¿QUÉ SON LOS NÚMEROS P-ADICOS?

El presente trabajo de divulgación está basado en el artículo "*Los números p-ádicos*", de *Daniel Barsky* y *Gilles Christol*, publicado en *Mundo Científico (nº 161, vol 15)*, y que amablemente nos ha hecho llegar nuestro amigo de la UNED Fran Arias.
----

0. Introducción. El proceso de construcción del cuerpo R de los números reales usando la noción de distancia euclidiana:

El conjunto infinito de los números reales puede definirse como un cuerpo conmutativo, ordenado y completo.

¿Cómo construir este cuerpo desde el cuerpo Q de los números racionales mediante sucesiones?. Daremos los pasos siguientes:

a. Definir el conjunto S_Q de las sucesiones de números racionales, del cual se puede trivialmente probar que se trata de una álgebra lineal sobre Q, conmutativa, asociativa y con elemento unidad para su operación multiplicativa.

b. Definir el subconjunto S_A de S_Q, formado por las sucesiones acotadas de números racionales, del cual también trivialmente se obtiene que se trata de una álgebra sobre Q, subálgebra del álgebra S_Q.

c. También podemos considerar el conjunto S_L de las sucesiones de números reales con límite, el cual es, también, un álgebra sobre Q, subálgebra del álgebra S_A y, por tanto, también subálgebra de S_Q. El conjunto P_0 de estas sucesiones que tienen límite nulo (que llamaremos *sucesiones nulas*) es un ideal primo del álgebra S_L.

d. Definir el concepto de sucesión de Cauchy:

"Una sucesión de números racionales (a_n) es de Cauchy si, y solo sí,
$$\forall e > 0, \exists n / n_1, n_2 \geq n \Rightarrow \left| a_{n_1} - a_{n_2} \right| < e$$
notemos que hemos utilizado el concepto clásico, euclidiano, de valor absoluto, o de distancia, entre los elementos a_{n1} y a_{n2} .

El conjunto S_C de las sucesiones de Cauchy está contenido en el conjunto S_A de las sucesiones acotadas S_A, y, también, contiene al conjunto S_L de las sucesiones con límite:

$$S_L \subset S_C \subset S_A$$

Además, S_C es, también, álgebra sobre Q, subálgebra de S_A, con el mismo elemento unidad.

e. La relación de equivalencia R, definida en Sc, que da $S_C/(p_0)$ como conjunto cociente es:

$$(a_n)R(b_n) \Leftrightarrow (a_n)-(b_n) \in p_0$$

f. El conjunto R = $S_C/(p_0)$ es un cuerpo conmutativo, ordenado y completo, esto es, se trata del cuerpo de los números reales, en el cual la restricción del orden de R a Q coincide con el órden de Q. Se prueba que si existieran dos cuerpos conmutativos, ordenados y completos, ambos serían isomorfos.

De esta manera es posible construir un cuerpo R de números, los números reales. que complete al cuerpo Q de los números racionales, esto es, que incluya también los números llamados "irracionales", números no expresables mediante cocientes de enteros. Para ello hemos tenido que construir las sucesiones de Cauchy, usando el concepto de valor absoluto euclidiano y de distancia euclidiana. Si, en su lugar, usamos un concepto distinto de valor absoluto y de distancia, el cuerpo numérico obtenido no será entonces el cuerpo R de los número reales. El cuerpo que se obtiene al extender Q depende de la forma de definir el valor absoluto y la distancia. En lo que sigue vamos a dar una definición distinta de valor absoluto y distancia, que llamaremos p-ádicos.

1. Valor absoluto p-ádico y distancia p-ádica. El cuerpo Q_p de los números p-ádicos:

Definición:

Dado un número entero primo, *p*, se llama *valor absoluto p-ádico* de un entero positivo, *n*, al inverso de p^r, donde es p^r la mayor potencia de *p* que divide a *n*.

Es decir, si la mayor potencia de *p* que divide al entero *n* es p^r, entonces podemos escribir que:

$$|n|_p = \frac{1}{p^r}$$

Ejemplos:

$$|60|_2 = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$|60|_3 = \frac{1}{3} = 0{,}3333...$$

$$|40|_2 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Propiedades:

a) El valor absoluto p-ádico de un número entero negativo es igual al valor absoluto p-ádico de su opuesto:

$$|n|_p = |-n|_p$$

b) El valor absoluto p-ádico de cero es cero:

$$|0|_p = 0$$

c) El valor absoluto p-ádico de un número racional, m/n, es el cociente de los valores absolutos p-ádicos del numerador y denominador:

$$\left|\frac{m}{n}\right|_p = \frac{|m|_p}{|n|_p}$$

Definición:

Se llama distancia *p-ádica* entre dos números racionales, *n* y *m*, al valor absoluto *p-ádico* de su diferencia.

Propiedades:
Si los dos números, *m* y *n,* fueran enteros, la distancia p-ádica es menor cuanto mayor es la potencia de *p* que divide a la diferencia de ambos números *m - n*.

Dados tres números, m, n, q, la distancia p-ádica entre dos de ellos, m y q, es menor que la mayor de las distancias entre m y n, y entre n y q. Esta propiedad, que no se cumple en las distancias euclidianas, es llamada por *Daniel Barsky* y *Gilles Christo, en su artículo, "ultramétrica".*

Se obtiene, en definitiva, usando este concepto de valor absoluto y de distancia, un cuerpo Q_p de números, que se llama el Cuerpo de los número p-ádicos.

Representación:

De la misma manera que cualquier número real admite una representación decimal de la forma

$$a_q 10^q + ... + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0 10^0 + a_{-1} 10^{-1} + a_{-2} 10^{-2} + ...$$

Donde los a_i son enteros comprendidos entre 0 y 9, también los números p-ádicos admiten una representación análoga, los llamados "desarrollos de Hensel":

$$a_{-n} p^{-n} + ... + a_{-2} p^{-2} + a_1 p^{-1} + a_0 p^0 + a_1 p^1 + a_2 p^2 + ...$$

Donde los a_i están ahora comprendidos entre *0* y *p - 1, y n* es un cierto entero positivo.

Veamos un ejemplo:

Representación decimal y 5-ádica del número -0,25:

a) Representación decimal:

$$-0,25 = -0.10^0 - 2.10^{-1} - 5.10^{-2}$$

b) Representación 5-ádica:

$$-0,25 = -\frac{1}{4} = \frac{1}{1-5} = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + ...$$

(se ha empleado la fórmula geométrica 1/1-x = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., válida si el valor absoluto de x es menor que la unidad. En este caso vale, pues el valor absoluto 5-ádico de 5 es 1/5).

2. Utilidad de los números p-ádicos:

El manejo y la utilización de los números p-ádicos entraña una dificultad mayor, obviamente, que el uso de los números reales, no obstante, es posible el desarrollo de un Análisis p-ádico con tratamiento de funciones, series, ecuaciones diferenciales, etc.., situando todos estos temas dentro del campo p-ádico, de los números p-ádicos, no en el campo de los números reales. Los resultados de este análisis p-ádico son mas sencillos en algunos casos que el análisis clásico dentro del campo de los números reales.

¿Pára qué sirven los números p-ádicos y el análisis que permiten elaborar?

Para utilizarlos se puede hacer intervenir una sola distancia p-ádica (un solo primo p) o bien todas las distancias p-ádicas que se puedan definir en los números racionales.

El interés de este segundo enfoque estriba en la obtención de una fórmula que relaciona a todos los valores absolutos p-ádicos de un número racional con el valor absoluto clásico de dicho número.

$$\left|\frac{m}{n}\right|_2 . \left|\frac{m}{n}\right|_3 \cdots \left|\frac{m}{n}\right|_5 \cdots \left|\frac{m}{n}\right|_p \cdots = \left|\frac{n}{m}\right|$$

(se demuestra mediante descomposición de los enteros m y n en sus factores primos)

Combinando estos enfoques pueden obtenerse resultados expresables de la manera clásica, esto es, sin que intervengan expresiones p-ádicas. En esto parece ser que reside la utilidad fundamental de estos números.

Un ejemplo notable, señalado en el artículo de *Daniel Barsky* y *Gilles Christol,* utilizado, como ya se ha dicho para construir este trabajo, es la demostración del Teorema de Fermat, culminada hace solo unos meses por el profesor Andrew Wiles, de Princeton.

"No existen enteros positivos, no nulos, a, b, c, tales que $a^n + b^n = c^n$, si $n > 2$."

3. Los números p-ádicos y la física:

Los números p-ádicos intervienen no solo en matemáticas puras, sino también tienen un cierto papel dentro de algunos campos de la física. La propiedad *ultramétrica* de la distancia p-ádica proporciona un ejemplo de estructura arborescente utilizable en la descripción de algunos procesos físicos:

a) El estudio teórico de las propiedades termodinámicas de los vidrios de spín (materiales desordenados que contienen partículas imantadas, cuya orientación debe ajustarse para minimizar las interacciones magnéticas), la llamada "técnica de las réplicas" consiste en considerar *n* muestras idénticas, calcular la energía de interacción magnética y hacer tender formalment, en los cálculos, el entero n a cero. En realidad, la técnica de las réplicas equivale a considerar una serie de enteros que tiende p-ádicamente a cero para todos los números primos p a la vez.

b) Los físicos teóricos especulan sobre la estructura del espacio y el tiempo a muy pequeña escala. Las leyes de la relatividad general y de la física cuántica indican que no es posible medir longitudes inferiores a la llamada *longitud de Planck*, del orden de 10^{-35} metros. La existencia de una distancia mínima sugiere la posibilidad de que, a esa escala, la estructura última del espacio tiempo pueda describirse no en términos de estructura de números reales, sino en términos de estructura p-ádica.

4. Bibliografía:

Señalamos como recomendable, el artículo utilizado para construir este trabajo, y la bibliografía que en él figura:

Z.I BOREVITCH y I.R. CHAFAREVITCH, *Théorie des nombres,* Gautiers-Villars, 1967.

G. CHRISTOL, *p-adic numbers and ultrametricity,* en *From Number Theory to Physics (Waldschmidt et al., eds.), Springer, 1992.*

R.RAMMAL et a., "Ultrametricity for Physcics, Rev. Mod. Phys., 58, 1986.

Y. YAMICE, *Les nombres p-adiques, PUF, 1975.*

B. DWORK, G. GEROTTO, F. SULLIVAN, *An introduction to G-functions,* Annals of Math.

N. KOBLITZ, *p-adic numbers, p-adic analysis and Zeta functions, 2ª ed., Springer-Verlag, 1984*

V.S. VLADIMIROV, I.V. VOLOVICH y E.I. ZELENOV, *p-adic análisis and mathematical physics, Word Scientific, 1994*

----oo0oo----