

# APLICACIONES FUNDAMENTALES DEL LAGRANGIANO

**Joaquín González Álvarez**

La función lagrangiana o simplemente lagrangiano es una de las formulaciones mas utilizadas en las ciencias, principalmente en física. La fórmula definitoria del lagrangiano  $L$  no puede ser mas sencilla, si simbolizamos la energía cinética por  $T$  y la potencial por  $V$  tendremos:

$$L = T - V$$

la cual para el caso mecánico sería:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + F_x \quad (1)$$

La aplicación mas conocida de  $L$  es la del sistema de ecuaciones de Lagrange (por Joseph Louis Lagrange, un gran matemático del siglo XVIII):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial v} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

para un sólo grado de libertad; para  $n$  grados de libertad serían  $n$  ecuaciones análogas a (2). Para problemas complejos de múltiples grados de libertad las ecuaciones de Lagrange resultan mas útiles que las ecuaciones de Newton, no obstante en aras del mejor entendimiento lo emplearemos con el lagrangiano (1):

$$\frac{d}{dt}(mv) - F = 0$$

que nos conduce a:  $F = ma$ , la conocida segunda ley de la dinámica.

De más profundidad resulta la aplicación al estudio de los conceptos de simetría y ruptura de simetría, los cuales presentamos de forma muy elemental pero de considerable valor didáctico. Vamos a suponer que tenemos cuatro partículas de igual masa gravitatoria que se mueven en el vacío sin ningún orden en un medio que no las desacelera por lo cual no tendrán masa inercial ( $m=F/a$ ). En este estado de las cuatro partículas no habrá trayectorias preferentes, el medio les será indiferenciable en todas las direcciones, se dice entonces que el sistema presenta simetría, en este caso esférica. Si de momento se

produce una condensación en el medio, las partículas se desacelerarán, adquirirán masa inercial ( $m=F/a$ ), pero no será la misma para todas porque no será igual para todas la interacción con el medio condensado. Con el lagrangiano se formaliza la ruptura al no ser éste igual antes y después de la ruptura, antes no existe masa inercial después si la habrá y término másico de (1) habrá variado, mientras existe simetría el lagrangiano permanece invariable. La invariancia del lagrangiano en la simetría se mantiene aunque varíen los valores de las coordenadas espacio-temporales. pues habrá una magnitud intrínseca que no variará la cual recibe el nombre de *Invariante Gauge*. Habrá inclusive algunas partículas que no adquirirán masa inercial pues no interactúan con el medio. En esta situación ya no habrá el desorden que existía cuando la simetría, ahora ya podrán ordenarse en cuanto a sus diferentes masas inerciales, se ha pasado del desorden al orden, se habrá producido ruptura de simetría. Vemos pues que al producirse un orden en la ruptura de simetría por condensación del medio, el proceso es con disminución de entropía para lo cual se necesita suministrar energía al sistema. Por lo tanto es preciso energía para lograr la condensación aunque también por criterio generalizado se puede lograr condensación por "enfriamiento". En el temprano postbigbang se produjo un la ruptura de simetría electrodébil en un sistema de partículas, análogo al que hemos, modelizado anteriormente, antes de la ruptura ninguna tenía masa inercial y al condensarse el medio adquirieron masa inercial los bosones  $W$  y los  $Z$  y el fotón no el cual por no ser material sino energía no interactuó con el medio condensado que fue el campo de Higgs según criterio generalizado, campo del bosón de Higgs que se dio masa a si mismo. La ruptura de simetría se formaliza en el lagrangiano al variar el o los términos másicos de (1) como ya explicamos.

Pasamos a ocuparnos de los importantes conceptos de estabilidad e inestabilidad de un sistema o de un elemento de éste. Imaginemos una canica colocada en la cúspide de la copa del sombrero que usan los mariachis mexicanos, decimos que la canica se encuentra inestable pues bastará una casi imperceptible fuerza para que caiga rodando por las laderas del sombrero mexicano hasta que caiga en la parte plana del mismo donde quedará constreñida a permanecer en un plano. En el instante en que la canica comienza a rodar todas las trayectorias por las laderas le serán indiferentes cualquiera "le viene bien", el sistema presentará simetría, al pasar al ala del sombrero mexicano y constreñirse sus movimientos aparece una estabilidad relativa, un cierto orden, ha ocurrido una ruptura de simetría en este caso espontánea porque nada externo al sistema la ha provocado.

Para formalizar la estabilidad-inestabilidad, usaremos una curva acampanada  $V = f(\phi)$  donde  $V$  es el potencial que es la parte del lagrangiano que nos interesa y  $\phi$  la abscisa, la curva semeja el perfil del sombrero mexicano y  $\phi = 0$  será el origen de coordenadas cuyo eje vertical divide en dos partes iguales a la curva con lo cual el punto mas alto corresponderá a la cúspide de la copa del sombrero donde se coloca inicialmente la canica y por tanto este punto será un máximo de la curva. Tendrá pues que cumplirse  $V' = 0$  y  $V'' < 0$  con  $\phi = 0$ .

La expresión matemática que más se adecua para  $V$ , conocida como *potencial de Yukawa*, es:

$$V = \mu^2 \phi^2 / 2 + \Delta \phi^4 / 4$$

siendo  $\mu$  la masa, con lo cual:

$$V' = \mu^2 \phi$$

Y como  $V'' = \mu^2$  y  $V''$  tiene que ser menor que cero para que donde se coloca la canica, sea un máximo,  $\mu^2$  tiene que ser negativa, por lo tanto la masa  $\mu$  tiene que ser **imaginaria**.

Llegado a este punto voy a exponer mi criterio según el cual no existen cuerpos con masa imaginaria pero que se dan fenómenos físicos que pueden explicarse partiendo de la *hipótesis de trabajo* de que si hay partículas con masa imaginaria y por ende viajando a velocidades mayores que la de la luz (taquiones) que pudieron existir en el temprano postbigbang. Pienso que es una hipótesis "violenta" del mismo tipo (salvando la enorme diferencia de transcendencia) que la hipótesis del comienzo del universo al producirse la colosal explosión de un **punto geométrico como postula la del bigbang**, y sin embargo hasta ahora no se ha encontrado en la misma ninguna falta de lógica interna ni contradicción.

Veamos como justifico mi criterio. Supongo que pueden o pudieron existir partículas con masa im (i unidad compleja) que cumplen fórmulas de la Teoría Especial de la Relatividad como la de la masa relativista y la de la energía  $E = mc^2$  por lo que tendremos:

$$E = imc^2 / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Si multiplicamos numerador y denominador por  $i = \sqrt{-1}$  tendremos:

$$E = -mc^2 / \sqrt{\frac{v^2}{c^2} - 1} \quad (3)$$

Examinando cuidadosamente la igualdad (3) encontramos varias cosas interesantes e importantes. Notamos que en la misma no aparece ningún valor imaginario y que la masa es negativa. Esto me ha llevado a las siguientes conclusiones. El concepto masa imaginaria puede interpretarse como un fenómeno físico que se produce con la energía tomando valores dados cuando el movimiento de las partículas se lentifica (disminución de v aumentando E según igualdad 3) al actuar sobre el movimiento una *energía negativa* que en la expansión inflacionaria del universo, la proporcionó la *presión negativa de la energía oscura* teorizada por Alan Guth. Por acción de la presión negativa al lentificarse el movimiento de las partículas, el medio se condensa, se hace viscoso ordenándose al producirse un cambio de fase de segunda especie, antientrópico por aumento de energía, en definitiva con la desestabilización ocurre ruptura de simetría. Por la lentificación así producida y no por descenso de temperatura como se postula con generalizado criterio que no comparto y pienso que es un eufemismo calificar de "enfriamiento" un descenso a  $10^{25}$ F. Con la

lentificación va disminuyendo la velocidad de las partículas y llegar a valores menores que la de la luz, los taquiones dejan de serlo y pasan a ser bosones de Higgs con masa real. Dada la condensación del medio el campo del bosón Higgs es como un océano viscoso que llena todo el universo desacelerando las partículas, dotando de masa inercial ( $m=F/a$ ) a los bosones de la interacción electro-débil  $W$  y  $Z$  y no al fotón por ser éste energía y no material, el bosón de Higgs en este mecanismo conocido como Mecanismo de Higgs, se da masa a si mismo.

Con el criterio que expongo en este trabajo sobre la interpretación física del concepto hipotético masa imaginaria y mi ensayo de explicación del Mecanismo de Higgs mi objetivo es motivar la reflexión y agradecer sugerencias *puntuales* de corregir errores que me puedan servir para mejorar mi trabajo.

New Orleans, USA. Marzo de 2014.

**Joaquín González Álvarez.**