

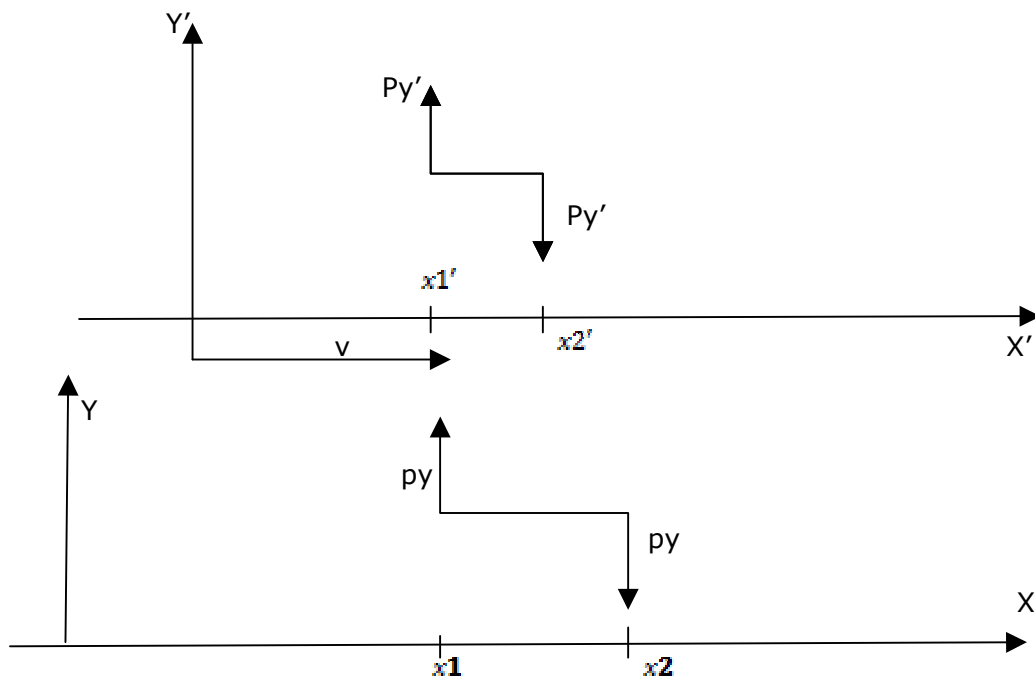
EL ACOPLAMIENTO DEL MOMENTO ANGULAR EN RELATIVIDAD

Rodolfo CARABIO

Influencia del espín de las partículas en su energía centrífuga en un campo central simétrico
En dinámica relativista se determina que las magnitudes físicas en sistemas de referencia inerciales con movimiento relativo entre si pueden tener relaciones diferentes a los predichos por la física clásica, en el caso particular del momento de impulso (momento angular) la relación depende de la orientación relativa del vector de momento angular y la dirección de movimiento del sistema de referencia considerado.

Es fácil ver que la magnitud del momento angular transversal no varía al cambiar de sistema de referencia, en efecto sabemos que el impulso y la longitud transversal son invariables ante cambios del sistema de referencia en movimiento relativo, por lo tanto el momento angular transversal no varía en este caso.

Para el momento angular longitudinal, es decir aquel caso en el cual el vector del momento angular es perpendicular a la dirección de avance del sistema de referencia en el cual se halla en reposo, la situación es diferente, para verlo según el gráfico que sigue:



De acuerdo a las transformaciones de Lorentz para la longitud:

$$x_1 = \frac{x_1' + vt' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$x_2 = \frac{x_2' + vt' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' + vt' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} - \frac{x_1' + vt' / c^2}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

$$x_2 - x_1 = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

El impulso transversal [py] permanece invariable medido en ambos sistemas de referencia

Resulta entonces:

$$1] \quad L = \frac{L'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$$

Otra forma de comprobarlo, es cuando se el rotador gira 90°:(o equivalentes), si la velocidad del sistema de referencia en movimiento es igual a la velocidad tangencial del rotador, la composición de velocidades resulta en una desigualdad para la magnitud del momento angular, en efecto si anotamos en el lado izquierdo el valor del momento angular del rotador en reposo y del lado derecho tal valor al estar en movimiento se tiene:

$$\frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq \frac{m \cdot 2v / (1 + v^2 / c^2)}{\sqrt{1 - \frac{4v^2}{(1 + v^2 / c^2)c^2}}}$$

$$\frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq \frac{m \cdot 2v / (1 + v^2 / c^2)}{\sqrt{\frac{c^2 + 2v^2 + v^4 / c^2 - 4v^2}{(1 + v^2 / c^2)^2 c^2}}}$$

$$\frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq \frac{m \cdot 2v / (1 + v^2 / c^2)}{\sqrt{\frac{c^2 - 2v^2 + v^4 / c^2}{(1 + v^2 / c^2)^2 c^2}}}$$

$$\frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq \frac{m \cdot 2v / (1 + v^2 / c^2)}{\sqrt{\frac{(1 - v^2 / c^2)^2}{(1 + v^2 / c^2)^2}}}$$

$$\frac{2mv}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \neq \frac{m \cdot 2v}{1 - v^2 / c^2}$$

Esta claro que al estar en movimiento la magnitud del momento angular se ha multiplicado por el factor $1/(1 - v^2/c^2)$.

Queda demostrada la expresión 1] como correcta. Se halla de esta forma un importante resultado: **La magnitud del momento angular longitudinal depende del sistema de referencia en el cual es medido**

A continuación se muestra como se acoplan energéticamente el momento angular orbital (L_{OR}), y el momento angular propio (L_S) de un rotador en relatividad para la situación física tratada de orientación de momentos angulares, esta claro que el momento angular total (L_T) permanece invariable si consideramos un sistema del tipo campo central simétrico, (por ejemplo el núcleo atómico).

De acuerdo a 1] podemos escribir

$$L_T = L_{OR} + \frac{L_S}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Consideramos que L_S puede tener signo (+) o menos (-) según sea el acoplamiento

$$L_T = \frac{mv_T \cdot r}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{L_S}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$L_T \sqrt{1 - v^2/c^2} = mv_T r + L_S$$

$$v_T = \frac{L_T \sqrt{1 - v^2/c^2} - L_S}{mr}$$

En este punto establecemos que el movimiento es puramente tangencial:

$$v_T = v$$

Resulta

$$L_T \sqrt{1 - v^2/c^2} = (mvr + L_S)$$

$$L_T^2 (1 - v^2/c^2) = (mvr + L_S)^2$$

$$L_T^2 (1 - v^2/c^2) = m^2 v^2 r^2 + 2mvr \cdot L_S + L_S^2$$

$$L_T^2 - L_T^2 (v^2/c^2) = m^2 v^2 r^2 + 2mvr \cdot L_S + L_S^2$$

$$L_T^2 - L_S^2 = m^2 v^2 r^2 + 2mvr \cdot L_S + L_T^2 (v^2/c^2)$$

$$(m^2 r^2 + L_T^2/c^2)v^2 + 2mrL_S \cdot v - (L_T^2 - L_S^2) = 0$$

La solución de la ecuación de 2º grado para la velocidad

$$v = \frac{-2mrL_S \pm \sqrt{4m^2r^2L_S^2 + 4(m^2r^2 + L_T^2/c^2)(L_T^2 - L_S^2)}}{2(m^2r^2 + L_T^2/c^2)}$$

$$v = \frac{-2mrL_S \pm \sqrt{4m^2r^2L_S^2 + 4m^2r^2(L_T^2 - L_S^2) + 4L_T^2(L_T^2 - L_S^2)/c^2}}{2(m^2r^2 + L_T^2/c^2)}$$

$$v = \frac{-2mrL_S \pm \sqrt{4m^2r^2L_T^2 + 4L_T^2(L_T^2 - L_S^2)/c^2}}{2(m^2r^2 + L_T^2/c^2)}$$

$$v = \frac{-mrL_S \pm (L_T/c)\sqrt{m^2c^2r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2c^2r^2 + L_T^2)}c^2$$

Si el momento angular intrínseco es contrario al momento angular orbital se toma el valor:

$$v = \frac{mrL_S + (L_T/c)\sqrt{m^2c^2r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2c^2r^2 + L_T^2)}c^2$$

Si el momento angular intrínseco tiene el mismo sentido que el momento angular orbital se escribe:

$$v = \frac{-mrL_S + (L_T/c)\sqrt{m^2c^2r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2c^2r^2 + L_T^2)}c^2$$

Es evidente que si el momento angular intrínseco es contrario al momento angular orbital la velocidad orbital deberá compensar aumentando su valor con respecto a la predicción clásica, a fin de mantener constante el momento angular total, lo inverso vale para el caso contrario de orientación relativa de momentos angulares.

Hallemos la expresión para la energía centrífuga como un pseudocampo, de la formula para la energía total relativista expresada con el valor hallado para la velocidad (v):

$$E_T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm mcrL_S + L_T\sqrt{m^2c^2r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2c^2r^2 + L_T^2)} \right]^2}}$$

La energía centrífuga E(cen)

$$E_{CEN} = E_r - E_\infty$$

$$E_\infty \rightarrow mc^2$$

$$2] E_{CEN} = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm mcrL_S + L_T \sqrt{m^2 c^2 r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2 c^2 r^2 + L_T^2)} \right]^2}} - 1 \right]$$

La expresión 2] es considerando la masa invariable. El análisis completo 3]:

$$3] E_T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm mcrL_S + L_T \sqrt{m^2 c^2 r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2 c^2 r^2 + L_T^2)} \right]^2}}$$

Indica que la forma directa de calcular lo que sucede es considerando la masa como función del radio, esto es ineludible, solo la energía total permanece invariable en el movimiento de un sistema aislado como ser el electrón en el átomo.

La ecuación 3] para el acoplamiento del momento angular intrínseco y el momento angular orbital para la energía, resulta en una ecuación general de sexto grado para (m^2) , no resoluble mediante métodos algebraicos.

La sustitución de variables:

$$m^2 c^2 = x^2 (L_T^2 - L_S^2)$$

$$mc^2 = cx \sqrt{L_T^2 - L_S^2}$$

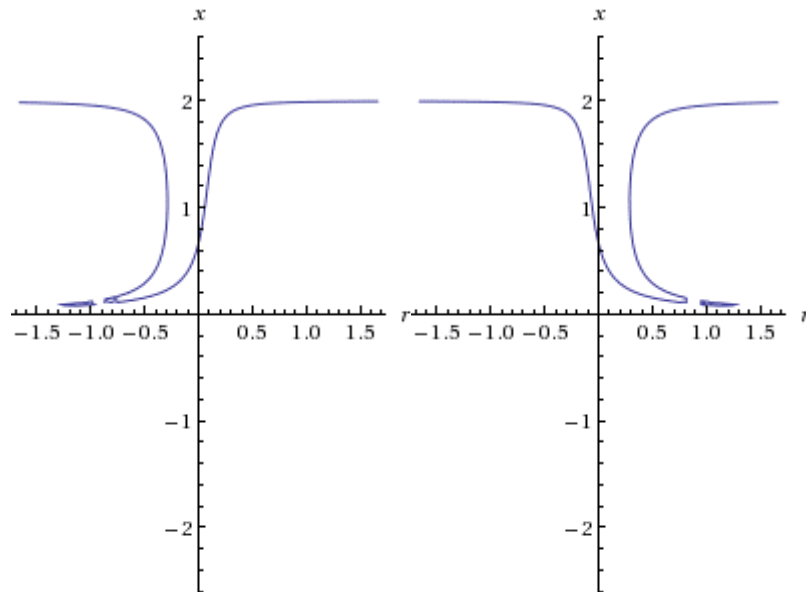
Resulta:

$$E_T = \frac{cx \sqrt{L_T^2 - L_S^2}}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm rxL_S + L_T \sqrt{r^2 x^2 + 1}}{[r^2 x^2 (L_T^2 - L_S^2) + L_T^2]} \sqrt{L_T^2 - L_S^2} \right]^2}}$$

$$\sqrt{1 - \left[\frac{\pm rxL_S + L_T \sqrt{r^2 x^2 + 1}}{r^2 x^2 (L_T^2 - L_S^2) + L_T^2} \right]^2} (L_T^2 - L_S^2) = \frac{c \sqrt{L_T^2 - L_S^2}}{E_T} x$$

Es una ecuación para (x) en función de (r) , de acuerdo al programa wólfram alfa, el grafico de dicha función muestra la variación de la masa según la distancia al centro de atracción. Recordando que asume este modelo solo la existencia de movimiento puramente tangencial

La función $x(r)$, según los valores paralelo y antiparalelo de acoplamiento entre momento angular orbital y de espín:



Se ve en el primer caso que la masa se reduce al acercarse la partícula al centro de atracción tal como puede preverse. En el segundo caso en el cual ambos momentos angulares son antiparalelos también hay a distancias relativamente grandes reducción de masa pero a cierta distancia la reducción es muy marcada y puede tomar tres valores diferentes, luego la masa aumenta al llegar al centro de atracción indicando una reducción de la velocidad tangencial.

Así entonces para estudiar de forma eficaz (aunque aproximada) el movimiento, volvemos a la ecuación simplificada [2] , cuando la masa orbitante se considera invariable, valida para casos de baja energía. Algunos valores característicos:

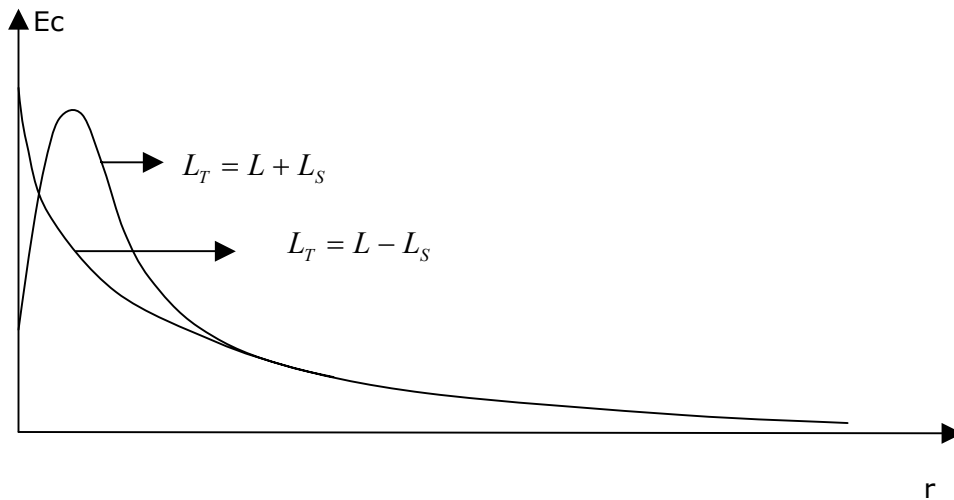
Si $r \rightarrow 0$

$$E_{CEN}(0) = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{L_T^2 - L_S^2}{L_T^2}}} - 1 \right]$$

$$r = L_T / mc \rightarrow E_{CEN} = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm L_S + \sqrt{2L_T^2 - L_S^2}}{2L_T} \right]^2}} - 1 \right]$$

$$r = L_S / mc \rightarrow E_{CEN} = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{-L_S^2 + L_T^2}{(L_S^2 + L_T^2)} \right]^2}} - 1 \right]$$

La representación grafica de la energía centrifuga según el signo del espín:



Es significativa la inflexión de la curva para cuando el momento intrínseco es del mismo sentido al momento orbital, esta claro que desde el punto de inflexión hasta el punto $r=0$, la fuerza centrifuga parece que se torna en atractiva ($\dot{\iota}$), mas exactamente se convierte en una especie de fuerza centrípeta, lo que sucede es que la velocidad tangencial debe decrecer al acercarse la partícula orbitante al centro de atracción y la fuerza centrifuga en ese caso se hace menos intensa

Para simplificar la notación haremos la sustitución.

$$x = mcr$$

$$a = L_S$$

$$b = L_T$$

$$B = L_T^2 - L_S^2$$

Queda la expresión para el campo de energía centrifuga en la forma:

$$E_{CEN} = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm ax + b\sqrt{x^2 + B}}{(x^2 + b^2)} \right]^2}} - 1 \right]$$

Para hallar el punto de inflexión de la energía mostrado en la grafica derivamos

$$\frac{dE_{CEN}}{dr} = mc^2 \left[- \frac{3}{2\sqrt{1 - \left[\frac{\pm ax + b\sqrt{x^2 + B}}{(x^2 + b^2)} \right]^2}} 2 \left(\frac{\pm ax + b\sqrt{x^2 + B}}{x^2 + b^2} \right) \right]$$

$$\cdot \left[\frac{(-2x)}{(x^2 + b^2)^2} [\pm ax + b\sqrt{x^2 + B}] + \frac{\pm a\sqrt{x^2 + B} + bx}{(x^2 + b^2)\sqrt{x^2 + B}} \right]$$

El valor de (x) que hace cero la derivada se obtiene si es nulo el término

$$\frac{(-2x)}{(x^2 + b^2)^2} [\pm ax + b\sqrt{x^2 + B}] + \frac{\pm a\sqrt{x^2 + B} + bx}{(x^2 + b^2)\sqrt{x^2 + B}}$$

Hay solución real para la forma:

$$\frac{(-2x)}{(x^2 + b^2)} [ax + b\sqrt{x^2 + B}] = -a - \frac{bx}{\sqrt{x^2 + B}}$$

Para concretar vamos a realizar el cálculo para el electrón en el campo del núcleo atómico. Los valores de las proyecciones del espín del electrón y su momento angular, para el estado $l=1$

$$S = \hbar / 2$$

$$L_T = 3\hbar / 2$$

$$\frac{2x}{(x^2 + 9\hbar^2 / 4)} [(1/2)x + \sqrt{x^2 + (9/4 - 1/4)\hbar^2}] = \frac{1}{2} + \frac{(3/2)x}{\sqrt{x^2 + (9/4 - 1/4)\hbar^2}}$$

$$\frac{2x}{(x^2 + 9\hbar^2 / 4)^2} [(x/2) + \sqrt{x^2 + 2\hbar^2}] = \frac{1}{2} + \frac{(3/2)x}{\sqrt{x^2 + 2\hbar^2}}$$

Haciendo una sustitución adicional:

$$x = \hbar y$$

$$\frac{2y}{(y^2 + 9/4)} [(x/2) + \sqrt{x^2 + 2}] = \frac{1}{2} + \frac{(3/2)y}{\sqrt{y^2 + 2}}$$

La solución indica un valor del orden de la longitud de onda Compton del electrón

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7\sqrt{19}}{5} - \frac{11}{5}}$$

$$\frac{x}{\hbar} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{7\sqrt{19}}{5} - \frac{11}{5}}$$

$$\frac{x}{\hbar} \cong 0,987732$$

Posición de inflexión de la curva de energía centrífuga resulta en la posición radial:

$$r_{MAX} \cong 0,987732 \hbar / mc$$

— ACOPLAMIENTO ESPIN ORBITA

Se demuestra a continuación que el acoplamiento energético del momento angular en relatividad influye en el espectro de emisión de los átomos, es decir es el efecto denominado "interacción spin orbita"

Vamos a hallar la expresión aproximada para el pseudocampo definido por la expresión [2]:

$$E_{CEN} = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm mcrL_S + L_T \sqrt{m^2 c^2 r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2 c^2 r^2 + L_T^2)} \right]^2}} - 1 \right]$$

Para simplificar la notación establecemos la igualdad:

$$x = \frac{\pm L_S + L_T \sqrt{1 + (L_T^2 - L_S^2) / m^2 c^2 r^2}}{mcr(1 + L_T^2 / m^2 c^2 r^2)}$$

Si tenemos que:

$$L_T, L_S \ll mcr$$

$$E_{CEN} = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 1 \right]$$

$$E_{CEN} = mc^2 \left[\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots \right) - 1 \right]$$

$$E_{CEN} = mc^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \dots \right)$$

$$x \cong \frac{1}{mcr} \left(\pm L_S + L_T + \frac{L_T(L_T^2 - L_S^2)}{2m^2c^2r^2} \right) \left(1 - \frac{L_T^2}{m^2c^2r^2} \right)$$

$$x^2 \cong \frac{1}{m^2c^2r^2} \left((\pm L_S + L_T)^2 + \frac{L_T(L_T \pm L_S)(L_T^2 - L_S^2)}{m^2c^2r^2} \right) \left(1 - \frac{2L_T^2}{m^2c^2r^2} \right)$$

$$x^2 \cong \frac{1}{m^2c^2r^2} \left[(L_T \pm L_S)^2 + \frac{L_T(L_T \pm L_S)(L_T^2 - L_S^2)}{m^2c^2r^2} - \frac{2L_T^2(L_T \pm L_S)^2}{m^2c^2r^2} \right]$$

$$x^2 \cong \frac{1}{m^2c^2r^2} \left[(L_T \pm L_S)^2 + \frac{L_T[(L_T \pm L_S)(L_T^2 - L_S^2) - 2L_T(L_T \pm L_S)^2]}{m^2c^2r^2} \right]$$

Resulta

$$E_{CEN} \cong \frac{1}{2mr^2} \left[(L_T \pm L_S)^2 + \frac{L_T(L_T \pm L_S)[(L_T^2 - L_S^2) - 2L_T(L_T \pm L_S)]}{m^2c^2r^2} \right]$$

Según el acoplamiento de momentos resulta: el caso en que el espín y el momento angular lineal tienen sentido contrario se toma el signo (-) de acuerdo a lo ya establecido en el cálculo de la velocidad tangencial, entonces:

$$E_{CEN} \cong \frac{1}{2mr^2} \left[(L_T + L_S)^2 + \frac{L_T(L_T + L_S)[(L_T + L_S)(L_T - L_S) - 2L_T(L_T + L_S)]}{m^2c^2r^2} \right]$$

$$E_{CEN} \cong \frac{1}{2mr^2} \left[(L_T + L_S)^2 + \frac{L_T(L_T + L_S)^2[(L_T - L_S) - 2L_T]}{m^2c^2r^2} \right]$$

Resulta:

$$E_{CEN} \cong \frac{(L_T + L_S)^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{L_T(L_T + L_S)}{m^2c^2r^2} \right]$$

Como en este caso

$$L_T = L - L_S \rightarrow L_T + L_S = L$$

$$E_{CEN} \cong \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{L_T L}{m^2c^2r^2} \right]$$

$$E_{CEN} \cong \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{(L - L_S)L}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

O bien el caso en el cual el espín y el momento angular lineal tienen el mismo sentido:

$$E_{CEN} \cong \frac{1}{2mr^2} \left[(L_T - L_S)^2 + \frac{L_T(L_T - L_S)[(L_T + L_S)(L_T - L_S) - 2L_T(L_T - L_S)]}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

$$E_{CEN} \cong \frac{1}{2mr^2} \left[(L_T - L_S)^2 + \frac{L_T(L_T - L_S)^2[(L_T + L_S) - 2L_T]}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

$$E_{CEN} \cong \frac{(L_T - L_S)^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{L_T(L_T - L_S)}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

Y en este caso

$$L_T = L + L_S \rightarrow L_T - L_S = L$$

$$E_{CEN} \cong \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{L_T L}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

$$E_{CEN} \cong \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{(L + L_S)L}{m^2 c^2 r^2} \right]$$

Podemos comparar con los valores clásicos

$$E_{CEN} = \frac{L^2}{2mr^2}$$

$$F_{CEN} = \frac{d}{dr} \left(\frac{L^2}{2mr^2} \right)$$

$$F_{CEN} = \frac{L^2}{mr^3}$$

En el modelo atómico de Borh se establece que la fuerza de atracción entre el núcleo atómico es igual en magnitud y sentido opuesto a la fuerza centrífuga en la forma:

$$\frac{\beta}{r_0^2} = \frac{L^2}{mr_0^3}$$

$$\beta = \frac{L^2}{mr_0} \rightarrow r_0 = \frac{L^2}{m\beta}$$

La energía del electrón en el átomo de Borh es la suma de la energía potencial y la energía cinética del electrón en una orbita circular definida de radio (r^0)

$$E = -\frac{\beta}{r_0} + \frac{L^2}{2mr_0^2}$$

$$E = -\frac{\beta}{(L^2/m\beta)} + \frac{L^2}{2m(L^2/m\beta)^2}$$

$$E = -\frac{m\beta^2}{2L^2}$$

De la regla de cuantización se obtiene la expresión para los niveles de energía en el átomo de hidrogeno

$$E_n = -\frac{m\beta^2}{2n^2\hbar^2}$$

Para aplicar el cálculo relativista en hallar los niveles de energía en el átomo de hidrogeno: Despejando el valor de (r) en la ecuación:

$$\frac{\beta}{r^2} = mc^2 \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm mcrL_S + L_T \sqrt{m^2c^2r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2c^2r^2 + L_T^2)} \right]^2}} - 1 \right]$$

E introduciendo su valor en la siguiente expresión:

$$E = -\frac{\beta}{r} + mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - \left[\frac{\pm mcrL_S + L_T \sqrt{m^2c^2r^2 + (L_T^2 - L_S^2)}}{(m^2c^2r^2 + L_T^2)} \right]^2}} - 1 \right]$$

Se hallaría la expresión para los niveles de energía análogos a los de la teoría de Borh pero en forma relativista, lo cual es analíticamente muy complicado, para hacerlo de forma aproximada utilizamos el resultado anterior desarrollado en serie de potencias:

$$E_{CEN} \cong \frac{L^2}{2mr^2} \left[1 - \frac{(L \pm L_S)L}{m^2c^2r^2} \right]$$

Haciendo la siguiente igualdad a fin de simplificar la notación:

$$k = -\frac{L^2}{2m} \left[\frac{(L \pm L_S)L}{m^2c^2} \right]$$

$$E_{CEN} \cong \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^4}$$

$$F_C \cong \frac{L^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5}$$

La fuerza de atracción entre el núcleo y el electrón debe ser igual a la fuerza centrífuga sobre el electrón en su orbita

$$\frac{\beta}{r^2} \cong \frac{L^2}{mr^3} + \frac{4k}{r^5}$$

$$\beta \cong \frac{L^2}{mr} + \frac{4k}{r^3}$$

Haciendo que $b=L^2/m$

$$\beta r^3 \cong br^2 + 4k$$

Procediendo a resolver la ecuación de tercer grado (teniendo en cuenta que el valor de k es muy pequeño) con una aproximación del tipo:

$$r \cong b/\beta$$

$$r = (b/\beta) + a$$

$$a \ll 1$$

$$\beta[(b^3/\beta^3) + 3(b/\beta)^2 a] = b[(b^2/\beta^2) + 2(b/\beta)a] + 4k$$

$$3b^2 a/\beta = -(b^3/\beta^2) + (b^3/\beta^2) + 2(b^2 a/\beta) + 4k$$

$$(b^2/\beta)a = 4k$$

$$a = 4k\beta/b^2$$

$$r = (b/\beta) + 4(k\beta/b^2)$$

De acuerdo al valor de (b) en el modelo atómico de Borh

$$b = L^2/m$$

El valor de la energía con la primera corrección relativista de momento angular intrínseco es:

$$E = -\frac{\beta}{r} + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{k}{r^4}$$

$$E = -\frac{\beta}{(b/\beta) + 4k\beta/b^2} + \frac{L^2}{2m[(b/\beta) + 4k\beta/b^2]^2} + \frac{k}{[(b/\beta) + 4k\beta/b^2]^4}$$

$$E = -\frac{\beta}{(b/\beta)[1 + 4k\beta^2/b^3]} + \frac{L^2}{2m(b/\beta)^2[1 + 4k\beta^2/b^3]^2} + \frac{k}{(b/\beta)^4[1 + 4k\beta^2/b^3]^4}$$

$$E \cong -\frac{\beta}{(b/\beta)} \left(1 - \frac{4k\beta^2}{b^3}\right) + \frac{L^2}{2m(b/\beta)^2} \left(1 - \frac{8k\beta^2}{b^3}\right) + \frac{k}{(b/\beta)^4 [1 + 4k\beta^2/b^3]^4}$$

$$E \cong -\frac{\beta^2}{b} \left(1 - \frac{4k\beta^2}{b^3}\right) + \frac{\beta^2 L^2}{2mb^2} \left(1 - \frac{8k\beta^2}{b^3}\right) + \frac{k\beta^4}{b^4 [1 + 4k\beta^2/b^3]^4}$$

$$E \cong -\frac{m\beta^2}{L^2} + \frac{m\beta^2}{2L^2} + \frac{km^4 \beta^4}{L^8 [1 + 4k\beta^2/b^3]^4}$$

Recordando el valor de k

$$k = -\frac{L^2}{2m} \left[\frac{(L \pm L_s)L}{m^2 c^2} \right]$$

$$E \cong -\frac{m\beta^2}{2L^2} - \frac{L^3}{2m} \frac{(L \pm L_s)}{m^2 c^2} \frac{m^4 \beta^4}{L^8}$$

$$E \cong -\frac{m\beta^2}{2L^2} - \frac{(L \pm L_s)}{2c^2} \frac{m\beta^4}{L^5}$$

La expresión con el orden de magnitud de la perturbación relativista

$$E \cong -\frac{m\beta^2}{2L^2} \left(1 + \frac{\beta^2 L_T}{c^2 L^3}\right)$$

Aplicando la regla de cuantización del momento angular: en el modelo de Borh tenemos que el espín puede estar en sentido paralelo o antiparalelo al momento angular orbital dando un momento angular total L_t

$$L_T = (n \pm 1/2)h$$

$$n = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$E \cong -\frac{m\beta^2}{2n^2 \hbar^2} \left(1 + \frac{\beta^2}{c^2 \hbar^2} \frac{(n \pm 1/2)}{n^3}\right)$$

La constante de estructura fina

$$\alpha = \beta / c\hbar$$

$$E_n \cong -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{(n \pm 1/2)}{n^3} \alpha^2\right)$$

Hasta este punto se considera que la masa del electrón es invariable, sin embargo es evidente que la emisión del fotón se lleva parte de la masa-energía del sistema ligado protón- electrón,

(átomo), la cual necesariamente debe sustraerse en cierta proporción de la masa de ambas partículas (para el caso del positronio el fotón emitido se lleva por igual la masa-energía del campo eléctrico del electrón y el positrón). Tenemos que la energía que el fotón sustrae se compensa por el aporte de la masa de campo electromagnético tanto del protón como del electrón, por esta causa la masa orbitante (electrón ligado) debe ser menor a la masa en reposo del electrón aislado en la cantidad

$$\Delta m_1 = -E_n / 2c^2$$

Además tenemos que el electrón ligado al átomo en su movimiento circular tiene una energía cinética, la cual a su vez debe provenir también de la masa de campo tanto del electrón como del protón, (ya que consiste en una interacción exclusiva entre el electrón y el protón, ambos con campos eléctricos de igual magnitud)

En el modelo de Borh se ve fácilmente que la energía cinética del electrón en torno al núcleo es igual a la energía del fotón emitido, por tanto:

$$\Delta m_2 = -E_n / 2c^2$$

Resulta:

$$m = m_e - E_n / c^2$$

Los niveles de energía:

$$E_f \cong -\frac{mc^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{(n \pm 1/2)}{n^3} \alpha^2 \right)$$

$$E_n \cong -\frac{(m_e + E_n / c^2)c^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{(n \pm 1/2)}{n^3} \alpha^2 \right)$$

$$E_n(1 + \alpha^2 / 2n^2) \cong -\frac{m_e c^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{(n \pm 1/2)}{n^3} \alpha^2 \right)$$

$$E_n \cong -\frac{m_e c^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{(n \pm 1/2)}{n^3} \alpha^2 \right) (1 - \alpha^2 / 2n^2)$$

$$E_n \cong -\frac{m_e c^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{(n \pm 1/2)}{n^3} \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2n^2} \right)$$

Los niveles de energía del átomo:

$$E_n \cong -\frac{m_e c^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{2n^2} \pm \frac{\alpha^2}{2n^3} \right)$$

Finalmente tengamos en cuenta que el fotón emitido NO se lleva la totalidad de la energía disponible entre los niveles de energía, sino que la comparte con la energía que se lleva el retroceso del electrón al emitir este el fotón, entonces resulta:

$$\Delta E = p^2 / 2m$$

$$E_f = pc$$

$$\Delta E = E_f^2 / 2mc^2$$

$$\Delta E \cong E_n^2 / 2mc^2$$

La energía que el fotón se lleva es entonces:

$$E_n \cong -\frac{m_e c^2}{2n^2} \alpha^2 \left(1 + \frac{\alpha^2}{4n^2} \pm \frac{\alpha^2}{2n^3} \right)$$

La diferencia de energía dentro de una misma orbita según la orientación del espín:

$$\Delta E \cong E_n \frac{\alpha^2}{n^3}$$

De acuerdo al resultado se aprecia que el acoplamiento relativista del momento angular orbital y el momento angular de espín en el átomo de hidrogeno es lo que se conoce como "interacción spin orbita", y es matemáticamente coincidente con la razón giromagnetica medida de forma experimental del electron: $g_s = 2$

Espín en el efecto Zeeman: El comportamiento del espín electrónico en un campo magnético externo al átomo como causa de la variación de sus niveles energía, en los cuales dicho espín del electrón actúa con un momento magnético en el cual $g=2$, se explica simplemente tomando la acción del campo magnético como la acción una fuerza centrípeta o centrifuga actuando sobre la orbita del electrón (similar a la acción del núcleo atómico sobre el electrón), por tanto se aplica y es valido el razonamiento anterior para el comportamiento del acoplamiento espín orbita en un campo magnético externo

En la literatura se explica la interacción spin-orbita de un modo formal, aquí vimos el cálculo basado en una interpretación dinámica rigurosa, y es analíticamente mas complicado

En efecto, aun cuando usamos un modelo semiclásico para el calculo de los niveles energéticos, lo cual conlleva cierta falta de rigurosidad en la teoría utilizada, sin embargo el principio de los valores medios y el principio de correspondencia de Borh, que establece que a grandes números cuánticos los resultados clásicos se aproximan a los resultados clásicos, nos permite mantener la validez de los resultados obtenidos, los cuales nos serán de suma importancia al compararlos con los obtenidos por otros métodos tal como sigue:

EL MOMENTO MAGNETICO DE ESPIN EN LA EXPLICACION TRADICIONAL

El calculo de la energía debido a la interacción spin-orbita, considerando el electrón como un imán con cierta cantidad intrínseca de momento angular y su momento magnético asociado, toma como sistema de referencia el propio electrón en el cual el protón lo rodea a la velocidad que el electrón tiene en su orbita, en tal situación física el momento magnético del espín electrónico esta inmerso en el campo magnético de la corriente que el protón produce. Prescindiendo de la validez o no de dicha asunción, la magnitud de la energía debida al espín en el caso que este se alinea paralelo a las líneas de campo se calcula mediante la expresión:

$$\Delta E = \mu_e B$$

Siendo B la inducción magnética producida por la corriente que representa el protón circulando al electrón, (μ_e) es el momento magnético del electrón. (Aquí se ignora que estamos en un sistema de referencia no inercial tratándolo como si lo fuera)

El campo magnético H producido por una corriente de intensidad I como si el átomo fuese una espira circular de radio correspondiente a los radios de las orbitas del modelo de Borh:

$$H_n = \frac{I}{2r_n}$$

La inducción magnética (B)

$$B_n = \mu_0 H_n$$

Siendo r(n) el radio de Borh para las diferentes (n) orbitas. Para el caso de una partícula puntual en circulación la corriente se define de la siguiente manera, sea la densidad lineal de carga eléctrica

$$dq / dl$$

La corriente eléctrica se define en la forma

$$I = dq / dt$$

$$I = \frac{(dq / dl)dl}{dt}$$

$$v = dl / dt$$

Resulta

$$I = v.(dq / dl)$$

La densidad lineal de carga es el cociente entre la carga del electrón (e) y la circunferencia de la orbita

$$dq/dl = \frac{e}{2\pi r_n}$$

Introduciendo este valor en la expresión anterior:

$$I = dq/dt$$

$$I = v \frac{e}{2\pi r_n}$$

$$H_n = \frac{ev}{4\pi r_n^2}$$

$$\Delta E_n \cong \mu_e \mu_0 \frac{ev}{4\pi r_n^2}$$

De aquí en adelante calculamos los valores de la velocidad del electrón en su orbita siguiendo el modelo de Borh

$$mvr = n\hbar$$

$$v = \frac{n\hbar}{mr}$$

El valor de la fuerza centrifuga se equilibra con la fuerza de atracción entre protón y electrón en virtud de atracción entre cargas eléctricas opuestas

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{\beta}{r^2}$$

$$\frac{mn^2\hbar^2}{m^2r^2} = \frac{\beta}{r}$$

$$r_n = \frac{n^2\hbar^2}{m\beta}$$

La velocidad:

$$v = \frac{n\hbar}{m} \frac{m\beta}{n^2\hbar^2}$$

$$v = \frac{\beta}{n\hbar}$$

Introduciendo los valores hallados para (r) y (v) resulta:

$$\Delta E_n \cong \mu_B \mu \frac{e(\beta / n\hbar)}{4\pi(n^2\hbar^2 / m\beta)^2}$$

$$\Delta E_n \cong \mu_B \mu \frac{m^2 \beta^3 e}{4\pi n^5 \hbar^5}$$

El valor del momento magnético del electrón (μ_e) de acuerdo a la relación clásica entre momento magnético y momento de impulso, y teniendo en cuenta el factor giromagnético de espín (gs)

$$\mu_e = g_s \frac{e}{2m_e} (\hbar / 2)$$

El valor de la permeabilidad magnética μ se obtiene de la conocida relación: $c^2 = 1/\mu^0 \epsilon^0$

$$\Delta E_n \cong g_s \frac{e(\hbar / 2)}{2m} \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \frac{m^2 \beta^3 e}{4\pi n^5 \hbar^5}$$

$$\Delta E_n \cong g_s \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0} \frac{\hbar}{2} \frac{m\beta^3}{2c^2 n^5 \hbar^5}$$

$$\beta = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0}$$

$$\Delta E_n \cong g_s \beta \frac{\hbar}{2} \frac{m\beta^3}{2c^2 n^5 \hbar^5}$$

$$\Delta E_n \cong \frac{g_s}{2} \frac{m\beta^4}{2c^2 n^5 \hbar^4}$$

$$\Delta E_n \cong \frac{g_s}{2} \frac{m\beta^2}{2n^5 \hbar^2} \frac{\beta^2}{c^2 \hbar^2}$$

$$\Delta E_n \cong \frac{g_s}{2} \frac{m\beta^2}{2n^2 \hbar^2} \frac{\alpha^2}{n^3}$$

El factor de la "precesión de Thomas", (para hallar el resultado en el sistema de referencia en reposo, recordemos que esta ultima expresión se obtiene en el marco del sistema de referencia no inercial del propio electrón), divide a la mitad el resultado quedando en la expresión definitiva

$$\Delta E_n \cong \frac{g_s}{2} \frac{m\beta^2}{4n^2 \hbar^2} \frac{\alpha^2}{n^3}$$

$$\Delta E_n \cong \frac{g_s}{2} E_n \frac{\alpha^2}{2n^3}$$

La diferencia de energía dentro de una misma orbita según la orientación del espín calculada por este método:

$$\Delta E_2 - \Delta E_1 \cong \frac{g_s}{2} E_n \frac{\alpha^2}{n^3}$$

Coincide con el resultado experimental solo si el cociente giromagnético es: $g_s=2$. Resultando además en concordancia con la expresión hallada anteriormente para el acoplamiento relativista del momento angular de espín con el momento angular orbital

El cálculo mas detallado de la interacción spin orbita (*), da una diferencia entre subniveles de energía con electrones de espines con sentido opuesto

$$\Delta E_{(s;o)} = E_n \frac{\alpha^2}{nl(l+1)}$$

En el modelo de Borh, el principio de correspondencia se aplica cuando

$$l \rightarrow n$$

Resulta

$$\Delta E_{(s;o)} \cong E_n \frac{\alpha^2}{n^3}$$

Lo que esta completamente de acuerdo con el resultado obtenido anteriormente

Se ha demostrado usando un enfoque físico totalmente legítimo, que por efecto relativista del acoplamiento de momento angular orbital y de espín, la razón giromagnética de espín de los fermiones elementales debe ser 2 con alto grado de aproximación

COHESION INTERNA DE LOS HADRONES

En 1987 experimentos llevados a cabo en el acelerador RHIC mostraron que el momento angular de espín de los protones no podía explicarse como la suma de los momentos angulares de espín de sus constituyentes fundamentales (quarks), la investigación posterior asimismo mostro que e valor del espín del protón no podía explicarse mediante el aporte de la polarización de los gluones o la "nube" de partículas virtuales quarks-antiquarks

Existe la posibilidad de que el espín del protón se deba a la presencia de momento angular orbital de sus quarks constituyentes , y no solo eso sino que también la cohesión interna de los protones se deba a la interacción - acoplamiento del momento angular y de espín de los quarks

Ya se mostro aquí que la situación física en la cual el momento angular intrínseco (de espín) esta en el mismo sentido a la orientación del momento angular orbital, da a pequeñas distancias, del orden de la longitud de onda Compton de la partícula considerada, una fuerza neta de atracción. El radio de acción de esta característica atractiva del acoplamiento espín - orbita cae dentro del marco de las dimensiones del proton y el neutron, en efecto la longitud de

onda de Compton de estas partículas es del orden de los 10^{-15} m, tal fuerza puede ser la actuante en general de la cohesión de cualesquiera sistema de partículas elementales

(*)http://www.diss.fu-berlin.de/diss/servlets/MCRFileNodeServlet/FUDISS_derivate_00000003802/10_chapter8.pdf?hosts=