EL ACOPLAMIENTO DEL MOMENTO ANGULAR EN RELATIVIDAD (II PARTE)

Rodolfo CARABIO

El momento magnético anómalo del espin del electrón

En el capítulo anterior se pudo mostrar como el acoplamiento relativista del momento angular orbital del electrón con su momento angular de espín resultaba en una modificación a la expresión del "campo centrifugo" (dependencia de la fuerza centrífuga con la distancia), al que está sometido un electrón (y en general cualesquiera partícula en un campo central), en el campo colombiano del núcleo, y con ello una modificación a sus niveles de energía (interacción espín-orbita) usando el sencillo modelo atómico de Borh. Tal uso de dicho modelo está justificado por el hecho de que se tiene que la componente del momento angular longitudinal de espín (Ls) es un observable (Lz), independiente de la orientación relativa entre el vector de la velocidad del electrón y la eventual dirección del vector momento angular de espín, orientación relativa que en mecánica cuántica no está definida a cada instante dado el principio de incertidumbre.

Se dedujo usando dicho modelo que el electrón como portador de un momento angular intrínseco debía tener a su vez un correspondiente momento magnético, y que la razón giromagnetica de espín debía ser muy cercana a g=2 (a diferencia del conocido resultado clásico que es g=1), sin apelar a alguna supuesta estructura interna del electrón.

Considerando entonces válida la aplicación del modelo atómico de Borh para los casos en los cuales las funciones de onda del electrón son las correspondientes a los estados con los siguientes números cuánticos: principal (n), orbital (l) y magnético (m)

n= l+1

m = l

Las funciones de onda de dichos estados tienen la forma

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} r^{n-1} \exp(-r/na_0).e^{im\phi}.sen^l\theta$$

Siendo a_0 el radio de Borh

Que para grandes valores de (n), tienden a ser las trayectorias circulares clásicas. En cualquier caso (clásico y cuántico) en estos estados los valores medios observables son coincidentes tanto en el modelo clásico de Borh como en el que establece la ecuación de Schrodinger

Volviendo a la expresión relativista para la transformación del momento angular longitudinal

$$L = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Dicha transformación influye en el valor del momento angular de espín para el estado 2p y 2s de diferente forma. Para el estado 2p podemos considerar la componente observable de la velocidad tangencial (vt) del electrón en función de la proyección observable de su momento angular orbital según el eje z, que en el modelo de Borh y cuántico-ondulatorio es:

$$L_Z = m v_T a_0$$
$$\hbar = m.v_T a_0$$

Sea la proyección observable del momento angular de espín (Lsz)

Aplicando la transformación por velocidad

$$L_{SZ} = \frac{L_{SZ}'}{\sqrt{1 - \hbar^2 / m^2 a_0{}^2 c^2}}$$

En la formula Lsz' es el momento angular intrínseco del electrón, que por estar en el sistema de referencia considerado en movimiento toma la denominación con comilla

Recordando el valor de la constante de estructura fina en función del radio de Borh:

$$\alpha = \hbar / m a_0 c$$

Haciendo el desarrollo en serie de potencias

$$L_{SZ} \cong L_{SZ}'(1 + \alpha^2 / 2)$$

$$L_{SZ} \cong (\hbar / 2)(1 + \alpha^2 / 2)$$

Tenemos que la velocidad tangencial del electrón en el átomo modifica el valor de su momento angular de espín en una magnitud de segundo orden de pequeñez de la constante de estructura fina, esto es una magnitud $(1/137)^2$

Para el caso del estado orbital 2s el cálculo de la modificación del momento angular de espín por la velocidad no es tan evidente, el estado 2s no corresponde a un orbita circular sino a un movimiento "pendular" del electrón en el cual es posible un conjunto de valores de la velocidad

Veamos la forma analítica de la función de onda radial del estado 2s

$$\psi_{2s} = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0{}^3}} (2 - r / a_0) \exp(-r / 2a_0)$$

En este estado el electrón tiene cierta probabilidad no nula de estar en el punto central de atracción (núcleo), además de estar en un intervalo extendido de distancia de tal centro de atracción, este hecho hace suponer que este conjunto de velocidades influirá de forma diferente en el espín del electrón a lo que lo hace en el estado 2p

El problema está en determinar el conjunto de velocidades y calcular su influencia sobre el momento angular de espín del electrón. De forma relacionada a la velocidad, en mecánica cuántica se trata el impulso (p) que tiene una partícula

En mecánica cuántica una onda compleja del tipo

$$\psi = A.\exp(ipx / \hbar)$$

Corresponde – por definición - a un valor único del impulso de la partícula, esta expresión de onda incluso es válida en el ámbito relativista (ver ondas de De Broglie). Si la partícula tiene una función de onda cualquiera entonces el conjunto de valores del impulso que posee se determina usando un desarrollo en serie compleja, análogo al desarrollo en serie de Fourier (Landau-Lifhsitz: Curso de Física Teórica Vol II)

Para el caso de una función definida entre un espacio finito (L), el desarrollo en serie compleja

$$\psi = \sum_0^\infty a_n.\exp(in\pi x/L)$$

Los coeficientes a_n están dados por:

$$a_n = \frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x).\exp(-in\pi x/L)dx$$

Para adaptar el cálculo a una onda física de impulso (p), se hace la equivalencia:

$$\exp(in\pi x/L) = A.\exp(ip_n x/\hbar)$$

$$p_n = n\pi\hbar/L$$

Una función de onda física que se extiende al infinito entonces se puede representar como una serie de funciones impulsos como sigue:

$$\psi = \sum_0^\infty a_p.\exp(ipx/\hbar)$$

1] $$a_p = A\int_{x=-\infty}^{x=\infty}\psi(x).\exp(-ipx/\hbar)dx$$

Los coeficientes a_p del desarrollo en serie compleja determinan la probabilidad de que la partícula tenga el impulso dado (p) en la definición:

$$P = a_p \bullet a_p *$$

$a_p *$ es la conjugada compleja de a_p

En caso de que hayan valores complejos de los coeficientes, sino se toma simplemente

$$P = a_p{}^2$$

En donde los valores del impulso por extenderse al infinito ya forman un espectro continuo.

El significado del coeficiente k es simplemente el de coeficiente de normalización:

$$k^2\int_{-\infty}^{+\infty} a_p{}^2 dp = 1$$

Ejemplo:

Calcular la probabilidad de impulsos de una partícula en el estado fundamental del oscilador armónico cuántico.

La función de onda del estado fundamental del oscilador armónico cuántico, salvo el factor de normalización de la onda es:

$$\psi_0 = e^{-x^2/2A^2}$$

Siendo los valores clásicos de referencia, la energía del punto cero y la amplitud clásica (A) de ese estado

$$E_0 = k.A^2/2$$

Por tanto aplicando la expresión 1]

$$a_p = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2A^2}.\exp(-ipx/\hbar).dx$$

$$a_p = k\int_{-\infty}^{+\infty} \exp-(x^2/2A^2 + ipx/\hbar).dx$$

Haciendo la sustitución por la variable adimensional z:

$$z = \left(\frac{x}{A} + \frac{Aip}{\hbar}\right)$$

$$z^2 = x^2/A^2 + 2ipx/\hbar - p^2A^2/\hbar^2$$

$$dz = dx/A$$

$$\exp(-z^2/2) = \exp(-x^2/2A^2 - ipx/\hbar + p^2A^2/2\hbar^2)$$

$$\exp(-z^2/2) = [\exp-(x^2/2A^2 + ipx/\hbar)]\bullet\exp(p^2A^2/2\hbar^2)$$

$$\exp-(x^2/2A^2 + ipx/\hbar) = \exp(-p^2A^2/2\hbar^2).\exp(-z^2/2)$$

$$a_p = k\int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \exp-(p^2A^2/2\hbar^2).\exp(-z^2/2)dz/A$$

$$a_p = k\exp(-p^2A^2/2\hbar^2)\int_{z=-\infty}^{z=+\infty} \exp(-z^2/2)dz$$

$$a_p = \frac{k}{\sqrt{\pi}}\exp(-p^2A^2/2\hbar^2)$$

La probabilidad de impulso (p) de la partícula en el estado fundamental del oscilador armónico es

$$P = a_p . a_p *$$

$$P = \frac{1}{\pi} \exp(-p^2 A^2 / \hbar^2)$$

Ahora estamos en condiciones de volver a nuestro propósito de calcular la influencia de la velocidad en el momento angular de espín, la expresión relativista

$$L = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Debe ser adaptada para lo que podemos calcular directamente, que no es la velocidad sino el impulso que la partícula puede tener, de la relación entre velocidad e impulso en relatividad

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$v = \frac{cp}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$L = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$L = \frac{L_0 p}{mv}$$

$$L = \frac{L_0 p}{mcp} \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

2] $$L = \sqrt{1 + p^2 / m^2 c^2} L_0$$

Es la expresión 2] seria la forma efectiva de calcular la influencia de la velocidad en el espín del electrón, ya que podemos calcular el conjunto de valores que el impulso puede tener en una partícula.

Para el cálculo de la influencia del movimiento de un conjunto determinado de valores del impulso de la partícula simplemente se efectúa la suma integral

3] $$L = L_0 \int_{P=-\infty}^{P=\infty} \sqrt{1 + \frac{p^2}{m^2 c^2}} [a_p{}^2] dp$$

Que es la forma eficaz general de cálculo

Vamos a calcular la probabilidad de impulsos para el estado 2s del electrón en el átomo de hidrogeno. En este caso físicamente las ondas de impulsos son la composición de ondas divergentes y convergentes sobre el centro del átomo de la forma

$$\psi_p = \frac{A\exp(ipr/\hbar)}{r}$$

De manera que

$$\psi_p \psi_p{}^* = \frac{A^2}{r^2}$$

La densidad de probabilidad dada por dichas ondas corresponde a un flujo que disminuye su densidad en función del cuadrado de la distancia al centro

El cálculo de los coeficientes (ap) en este caso se hace por sustitución, simplemente considerando que si una función R(r) se representa mediante la expresión conocida:

$$R(r) = \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p \exp(ipr/\hbar)$$

En la cual los coeficientes (ap) se hallan mediante:

$$a_p = A\int_{x=-\infty}^{x=\infty} R(r).\exp(-ipr/\hbar)dx$$

Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad por el factor (1/r) queda en la forma:

$$\frac{R(r)}{r} = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a_p \exp(-ipr/\hbar)}{r}$$

Si se escribe en la forma que necesitamos:

$$\psi = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a_p \exp(-ipr/\hbar)}{r}$$

La relación

$$R(r) = r\psi(r)$$

Introduciéndola en la expresión conocida para el cálculo de los coeficientes

$$a_p = A\int_{x=-\infty}^{x=\infty} R(r).\exp(-ipr/\hbar)dx$$

Resulta la forma útil

$$a_p = A\int_{x=-\infty}^{x=\infty} r\psi.\exp(-ipr/\hbar)dx$$

De hallar los coeficientes

Entonces aplicando la formula a la función de onda 2s

$$a_p = A\int_{p=0}^{p=\infty} r(2 - r/a_0)\exp(-r/2a_0)\exp(-ipr/\hbar)dr$$

Siendo A en este caso el coeficiente de normalización de las amplitudes de las ondas de impulsos

$$a_p = A\int_{p=0}^{p=\infty} r(2 - r/a_0).[\exp-(1/2a_0 + ip/\hbar)r.]dr$$

Haciendo:

$$b = \frac{1}{2a_0} + \frac{ip}{\hbar}$$

$$a_p = A\int_{r=0}^{r=\infty} r(2 - r/a_0)e^{-br}dr$$

$$a_p = \frac{2A}{a_0 b^3}(1 - a_0 b)$$

$$a_p = \frac{2A}{a_0\left(\frac{1}{2a_0} + \frac{ip}{\hbar}\right)^3}\left[1 - a_0\left(\frac{1}{2a_0} + \frac{ip}{\hbar}\right)\right]$$

Resulta

$$a_p = \frac{2A}{\left(1 + \frac{2ipa_0}{\hbar}\right)^3}\left[1 - \frac{2ipa_0}{\hbar}\right]$$

Entonces la función de onda del estado 2s del hidrogeno como funciones de ondas de impulsos

$$\psi_{2s} = A\int_0^{p=2mc} \frac{\left(1 - \frac{2ipa_0}{\hbar}\right)}{\left(1 + \frac{2ipa_0}{\hbar}\right)^3}\frac{\exp(ipr/\hbar)}{r}dp$$

La probabilidad de un impulso (p), se halla multiplicando los coeficientes (ap) por sus conjugados complejos, que resultan de sustituir el número imaginario (i) por (-i) allí donde se encuentre

$$P(p) = a_p a^*_p = \frac{4A^2}{\left(1 + \frac{2ipa_0}{\hbar}\right)^3}\left[1 - \frac{2ipa_0}{\hbar}\right] \bullet \frac{(1 + 2ipa_0/\hbar)}{(1 - 2ipa_0/\hbar)^3}$$

De forma genérica la probabilidad de impulso es proporcional a:

$$a_p a^*{}_p = \frac{A^2}{\left(1+\frac{4p^2a_0{}^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

Normalizando:

$$\int_{p=0}^{p=\infty} \frac{A^2}{\left(1+\frac{4p^2a_0{}^2}{\hbar^2}\right)^2} dp = 1$$

Haciendo la equivalencia

$$b = \frac{2a_0}{\hbar}$$

Resulta

$$A^2 \frac{1}{2}\left(\frac{p}{b^2p^2+1} + \frac{\tan^{-1}(bp)}{b}\right)_{p=0}^{p=\infty} = 1$$

$$\frac{A^2}{2}\frac{\pi}{2b} = 1$$

Restituyendo el valor de (b)

$$A^2 = \frac{8a_0}{\pi\hbar}$$

Con lo cual podemos escribir la función de estado 2s como funciones de impulsos normalizadas

$$4]\quad \psi_{2s} = \sqrt{\frac{8a_0}{\pi\hbar}} \cdot \int_0^{p=\infty} \frac{\left(1-\frac{2ipa_0}{\hbar}\right)}{\left(1+\frac{2ipa_0}{\hbar}\right)} \frac{\exp(ipr/\hbar)}{r} dp$$

Y finalmente la función de probabilidad de impulso normalizada

$$a_p a^*{}_p = \frac{8a_0}{\pi\hbar} \frac{1}{\left(1+\frac{4p^2a_0{}^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

Que introducimos en la fórmula 3] para hallar la influencia del movimiento en el momento angular de espín del electrón:

$$L = L_0 \frac{8a_0}{\pi\hbar} \int_{P=-\infty}^{P=\infty} \sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} \frac{dp}{\left(1+\frac{4p^2a_0{}^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

Haciendo

$$b = \frac{2a_0}{\hbar} \quad ; \; k = \frac{1}{mc}$$

El resultado de la integral es:

$$L = L_0 \frac{8a_0}{\pi\hbar}\frac{1}{2}\left[\frac{p\sqrt{k^2p^2+1}}{b^2p^2+1} + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{p\sqrt{b^2-k^2}}{\sqrt{k^2p^2+1}}\right)}{\sqrt{b^2-k^2}}\right]_{p=0}^{p=\infty}$$

$$L = L_0 \frac{4a_0}{\pi\hbar}\left(\frac{k}{b^2} + \frac{\tan^{-1}\frac{pk\sqrt{b^2/k^2-1}}{\sqrt{k^2p^2+1}}}{\sqrt{b^2-k^2}}\right)_{p=0}^{p=\infty}$$

$$L = L_0 \frac{4a_0}{\pi\hbar}\left(\frac{k}{b^2} + \frac{\tan^{-1}(b/k)}{\sqrt{b^2-k^2}}\right)_{p=0}^{p=\infty}$$

El cociente

$$\frac{b}{k} = \frac{2a_0mc}{\hbar}$$

Recordando la relación:

$$\alpha = \hbar / ma_0c$$

Resulta:

$$\frac{b}{k} = \frac{2}{\alpha} >> 1$$

$$L = L_0 \frac{4a_0}{\pi\hbar}\left(\frac{k}{b^2} + \frac{\tan^{-1}(2/\alpha)}{b\sqrt{1-k^2/b^2}}\right)$$

$$L = L_0 \frac{4a_0}{\pi\hbar b}\left(\frac{k}{b} + \frac{\tan^{-1}(2/\alpha)}{\sqrt{1-\alpha^2/4}}\right)$$

Usando la serie convergente para cuando x tiende a infinito:

$$\frac{\tan^{-1}x}{\sqrt{1-1/x^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{\pi}{4x^2} + \ldots.$$

Siendo:

$$x = 2/\alpha$$

$$L = L_0 \frac{2}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi\alpha^2}{16} + ..\right)$$

$$L = L_0(1 + \alpha^2/8)$$

Este resultado muestra que la influencia del conjunto de impulsos del estado 2s en el momento de espín del electrón es del mismo orden de magnitud (el cuadrado de la constante de la estructura fina) que la influencia producida por el movimiento en el estado 2p. Un análisis más detallista sin embargo es posible aplicar, análisis que contempla dos factores:

1) En el capítulo anterior se vio que la masa del electrón ligado en el átomo no puede considerarse invariable, incluso es ineludible que la masa de los electrones en el estado ligado del positronio debe ser menor que sus masas en estado libre, esto conlleva una modificación del cálculo de la influencia de la velocidad en el momento angular considerando ahora que la masa del electrón no es invariable, es necesario establecer la velocidad en función de alguna magnitud constante del electrón en su movimiento en torno al núcleo

La energía total relativista del electrón se compone de su energía en reposo más su energía cinética, la energía cinética del electrón en el átomo se aporta por cantidades iguales tanto del campo eléctrico del electrón como del campo eléctrico del núcleo, esto se cumple si ambos campos son producto de cargas de igual magnitud (electrón -protón):

La energía total relativista del electrón en caso de la intervención del campo del núcleo:

$$E_T = mc^2 + E_C$$

Siendo la masa del electrón (m) variable en su movimiento en torno al núcleo

El valor máximo de la energía total del electrón en torno al núcleo es el doble de la energía en reposo del electrón, porque el núcleo y el electrón aportan un campo eléctrico de igual magnitud, Veremos la relación entre la velocidad y la masa del electrón en el núcleo para poder establecer la relación entre el impulso y la velocidad en este tipo de interacción electrón- núcleo

Si por acción de la interacción entre el campo del electrón y el núcleo se produce una variación de la masa del electrón que se convierte en energía cinética de la masa restante del electrón, esta variación de la masa será la mitad de la energía cinética total que adquiere el electrón, ya que como se señala el campo eléctrico del núcleo aporta la otra mitad de la energía cinética

$$\Delta m = \frac{E_C}{2c^2}$$

Sea m_0 la masa del electrón formalmente en reposo en el núcleo, (que no es la masa del electrón libre, porque el fotón que se emite al ligarse el electrón se lleva parte de dicha masa), y m la masa propia del electrón en movimiento torno al núcleo (variable por acción de la relación masa-energía), debe cumplirse:

$$m_0 - m = \frac{mc^2}{2c^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$$

$$m_0 = \left(\frac{m}{2\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \frac{m}{2}\right) + m$$

$$m_0 = \left(\frac{m}{2\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{m}{2}\right)$$

$$2m_0 = m\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + 1\right)$$

$$m = \frac{2m_0}{(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

De la relación entre el impulso y la velocidad en esta interacción:

5] $$p = \frac{2m_0 v}{(1 + \sqrt{1 - v^2/c^2})}$$

Despejando la velocidad:

$$p + p\sqrt{1 - v^2/c^2} = 2m_0 v$$

$$p^2 - p^2 v^2/c^2 = (2m_0 v - p)^2$$

$$p^2 - p^2 v^2/c^2 = (2m_0 v)^2 - 4m_0 vp + p^2$$

$$-p^2 v^2/c^2 = 4m_0{}^2 v^2 - 4m_0 vp$$

$$4m_0{}^2 v^2 + p^2 v^2/c^2 - 4m_0 vp = 0$$

$$v(4m_0{}^2 + p^2/c^2) = 4m_0 p$$

$$v = \frac{p/m_0}{(1 + p^2/4m_0{}^2 c^2)}$$

Introduciendo el valor hallado para la velocidad en la siguiente:

$$L = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Resulta:

$$6] \quad L = \frac{L_0}{\sqrt{1 - \dfrac{p^2}{m_0{}^2 c^2 (1 + p^2 / 4 m_0{}^2 c^2)^2}}}$$

Como puede verse, la influencia de la velocidad en la expresión 6] tiene una forma diferente a la expresión anterior 2] utilizada. Resulta que la expresión 5] es de importancia aquí

2) Intervalo de integración en la normalización de la función impulso: si el valor del impulso del electrón en el átomo tiene una cota superior, la cual está dada por la relación masa-energía, la energía del electrón se convierte íntegramente en energía cinética su impulso tiene un valor finito

$$mc^2 = p_{MAX} c$$

$$p_{MAX} = mc$$

Por tanto la expresión anterior 4] de la función de impulsos necesita una corrección relativista, ya que se obtuvo (se normalizo) suponiendo como límite superior un impulso infinito

Dada la interacción entre el campo eléctrico del núcleo y el campo eléctrico del electrón contribuyen por igual, el impulso máximo teóricamente alcanza el valor doble que el de un electrón aislado

$$p_{MAX} = 2mc$$

Por tanto la integral para normalizar la función impulso tiene los límites:

$$\int_{p=0}^{p=2mc} \frac{A^2}{\left(1 + \dfrac{4 p^2 a_0{}^2}{\hbar^2}\right)^2} dp = 1$$

$$A^2 . \frac{1}{2} \left(\frac{p}{b^2 p^2 + 1} + \frac{\tan^{-1}(bp)}{b} \right)_{p=0}^{p=2mc} = 1$$

$$\frac{A^2}{2} \left[\frac{2mc}{b^2 4 m^2 c^2 + 1} + \frac{1}{b} \tan^{-1}(2mcb) \right] = 1$$

$$\frac{A^2}{2} \left[\frac{2k}{4b^2 / k^2 + 1} + \frac{1}{b} \tan^{-1}(2b / k) \right] = 1$$

Recordando que: $\dfrac{b}{k} = \dfrac{2}{\alpha}$

$$A^2 \left[2k \frac{k^2}{4b^2 + k^2} + \frac{1}{b} \tan^{-1}(4 / \alpha) \right] = 2$$

Aplicando la serie convergente para grandes valores del argumento

$$\tan^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \ldots.$$

La expresión, salvando términos de orden superior de pequeñez puede escribirse:

$$A^2\left[2k\left(\frac{k^2}{4b^2}\right) + \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\right] = 2$$

$$A^2\left[k(\alpha^2/8) + \frac{1}{b}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{4}\right)\right] = 2$$

Como la constante de estructura fina es un número pequeño, se puede escribir salvando términos de orden superior

$$A^2 = \frac{4b}{(\pi - \alpha/2)}$$

$$A^2 = \frac{4b}{\pi\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)}$$

Se obtiene salvando términos de orden superior:

$$A^2 = \frac{4b}{\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

Y la función de probabilidad de impulsos normalizada según estas consideraciones relativistas tiene la forma:

$$a_p a^*{}_p = \frac{4b}{\pi}\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{1}{\left(1 + \frac{4p^2 a_0{}^2}{\hbar^2}\right)^2}$$

Es esta diferencia como veremos DETERMINANTE en el resultado obtenido para el valor del momento angular de espín electrónico del estado 2s del electrón en el átomo

Reemplazando 6] en la expresión anterior 3], y con el nuevo valor de la función de impulsos, la integral:

$$L = L_0 \int_{P=0}^{P=2mc} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m_0{}^2 c^2 (1 + p^2/4m_0{}^2 c^2)^2}}} [a_p{}^2] dp$$

Resulta:

$$7] \quad L = L_0 \frac{4b}{\pi}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_{P=0}^{P=2mc} \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{p^2}{m_0{}^2c^2(1+p^2/4m_0{}^2c^2)^2}}}\frac{dp}{(1+b^2p^2)^2}$$

La integral 7] no puede expresarse en forma de funciones estándar, pero es posible establecer un valor que 7] no exceda, por comparación con una expresión integrable aproximada que crece más rápidamente, por ejemplo

$$8] \, L \cong L_0 \frac{4b}{\pi}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\int_{P=0}^{P=2mc} \frac{1}{\sqrt{1-p^2/m_0{}^2c^2}}\frac{dp}{(1+b^2p^2)^2}$$

$$L \cong L_0 \frac{4b}{\pi}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{1}{2}\left[\frac{b^2p\sqrt{1-k^2p^2}}{(b^2+k^2)(b^2p^2+1)}+\frac{b^2+2k^2}{(b^2+k^2)^{3/2}}\tan^{-1}\frac{p\sqrt{b^2+k^2}}{\sqrt{1-k^2p^2}}\right]_{p=0}^{p=2mc}$$

Teniendo en cuenta que b>>k, se tiene, salvo términos de orden superior (orden del cuadrado de la constante de estructura fina) de pequeñez:

$$L = L_0 \frac{4b}{\pi}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2b}\right]$$

$$L = L_0\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

Ya que 8] crece más rápido que 7] y sus términos de pequeñez son del orden del cuadrado de la constante de estructura fina para arriba, entonces el resultado de 8] es válido dentro de esos límites de precisión para la integral 7]

Vemos como consideraciones relativistas respecto al límite superior de integración de la función de impulsos conduce a una influencia en el momento angular de espín en el estado 2s del orden de la inversa de la constante de estructura fina, correspondientemente debe influir sobre el momento magnético del espín del electrón

Esto indica que el electrón en el estado 2s debe tener un momento angular orbital (L) que compense el aumento del momento angular de espín (S) por la velocidad, a su vez la interacción entre dichos momentos angulares debe tener asociada una energía del tipo interacción spin-orbita.

De la relación entre el momento magnético del electrón con su momento angular de espín:

$$\mu_e = g\frac{e}{2m_e}L_S$$

De acuerdo a 6]

$$L_S = \frac{\hbar}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

Resulta:

$$\mu_e = g\frac{e}{2m_e}\frac{\hbar}{2}\left(1+\frac{\alpha}{2\pi}\right)$$

Puede asociarse de forma tal

$$\mu_e = g\frac{e}{2m_e}\hbar$$

Si se cumple

$$g = 2(1+\alpha/2\pi)$$

Resultado obtenido en 1948 por Julian Schwinger

Resulta llamativo que la perturbación del momento angular y magnético sea del orden de la constante de estructura fina, cuando por el valor de la velocidad del electrón en el átomo de hidrogeno debería ser del orden del cuadrado de dicha constante (aprox $1/137^2$), tal como sucede con el estado 2p, Para producir este efecto perturbativo la velocidad del electrón en el átomo debería ser del orden de $(1/137^{1/2})$, unas diez veces la velocidad real del electrón en el estado 2s del hidrogeno

Ya que el movimiento oscilatorio del electrón en el estado 2s le confiere un momento angular adicional, este debe compensarse con un momento angular orbital de igual magnitud y sentido contrario del electrón en torno al núcleo, es por eso que el estado 2s (y en general todos los estados del hidrogeno: 2s , 3s , 4s , etc) a diferencia del cálculo clásico, tiene un pequeño momento angular orbital del orden de $\Delta L = \hbar\alpha/\pi$, la interacción de dicho momento orbital con su momento angular de espín debe dar una interacción del tipo espín-orbita causante del efecto Lamb

Bibliografía:

- Landau - Lifhsitz: Curso de Física Teórica, Vol II

- Landau - Lifhsitz: Curso de Física Teórica, Teoría Cuántica Relativista