LA REFUTACIÓN COMO DEMOSTRACION

Una estrategia didáctica que permite potenciar la refutación a través del proceso de enseñanza de la Matemática

Marlen de la C. ÁLVAREZ LABRADOR

Antonio MAZÓN ÁVILA

Introducción

En el trabajo se define la refutación como una demostración por contraejemplo, utilizada con frecuencia en las carreras de ingeniería y fundamentada en el objeto de estudio de la Lógica formal, así como su aplicación en diferentes problemas contribuye a situar a los estudiantes en términos de elegir entre posiciones contradictorias, es decir, buscar contraejemplos que debilite una proposición, ello favorece el movimiento del pensamiento, además contribuye al adiestramiento de los estudiantes en la resolución de tareas directa e inversa, cuestión esta importante para la formación del conocimiento completo de un concepto. Esto último conlleva a que los estudiantes se apropien del procedimiento lógico que proporciona una condición necesaria y suficiente para un concepto el cual tiene un gran valor práctico para su vida profesional

Desarrollo

1 Fundamentos matemáticos, lógicos formales, dialécticos y pedagógicos en que se sustenta la estrategia didáctica

Entre todas las ciencias la Matemática ocupa un lugar especial. Ella se define como una ciencia sobre las formas espaciales y relaciones cuantitativas del mundo real.
El desarrollo de las Matemáticas, no es un proceso armonioso de desarrollo continuo y gradual de las verdades Matemáticas, en realidad transcurre en una lucha encarnizada de lo nuevo contra lo viejo.

En el transcurso del desarrollo de las Matemáticas, se consideran cada vez objetos más abstractos, incluidos en la clase de las relaciones cuantitativas y formas espaciales. En las teorías Matemáticas modernas, estas formas y relaciones frecuentemente se presentan de manera refinada y abstracta.

Lo abstracto del objeto de la Matemática en ocasiones se percibe como elemento inicial e independiente de su contenido y constituye la propia esencia de las Matemáticas.
En la época actual vemos como la Matemática penetra cada vez más rápido en casi todos los dominios sociales.

La mayoría de la carreras requieren en mayor o menor medida de una formación Matemática, de ahí que el perfeccionamiento de su enseñanza cobre singular importancia.

Hasta el siglo XVII la Matemática se limitaba al estudio de las magnitudes constantes y las dependencias fijas entre ellas. Cuando las demandas de la Astronomía y de la Mecánica plantearon el problema del reflejo matemático de procesos y del movimiento, comenzó a investigar las magnitudes variables.

La magnitud variable de Descartes señala Engels con relación a lo afirmado constituyó un punto de viraje en la Matemática, gracias a ésta, el movimiento se introdujo en la Matemática y con él la Dialéctica y gracias a ésta también resultó, inmediatamente necesario el cálculo Diferencial e Integral.

Es importante destacar que el pensamiento matemático transcurre de lo concreto a lo abstracto y en una cualidad mayor se eleva de lo abstracto a lo concreto y que la enseñanza de la Matemática debe contribuir a que el estudiante se desarrolle con una visión del mundo que le favorezca la formación del pensamiento productivo, creador y científico. El propio contenido de la Matemática como disciplina de estudio, los principios de su estructuración, la metodología de introducción de nuevos conceptos, teoremas y procedimientos son elementos que pueden y deben influir positivamente en este sentido. Sin embargo, el carácter material y el movimiento de la matemática, muy a menudo queda oculto para los estudiantes, los temas tratados en clases usualmente les parecen muy abstractos.

Hay que hacer ver a los estudiantes, que la Matemática refleje cualidades del mundo exterior de manera específica, muy propio. Si por ejemplo la Física, la Química y la Biología estudian formas del movimiento de la materia en las que manifiesta la particularidad cualitativa del mundo objetivo, la matemática como habíamos planteado trata de relaciones cuantitativas inherentes de igual modo a toda forma de movimiento de la materia. La fuente del movimiento en la Matemática lo constituye la contradicción.

En el artículo *La huella de la Matemática en el pensamiento" de la Dra. Hernández, Herminia, 1993, Cuba*, establece que el pensamiento es posible moverlo al revelar
La unidad de la absoluto y lo relativo, la verdad está condicionada por su contenido. El considerar el carácter absoluto y relativo de un concepto, es significar su movimiento. En este caso, el carácter opuesto de los términos absoluto y relativo, permite reconocer que el movimiento tiene una naturaleza contradictoria. El revelar la contradicción propicia el movimiento del pensamiento.

Cualquier objeto, no es más que un momento de un sistema integral. La comunidad de propiedades, el nexo genético, se expresan en lo general. El tener en cuenta la relación entre lo particular y general es otra forma de mover el pensamiento.

El hecho histórico acompañado del análisis de las insuficiencias y las limitaciones de un concepto matemático en un determinado momento y su reemplazo por otro, que satisfaga esas limitaciones, es uno de los aspectos que contribuye a hacer dinámico el pensamiento.

La idea y la refutación (poner al estudiante en condiciones de buscar un contraejemplo que debilite una proposición, inducirlo a la búsqueda de una demostración que ratifique el valor de verdad de una proposición son elementos que favorecen la dinámica del pensamiento).

Exactitud de la fundamentación o formulación (el carácter científico de la enseñanza exige exactitud al expresar y fundamentar relaciones matemáticas). La palabra es la expresión verbal externa del contenido en el pensamiento. De ahí que una palabra inexacta es el reflejo de un pensamiento inexacto. La corrección oportuna no sólo del profesor al estudiante, sino de un educando a otro entrena a éstos en lo que respecta a la fundamentación o formulación, es otra forma de mover el pensamiento toda vez que se revelan las contradicciones a que conduce la inexactitud.

Los aspectos a que hemos hecho referencia son necesarios: Si bien no suficientes, para estimular la huella gnoseológica y valorativa en el estudiante.

El contenido de la Matemática está conformado por definiciones, conceptos, teoremas y procedimientos, también llamados componentes de la misma. Haremos a continuación un breve análisis de cada uno de ellos.

Concepto: Forma de pensamiento abstracto que refleja los indicios sustanciales de una clase de objetos homogéneos o de un objeto (Guétmanova, A. Y otros, 1991) son sustanciales los indicios que tomados por separado, son imprescindibles y todos juntos son suficientes para distinguir el concepto dado de los demás.

En cada concepto se pueden distinguir el contenido y la extensión, por contenido del concepto se entiende el conjunto de propiedades esenciales que determinan el mismo y extensión al conjunto de objetos que poseen esas propiedades esenciales. Para establecer los rasgos esenciales de un concepto es necesario comparar entre toda una serie de objetos. Dicha comparación mostrará que indicios son **necesarios** y **suficientes** para distinguir el objeto dado de los demás.

En toda ciencia y en particular en la enseñanza de la Matemática es importante que los alumnos aprendan a distinguir propiedades necesarias, suficientes y necesarias y suficientes pues constituyen criterios que permiten reconocer si un objeto pertenece o no al concepto.

Son necesarias las propiedades que pertenecen a todos los objetos que integran la extensión del concepto y también poseen otras que no están incluidas en la extensión (Orientaciones Metodológicas, duodécimo grado Matemática 1991, Cuba). Las condiciones necesarias son aquellas circunstancias en cuya ausencia no se presenta el fenómeno (García, L .E .1995)

Son propiedades suficientes las que sólo poseen los objetos que pertenecen a la extensión del concepto (O. Metodológicas duodécimo grado Matemática 1991, Cuba). Suficientes son aquellas circunstancias en cuya presencia tiene que producirse el fenómeno (García Luis. E.1995).

Una propiedad es necesaria y suficiente cuando es común a todos los objetos que integran la extensión del concepto y sólo a ellos.

Definición: Se llama definición a la operación lógica por medio de la cual concretamos los rasgos esenciales del concepto, y se le diferencia de todos los que son parecidos (orientaciones metodológicas duodécimo grado 1991, Matemática, Cuba).

Proposición: Todo enunciado verbal o escrito que tiene un valor de verdad, es decir que es necesariamente verdadero o falso.

Las proposiciones matemáticas verdaderas son axiomas o teoremas matemáticos. La verdad de un teorema debe comprobarse con una demostración.

El fin de toda la demostración consiste en dilucidar lo que hay de verdad o de falsedad en una tesis. La que explica la veracidad de la tesis se llama demostración, la que pone de manifiesto la falsedad de una tesis se llama refutación. Refutar una tesis significa demostrar su falsedad.

En nuestro trabajo potenciaremos la refutación. Desde el punto lógico, la refutación es la demostración de que entre la proposición que se refuta y otras proposiciones de las que se sabe que son verdaderas, existe una relación de contrariedad o de contradicción. Esta tiene por fundamento la "Ley de la Lógica Formal de no contradicción" "Dos juicios en uno de los cuales se afirma algo acerca del objeto del pensamiento (A es B) mientras que en el otro se niega lo mismo acerca del objeto (A no es B) " no pueden ser a la vez verdaderos (siempre y cuando el carácter de B se afirme) o se niegue acerca del objeto del pensamiento A, considerado en el mismo tiempo y en una misma relación, desde este punto de vista refutar una proposición en matemática significa hallar proposiciones verdaderas que sean contrarias o contradictorias respecto a dicha proposición. Esta demostración es muy utilizada en la formación del ingeniero, llamada por contraejemplo.

Procedimiento Algorítmico: Según Landa se entiende por ello una sucesión de indicaciones, exacta y determinada unívocamente para la realización de una serie de operaciones elementales (o de sistema de tales operaciones) para resolver ejercicios de una determinada clase o de un determinado tipo (Jungk Werner, 1979).

A continuación expondremos algunos aspectos relacionados con la Lógica formal y Lógica dialéctica.

La Lógica Formal (L.F) estudia los actos del pensar haciendo abstracción del contenido concreto de los pensamientos, tomando sólo el procedimiento general de conexión entre las partes del contenido dado. A la lógica formal no le concierne la verdad material de la conclusión, de las premisas, sino la corrección formal del razonamiento, la relación entre las premisas y la conclusión. La veracidad de las premisas y la conclusión, que es lo más importante corresponde averiguarlo a quien hace uso de la lógica. Por mera lógica no podemos decir acerca de la falsedad de los primeros.

La L F. tiene como finalidad última obtener la conclusión. Ella se reduce a hacer de conceptos y juicios verdaderos, una deducción lógicamente acertada, verdadera. También estudia desde un determinado punto de vista conceptos ya dados formados, refleja una particularidad de los objetos del pensar: su estabilidad cualitativa, su relativa inmutabilidad, su identidad en cierto aspecto y en determinadas propiedades. Esta no "suprime" y no prohíbe el movimiento el desarrollo del mundo material, sino que se abstrae de él y examina los casos en estado de relativo reposo.

La L. F. estudia las formas en que un juicio deriva de otros, la armazón y estructura del conocimiento ya formado a base de unas leyes determinadas: Identidad, no contradicción tercero excluido y razón suficiente.

La Lógica Dialéctica (L.D), investiga los objetos y fenómenos de la realidad de modo multilateral en su conexión e interdependencia general, en su movimiento y desarrollo y conceptúa la quietud como un caso particular del movimiento. Esta aborda el problema de la verdad en toda su dimensión, no puede hacer abstracción del contenido concreto de los conceptos, juicios y razonamientos en todo el proceso del pensar, ya que únicamente el análisis concreto de los objetos en condiciones concretas de espacio y tiempo permiten desentrañar la esencia. Tampoco puede prescindir del desarrollo histórico del pensamiento humano.

Otro objeto básico de la L. D. constituye el estudio del proceso de formación y desarrollo del conocimiento mismo. La revelación dialéctica de los conocimientos implica no una simple enumeración de sus propiedades (aspectos sustanciales), como ocurre en la definición lógico-formal de los conceptos; se quiere desentrañar la interconexión entre estos aspectos sustanciales, un enfoque histórico del fenómeno reflejado en el concepto y de sus facetas sustanciales, mostrar sus contradicciones dialécticas (Andreiev).

Todo pensar cognosciente tiene carácter dialéctico, pero ello no quiere decir en modo alguno que este pensar no tome absolutamente en consideración las leyes de la Lógica formal. No hay pensar dialéctico "puro" libre de las leyes y reglas lógico-formales, como no hay pensar cognosciente lógico-formal "puro", secundario que se realice al margen de las leyes de la dialéctica, seamos o no conscientes de ello. Ningún pensamiento que se llame dialéctico nos llevará a la verdad si en él se hacen caso omiso o violan las leyes y reglas formuladas por la lógica formal. Existe un pensamiento cognosciente humano único que se subordina tanto a las regularidades dialécticas como a las leyes lógico-formales. Ahí reside precisamente la ligazón orgánica y la unidad de la lógica dialéctica y la formal.

Uno de los componentes de la de la lógica formal lo constituyen los procedimientos lógicos, los cuales pueden ser utilizados en todas las ciencias

Procedimiento lógico: Es un conjunto de acciones dirigidas a realizar la operación lógica de acuerdo con las leyes de la lógica y donde "Operaciones lógicas"son acciones con clases, conceptos y juicios, realizados durante la solución de un problema lógico concreto (Dra. Sanz Teresa, 1989, Cuba)

Juicio: forma de pensamiento abstracto en que se afirma o se niega algo. Las operaciones lógicas pueden ser con:

- Clases: intersección, unión, diferencia y complemento.
- Conceptos: definición del concepto, división del concepto, clasificación, limitación y generalización del concepto.
- Juicios: mediante los cuales de los juicios simples se forman compuestos: la conjunción, la disyunción, la implicación, la equipolencia y la negación.

En la lógica matemática actual se prescinde de la estructura interna de los juicios y en lugar de juicios se habla de proposiciones, estas son expresiones con sentido completo y se caracterizan por ser verdaderas o falsas.

Desde el punto de vista de los procedimientos lógicos del pensamiento tienen interés especial el estudio de las proposiciones compuestas y la determinación de su valor de verdad (es decir de su veracidad o falsedad).

Los procedimientos lógicos del pensamiento no aparecen reflejados de forma explícita en los contenidos de los diferentes programas de las asignaturas, la formación de ellos nunca ha sido de forma consciente, esto ha traído como consecuencia un insuficiente desarrollo de los mismos. Los procedimientos sean lógicos o específicos deben ser aprendidos por los alumnos y por tanto deben ser objeto de la enseñanza.

Trabajar explícitamente para desarrollar estos procedimientos del pensamiento no significa desarrollar clases de Lógica, se trata de prestar atención a los mismos y enseñar a los alumnos a emplearlos correctamente.

Los procedimientos lógicos presentan una serie de particularidades que posibilitan su formación en el proceso docente de cada asignatura. En primer lugar ellos pueden utilizarse en cualquier contenido. Quiere decir que la frecuencia operacional establecida por la Lógica Formal para cada procedimiento es generalizable a cualquier contenido que adopte ese procedimiento. En segundo lugar, no es posible lograr una formación sólida de los procedimientos lógicos sin recurrir a un contenido particular. Es decir su formación no se alcanza de forma abstracta, sin que se vincule la formación al funcionamiento real del contenido de una ciencia particular.

Estos dos rasgos determinan que la mejor vía para formarlos sea la que se dirige a instrumentar su formación a través de diferentes asignaturas del plan de estudio; fundamentalmente de aquellas de carácter básico que se dan en los primeros años de estudio, y si tenemos en cuenta que la vía para formar los procedimientos de la actividad mental es aproximadamente la siguiente: asimilación del contenido, aplicación independiente del mismo y traslación a nuevas situaciones (Petrovski A. 1985).

El contenido del procedimiento, según cual sea su tipo puede ser asimilado mediante un algoritmo, o sea un sistema de indicaciones rígidamente establecidas que deben cumplirse en determinada sucesión. Este puede ser trasmitido en forma acabada por el profesor o el alumno puede buscarlo con la ayuda de éste.

Asociadas a la refutación como demostración tenemos las reglas de la lógica formal siguientes:

Modus ponendo ponens (Modo de afirmar afirmando) pues se afirma la conclusión afirmando la premisa.

Si p, entonces q
Se da p, entonces se cumple q

Esta regla desempeña un papel fundamental en los razonamientos matemáticos, es imprescindible en la aplicación de los teoremas y está directamente asociada al procedimiento lógico de deducción de consecuencias.

Modus tollendo tollens (modo de negar negando), se niega la premisa negando la tesis.

Si p, entonces q
Se da no q
Conclusión no p

Son posibles otras deducciones, a saber: las que resultan pasando de la negación de las premisas a la de la conclusión y las que se infieren pasando de la afirmación de la conclusión a la afirmación de las premisas pero estas deducciones no dan conclusiones válidas.

1er. Modo probable	2do. Modo probable
Si p, entonces q	Si p, entonces q
Se da no p	se da q

Es probable que no q   Es probable que p

La causa de que las conclusiones citadas no sean válidas radica en que, aquello de que se trata en la premisa es condición suficiente, pero no necesaria para la existencia de lo que se trata en la conclusión, y aquello que se trata en esta es condición necesaria, pero no suficiente para lo que se trata en las premisas.

Explicaremos esto a partir de las propiedades de dos conceptos:

Si $f(x)$ es derivable en x_0, entonces se cumple

1- $f(x)$ está definida en x_0,

2- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,

3- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ y

4- $f(x)$ tiene recta tangente en x_0

Si $f(x)$ es continua en x_0, entonces se cumple

1- $f(x)$ está definida en x_0

2- $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

En efecto, el hecho que f sea derivable en x_0, es razón suficiente para que sea continua en x_0, pues todas las propiedades de la función continua están contenidas en la de función derivable. Esta condición no es sin embargo, necesaria, pues existen otras funciones no derivables que son continuas (no tienen recta tangente en el punto y cumple con las tres primeras propiedades). Por otra parte, el hecho de ser continua f en x_0 es condición necesaria para que la función pueda ser derivable en x_0(todas las propiedades de la función continua están implícitas en la función derivable)

Veamos a continuación como aplicar la refutación a un ejemplo concreto: conteste f ó v, y fundamente en la proposición siguiente: Si $f(x)$ no está definida en x_0, entonces no $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.Para determinar el valor de verdad de la proposición determinemos una proposición verdadera que sea contraria a la anterior, por ejemplo: $f(x) = \frac{senx}{x}$ no está definida en x = 0 y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x} = 1$. Esta proposición es v y es contraria a la anterior por tanto la proposición original es f. En esta proposición se puede negar la premisa y afirmar la conclusión, así como afirmar la conclusión y negar las premisas para obtener tareas inversas, cuestión de suma importancia para obtener el conocimiento completo de un concepto.

2 Fundamentos pedagógicos para la elaboración de la estrategia

La evaluación del aprendizaje le permite al profesor indagar sobre el grado de aprendizaje y desarrollo de los estudiantes en su proceso de formación, así como la capacidad que poseen para aplicar los contenidos en la resolución de problemas de la profesión. Le brindará información oportuna y confiable para descubrir aquellos elementos de su práctica que interfieren en los procesos de enseñanza y aprendizaje, de tal manera que pueda reflexionar en torno a estos para mejorarlos y reorientarlos permanentemente.

La evaluación del aprendizaje se estructura de forma frecuente, parcial, final y de culminación de los estudios, en correspondencia con el grado de sistematización de los objetivos a lograr por los estudiantes en cada momento del proceso. Estas formas de conjunto, caracterizan a la evaluación como un sistema.

La evaluación frecuente tiene como propósito fundamental comprobar el grado de cumplimiento de los objetivos específicos en la ejecución del proceso de enseñanza, mediante la valoración del trabajo de los estudiantes en todas las formas organizativas del proceso.

Los tipos de evaluación frecuente a utilizar, por su gran versatilidad son: la observación del trabajo de los estudiantes, las preguntas orales y escritas, las discusiones grupales, entre otros.

La evaluación parcial tiene como propósito fundamental comprobar el logro de los objetivos particulares de uno o varios temas. Los tipos fundamentales son:

1 La prueba parcial.
2 El trabajo extraclase.
3 El encuentro comprobatorio.
4 La evaluación final tiene como propósito fundamental comprobar el grado de cumplimiento de los objetivos generales de una asignatura o disciplina. Sus tipos fundamentales son los siguientes:

- El examen final.
- La defensa del trabajo de curso.
- La evaluación final de la práctica laboral

Para aplicar la estrategia que potencia la refutación como forma de demostración utilizaremos la Matemática I de la carrera de Mecánica de la Universidad de Pinar del Río, Cuba, la cual tiene 96 horas, distribuida en tres temas:

Tema I: Límite y continuidad de una función de una variable real
Tema II: Cálculo diferencial y sus aplicaciones de una función de una variable real
Tema III: Cálculo integral y sus aplicaciones para funciones de una variable real

Los estudiantes de la carrera anterior reciben un curso introductorio donde se activan contenidos esenciales de la enseñanza media fundamentales para la comprensión de los contenidos de la matemática I. En esta se imparte algunos elementos de la lógica, los cuales fundamentan la refutación.

Para potenciar la refutación como demostración se propone la aplicación de la siguiente estrategia:

1. Se elaborará un sistema de tareas por temas donde el estudiante demuestre utilizando la refutación en evaluaciones frecuentes y parciales, las cuales serán controladas en preguntas orales, escritas, pruebas parciales, trabajos extraclase y en encuentros comprobatorios.

2. Se elaborará un sistema de tareas integradoras de los diferentes temas donde el estudiante demuestre utilizando la refutación, las cuales serán controladas en el examen final.

Conclusiones

Al potenciar la refutación como demostración a través del Proceso de Enseñanza de la Matemática I se logra:

1-Colocar al estudiante que piense en términos de elegir entre posiciones contradictorias, es decir, buscar contraejemplos que debilite una proposición, esto por supuesto favorece el movimiento del pensamiento.

2- Que el estudiante se apropie del procedimiento lógico que proporciona una condición necesaria y suficiente para un concepto el cual tiene un gran valor práctico para su vida profesional.

3- Adiestrar a los estudiantes en la resolución de tareas directa e inversa importantes para la formación del conocimiento completo de un concepto

Bibliografía

- Andréiev,I. Problemas Lógicos del Conocimiento Científico. Editorial Progreso 1984
- García, Luís E.. Lógica y pensamiento crítico universal de Caldas, 1995
- Guétmanova, A. Lógica. Editorial Progreso. 1989
- Hernández, A. Diagnostico y desarrollo del procedimiento deducción. Tesis para optar por el grado de Doctora en Ciencias Pedagógicas. 1992
- Hernández, H. Didáctica de la Matemática. Artículos para el debate. 1993 del ISPJAE
- ISPJAE, II Taller Internacional sobre la enseñanza de la Matemática para ingeniería y arquitectura, 1998.
- Jungk, Werner. Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática (2) Primera Parte. Editorial de Libros para la educación. Ministerio de Educación. La Habana, 1979.
- Kopnin, P. V. Lógica Dialéctica. Ciencias Económicas y Sociales. Orientaciones metodológicas duodécimo grado, 1991. Matemática.
- Petrovski, A., 1985. Psicología Evolutiva y Pedagógica. Editorial Progreso. Moscú. 1985.
- Salmina, N.G. La actividad cognoscitiva de los alumnos y modos de construir la asignatura. Traducción CEPES; 1988.
- Sanz, T. Estudio de los procedimientos lógicos de identificación y clasificación. Tesis para optar por el grado de Doctora en Ciencias Pedagógicas. 1989

Marlén de la C. Álvarez Labrador
Master en Administración de Empresa y
Jefe del colectivo de Matemática Aplicada
para Economía y Contabilidad en la
Universidad de Pinar del Río, Cuba
mal@mat.upr.edu.cu

Antonio Mazón Ávila
Master en Ciencias de La Educación y
Jefe del colectivo de Matemática
para ciencias técnicas en la
Universidad de Pinar del Río, Cuba
an@mat.upr.edu.cu