del método BRST-BFV se manifiesta realmente en teorías más complicadas, como, por ejemplo, en el caso de supergravedad [8] o de teorías topológicas [18], como la gravedad en 2 + 1 dimensiones [19]. Otra de sus grandes ventajas es que puede aplicarse a teorías con constricciones reducibles, siendo el primer método de quantización que ha permitido tratar consistentemente este tipo de constricciones [20]. Otras aplicaciones del método pueden encontrarse en [8, 21, 22]. Por último, podemos mencionar que es posible dar una interpretación geométrica a los fantasmas, logrando así un mayor entendimiento de lo que significa quantizar una teoría de calibración [23].

REFERENCIAS

1. P.A.M. DIRAC, *Lectures on Quantum Mechanics,* Yashiva University Press (1964).

2. A. ASHTEKAR, *Lectures on Non-perturbative Canonical Gravity,* World Scientific (1991).

3. C. BECCHI, A. ROUET y R. STORA, *Phys. Lett.* **52B** (1974) 344; E. S. FRADKIN y G. A. VILKOVISKY, CERN Report TH2332 (1977); I. A. BATALIN y G.A. VILKOVISKY, *Phys. Lett.* **B69** (1977) 309; E.S. FRADKIN y T.E. FRADKINA, *Phys. Lett.* **B72** (1977) 343.

4. I. A. BATALIN y G. A. VILKOVISKY, *Phys. Lett.* **B102** (1981) 27.

5. J. D. VERGARA, (en preparación).

6. R. E. KALLOSH, *Nucl. Phys.* **B141** (1978) 141; G. CURCI, R. FERRARI, *Nuovo Cimento,* **A32** (1976) 151.

7. Ö. F. DAYI, *Ann. Phys.* (NY) **217** (1992) 217.

8. M. HENNEAUX y C. TEITELBOIM, *Quantization of Gauge Systems,* Princeton University Press (1992).

9. R. P. FEYNMAN, *Acta Phys. Pol.* **XXIV** (1063) 697.

10. L. D. FADDEEV y V. N. POPOV. *Phys. Lett.* **B25** (1967) 29.

11. I. V. TYUTIN, Preprint FIAN (P. N. Lebedev Physical Institute) No. 39 (1975).

12. B. DEWITT, *Supermanifolds,* Cambridge University Press, Cambridge (1992).

13. M. HENNEAUX, *Phys.Rep.* **129** (1985) 1.

14. T. FUJIWARA, Y. IGARASHI y J. KUBO, *Phys. Lett.* **B251** (1990) 427; S. MIYAKE y K. SHISUYA, *Mod. Phys. Lett.* **A4** (1989) 2675; M. MOSHE y Y. OZ, *Phys.*

Lett. **B224** (1989) 145; L. D. FADDEEV y S. SHATASHVILI, *Phys. Lett.* **B167** (1986) 225.

15. C. TEITELBOIM, *Phys.Rev.* **D25** (1982) 3159.

16. F. A. BEREZIN, *The method of second quantization.* Academic Press, New York (1966).

17. H. KLEINERT, *Path Integrals,* World Scientific, Singapore 1990.

18. D. BIRMINGHAM, M. BLAU, M. RAKOWSKI y G. THOMPSON, *Phys. Rep.* **209** (1991) 129.

19. G. GONZÁLEZ y J. PULLIN, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 3395.

20. J. THIERRY-MIEG, *Nud. Phys.* **B335** (1990) 334.

21. N. NAKANISHI y I. OJIMA, *Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity,* World Scienlific, Singapore (1990).

22. 22. D. M. GILMAN y I. V. TYUTIN, *Quantization of Fields with Constraints,* Springer-Verlag, Berlin (1990).

23. L. BONORA y P. COLLA-RAMUSINO, *Commun. Math. Phys.* **87** (1983) 589.

24. A. GARCÍA ZENTENO, L. F. URRUTIA, J. D. VERGARA Y R. P. MARTÍNEZ, *Revista Mexicana de Fisica* **40**, *No.* 3 (1994) 476.