

ACERCAMIENTO DIDÁCTICO AL CONCEPTO DE ACCIÓN EN FÍSICA

Joaquín González Álvarez

El concepto de *Acción* en física es uno de los más importantes el cual puede definirse dimensionalmente como el producto S de la energía por el tiempo, $S=Ext$ de modo que en el SI su unidad es Joule multiplicado por segundo J.s. La constante de Planck $h=E/f$ tiene como se observa dimensiones de acción.

Utilizaremos para el presente artículo una expresión matemática definitoria para la acción y continuaremos atendiendo por razones didácticas a las dimensiones de las expresiones matemáticas:

$$S = \int L dt \quad (1)$$

donde L es la lagrangiana $L=T-V$ la cual para mejor entendimiento tomaremos la de la mecánica:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - m.a.x$$

lo cual puesto en (1) nos lleva a:

$$S = \int \frac{1}{2}mv^2 dt - \int m.a.x dt$$

y por evidentes sustituciones a:

$$S = \int \frac{1}{2}mv dx - \int m x dv$$

y por lo tanto:

$$S = -mvx/2 \quad (2)$$

Dado que hemos atendido a las dimensiones solamente para el razonamiento didáctico, obviaremos el coeficiente $-1/2$, con lo cual en lo adelante como fórmula de la acción tomaremos la expresión:

$$S = mvx \quad (3)$$

la cual nos permite ver que la acción también puede definirse como el producto del momento lineal por el espacio, $S=px$.

Una vez definido el concepto de acción y su formulismo pasaremos a ocuparnos del principio de *mínima acción* el cual resulta fundamental en la óptica geométrica, y para ello daremos una elemental idea del concepto de *variación* de una magnitud física que podemos entenderla como "desviación" del valor de la magnitud, así la desviación de S la representaremos δS y por (1) de esta forma:

$$\delta \int L dt$$

lo cual nos permite adelantar que el principio de mínima acción postula que *La variación de la acción es igual a cero*, lo cual se formula:

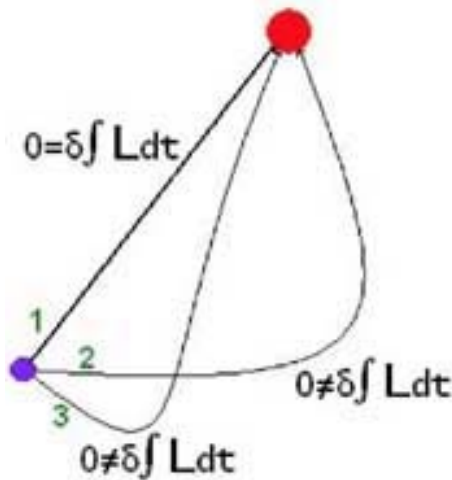
$$\delta \int L dt = 0 \quad (4)$$

Pudiera decirse que (4) es la ecuación fundamental de la Óptica Geométrica pues ésta se basa en el concepto *rayo de luz* como idealización del *Principio de propagación rectilínea de la luz*, y como se explicará, en (4) se formaliza que la luz se propaga de forma que su "desviación" (variación) de la línea recta es nula.

Tanto la acción como el principio de mínima acción no se refieren sólo al movimiento mecánico como el de las partículas, sino que ambos conceptos atañen también a campos como el electromagnético, que es el caso de la luz, por lo cual lo que ocurre con el campo electromagnético en la atracción electrostática de partículas cargadas, es análogo a la propagación de la luz.

En la figura que presentamos se muestra gráficamente el significado del principio de mínima acción en este caso en la propagación del campo electromagnético de atracción electrostática, que como explicamos es análoga a la de la luz. En la figura una carga positiva en rojo atrae a una carga negativa en azul por acción de un campo electromagnético que se propaga como la luz por la trayectoria rectínea 1 y las trayectorias curvilíneas 2 y 3, todas saliendo de la carga positiva y todas coincidiendo en la carga negativa por lo cual en dichos dos puntos se cumple que $\delta \int L dt = 0$, evidenciándose que

para la trayectoria 1 $\delta \int L dt = 0$ y para las 2 y 3 $\delta \int L dt \neq 0$ por todo lo cual se confirma que la expresión (4) es la ecuación fundamental de la óptica geométrica.



En la imagen aparecen una carga positiva fija (en rojo) y un electrón libre (en azul). De todas las trayectorias posibles, ¿cuál escogerá el electrón? El principio de acción mínima determina que la trayectoria 1 será la elegida.

Imagen y texto de Wikipedia (Principio de mínima acción)

Otro principio que fundamenta la óptica geométrica el cual refiere a tiempo mínimo de propagación de la luz, es el *Principio de Fermat* postulando que el tiempo que el tiempo invertido por la luz en pasar de un punto a otro tiene un valor estacionario aunque la práctica demuestra que es mínimo. Para formalizarlo podemos valernos de la misma figura utilizada para el de mínima acción y de la "afortunada" analogía formal de (4) con la que será la expresión del principio de Fermat con sólo darle a L el significado de *longitud óptica* la cual es igual al producto de la longitud geométrica l por el índice refracción: $L = nl$.

Basándonos en lo anterior para formalizar el Principio de Fermat, damos los siguientes pasos partiendo de que por (4) adaptado, el tiempo t será mínimo para que la luz recorra un espacio x por lo cual $dt/dx = 0$:

$$t = l/v = (n/c)l \quad l = f(x)$$

y por lo tanto:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dL/dx}{c} = 0$$

y en consecuencia:

$$dL/dx = 0$$

expresión que formaliza el Principio de Fermat.

Mediante el Principio de Fermat puede deducirse la ley de Snell de la Óptica Geométrica:

$$\eta_1 \cdot \text{sen} i = \eta \cdot \text{sen} r$$

La gran importancia del concepto de acción en física, se manifiesta no sólo en óptica y mecánica clásica sino también en vertientes de la física moderna como la mecánica cuántica.

Como final de este trabajo presentamos otra igualdad definitoria del momento lineal valiéndonos de la antes vista $S=px$ que nos lleva a $p = \partial S / \partial x$ que permite transformar la conocida igualdad:

$$H = p^2 / 2m + V$$

en la muy importante igualdad:

$$H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + V.$$

New Orleans, USA. Marzo de 2014.

Joaquín González Álvarez.