

LOS INVARIANTES METRICOS DE LAS CONICAS

Carlos SÁNCHEZ CHINEA
MARCHENA, julio 2000

DIVULGACIÓN DE LA MATEMÁTICA EN LA RED

LOS INVARIANTES METRICOS DE LAS CONICAS

INTRODUCCIÓN

¿Qué son las curvas cónicas?. Esta es la pregunta que nos hacemos al intentar un estudio de estos objetos.

Esta puede ser una contestación:

- Son las secciones de corte de un cono por un plano, de todas las manera posibles, así, si se corta un cono por un plano perpendicular al eje de revolución, la sección resultante es un caso particular de elipse, la circunferencia. En general, si se corta un cono por un plano que toque a todas las generatrices, la sección es una elipse. Si el plano de corte es paralelo al eje de revolución, sin pasar por el vértice, la sección es una hipérbola, y si, además, pasa por el vértice, la sección son dos rectas que se cortan. Si el plano de corte es paralelo a alguna de las generatrices, sin pasar por el vértice, la sección es una parábola, y si, además, pasa por el vértice, la sección es una línea recta que coincide con la generatriz contenida en el plano de la sección.

Esta es otra contestación:

- Son las curvas de ecuación general dada por

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{00} = 0$$

que, al expresarla matricialmente, aparece como un producto matricial igualado a cero, de la forma $X.A.X^t = 0$. Para poder hacer el estudio de acuerdo con esta concepción de las cónicas se plantea como objetivo el reducir la ecuación general a una forma más sencilla, mediante un cambio ortonormal aplicado a la matriz A de los coeficientes.

La cuestión es si, al reducir la ecuación de la cónica aparecen magnitudes que se mantienen invariantes en un cambio ortonormal y pueden ser utilizadas, en consecuencia, para poder clasificar las cónicas en los tipos gráficos que nos presenta la concepción clásica de secciones de corte de la superficie de un cono por un plano.

Y, efectivamente, así es, aparecen tres magnitudes invariantes en los cambios ortonormales, y que llamamos Invariantes métricos de las cónicas:

El determinante de la matriz A, el adjunto A_{00} del elemento a_{00} , y la suma de los elementos a_{11} y a_{22} .

En el presente estudio se pretende hacer una clasificación general de las cónicas en función de los valores de estos invariantes, de forma que llamaremos Cónicas regulares a las cónicas con el primer invariante métrico no nulo, y Cónicas irregulares a las cónicas con el primer invariante métrico nulo. La clasificación siguiente, dentro de cada conjunto de cónicas, depende de los valores de los otros dos invariantes métricos.

INDICE-RESUMEN

1. CONICAS.

- 1.01. Cónica del espacio proyectivo P^2
- 1.02. Cónica del espacio euclidiano M^2
- 1.03. Recta impropia. Puntos impropios
- 1.04. Teorema 1.1
- 1.05. Puntos del infinito
- 1.06. Puntos conjugados
- 1.07. Puntos singulares
- 1.08. Recta polar. Polo
- 1.09. Centro de una cónica
- 1.10. Teorema 1.2
- 1.11. Asíntotas
- 1.12. Diámetro de una cónica
- 1.13. Punto del infinito de una recta
- 1.14. Diámetros conjugados
- 1.15. Ejes y vértices

2. ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CÓNICAS.

- 2.01. Reducir la ecuación de una cónica
- 2.02. Teorema 2.1
- 2.03. Teorema 2.2
- 2.04. Teorema 2.3
- 2.05. Teorema 2.4

3. INVARIANTES MÉTRICOS.

- 3.01. ¿Qué son los invariantes métricos de una cónica?
- 3.02. Teorema 3.1

4. CONICAS IRREDUCIBLES.

- 4.01. Cónicas irreducibles o regulares
- 4.02. Primer grupo de cónicas regulares
- 4.03. Teorema 4.1.
- 4.04. Primer grupo con segundo invariante positivo
- 4.05. Teorema 4.2.
- 4.06. Primer grupo con segundo invariante negativo.
- 4.07. Teorema 4.3.
- 4.08. Teorema 4.4.
- 4.09. Segundo grupo de cónicas regulares
- 4.10. Teorema 4.5.

5. CONICAS REDUCIBLES.

- 5.01. Cónicas irreducibles o irregulares
- 5.02. Teorema 5.1
- 5.03. Teorema 5.2
- 5.04. Primer grupo de cónicas irregulares
- 5.05. Teorema 5.3.
- 5.06. Segundo grupo de cónicas irregulares
- 5.07. Teorema 5.4.

ANEXOS.

- ANEXO 1: Cuadro resumen.
- ANEXO 2: Bibliografía
- ANEXO 3: Ejercicios.

1. CONICAS:

1.16. Cónica del espacio proyectivo P^2 :

En el plano proyectivo P^2 , una cónica Q' es el conjunto de puntos autoconjugados en una polaridad. Ecuación matricial:

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

o bien, resumidamente:

$$(x_0, x_1, x_2) \cdot A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0; \quad X \cdot A \cdot X^t = 0$$

también, si es $x_0 \neq 0$:

$$(1, x, y) \cdot A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0; \quad \text{llamando} \quad x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

1.17. Cónica del espacio euclídeo o euclidiano M^2 :

Se llama cónica Q del plano euclidiano M^2 al conjunto

$$Q = Q' \cap M^2$$

donde es Q' una cónica de P^2 tal que es $x_0 \neq 0$.

La ecuación general de una cónica del plano euclidiano viene dada, por consiguiente, por

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot xy + 2a_{01} \cdot x + 2a_{02} \cdot y + a_{00} = 0$$

Cuando sea conveniente, representaremos por (Q, A) a una cónica Q del plano euclídeo, con matriz A .

1.18. Recta impropia. Puntos impropios:

El conjunto de puntos $r_{00} = \{(0, x_1, x_2)\}$ no está contenido, por tanto, en la cónica Q' . A r_{00} se le llama recta del infinito, o bien recta impropia, de la cónica Q' . Sus puntos se dicen puntos impropios de la cónica.

1.19. Teorema 1.1:

La condición necesaria y suficiente para que Q sea una cónica de M^2 es que sea no nulo uno al menos de los tres números a_{11} , a_{22} , a_{12} (esto es, que $a_{11} \neq 0 \vee a_{22} \neq 0 \vee a_{12} \neq 0$)

En efecto:

Bastará probar que es condición necesaria y suficiente que la cónica Q' contenga a la recta impropia $r_{00} = \{(0, x_1, x_2)\}$ para que sean nulos los tres números ($a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$):

$$Q' \text{ contiene a } r_{00} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ \sum_{i,j}^2 a_{ij} \cdot x_i \cdot x_j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a_{11} \cdot x_1^2 + a_{22} \cdot x_2^2 + 2a_{12} \cdot x_1 x_2 = 0, \quad \text{para}$$

todo par de puntos de $M^2 \Leftrightarrow a_{11} = a_{22} = a_{12} = 0$

Por tanto, en las cónicas Q del plano euclídeo M^2 es distinto de cero alguno de estos tres números.

1.20. Corolario 1.1:

En una cónica Q en la que su matriz A tiene nulos los elementos a_{12} se cumplen las siguientes alternativas:

a) Si $A_{00} = \text{adj}(a_{00}) \neq 0$ entonces $A_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = a_{11} \cdot a_{22} - 0 = a_{11} \cdot a_{22} \neq 0$
 $\Rightarrow a_{11} \neq 0 \wedge a_{22} \neq 0$

b) Si $A_{00} = \text{adj}(a_{00}) = 0$ entonces $A_{00} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = a_{11} \cdot a_{22} - 0 = a_{11} \cdot a_{22} = 0$
 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (a_{11} \neq 0 \wedge a_{22} = 0) \vee (a_{11} =$$

$0 \wedge a_{22} \neq 0)$

Nota: No puede darse el caso de $a_{11} = a_{22} = 0$, porque, en ese caso, y siendo ya $a_{12} = 0$, serían nulos los tres números, y Q no sería una cónica.

1.21. Puntos del infinito:

Se llaman puntos del infinito de la cónica Q a aquellos puntos de la recta impropia r_{00} para los cuales es nulo el término independiente a_{00} en la ecuación de la cónica. Para obtenerlos, bastará hacer nulo en la ecuación de la cónica el término a_{00} y, para $x = 1$, despejar y :

$$a_{22} \cdot y^2 + 2(a_{12} + a_{02}) \cdot y + 2a_{01} + a_{11} = 0 \rightarrow \begin{cases} y = y_0 \\ y = y_0' \end{cases}$$

y los puntos del infinito serán:

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & y_0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0, & 1, & y_0' \end{pmatrix}$$

1.22. Puntos conjugados:

Se dice que el punto (p_1, p_2) es conjugado del punto (p_1', p_2') respecto a la cónica Q de matriz A si se verifica que

$$\begin{pmatrix} 1, & p_1, & p_2 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ p_1' \\ p_2' \end{pmatrix} = 0$$

$$(p_1, p_2) \text{ conjugado de } (p'_1, p'_2) \Leftrightarrow (1, p_1, p_2).A \begin{pmatrix} 1 \\ p'_1 \\ p'_2 \end{pmatrix} = 0$$

1.23. Puntos singulares:

El punto (p_1, p_2) es punto singular respecto de la cónica Q sii el conjunto de los puntos conjugados con (p_1, p_2) es todo el plano euclidiano M^2 .

$$(p_1, p_2) \text{ singular respecto de } Q \Leftrightarrow (1, p_1, p_2).A = 0$$

1.24. Recta polar. Polo:

La recta $r: y = m.x + b$ es recta polar del punto (p_1, p_2) sii se verifica que

$$\forall (x_1, x_2) \in r, (1, p_1, p_2).A \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

El punto (p_1, p_2) es polo de la recta $r: y = m.x + b$ sii r es recta polar de (p_1, p_2) .

1.25. Centro de una cónica:

El punto (c_1, c_2) se dice centro de la cónica (Q, A) sii se verifica:

$$\forall (0, x_0, x_1) \in r_{00}, (1, c_1, c_2).A \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

o bien, equivalentemente,

$$\forall p_0 \in R, (p_0, p_0.c_1, p_0.c_2).A = (1 \ 0 \ 0)$$

1.26. Teorema 1.2:

En las cónicas de matriz regular ($|A| \neq 0$) se verifica que si $A_{00} = \text{adj}(a_{00})$ es no nulo, entonces el centro es propio.

En efecto:

Bastará probar que el número p_0 de la definición es no nulo.

$$(p_0, p_0.c_1, p_0.c_2).A = (1 \ 0 \ 0) \Rightarrow \begin{cases} p_0 a_{00} + p_0 c_1 a_{01} + p_0 c_2 a_{02} = 1 \\ p_0 a_{01} + p_0 c_1 a_{11} + p_0 c_2 a_{12} = 0 \\ p_0 a_{02} + p_0 c_1 a_{12} + p_0 c_2 a_{22} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Despejando p_0 por la regla de Cramer:

$$p_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} \\ 0 & a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2}{|A|} = \frac{A_{00}}{|A|} \neq 0$$

1.27. Asíntotas:

Se llaman asíntotas de una cónica Q a las rectas polares de sus puntos del infinito.

1.28. Diámetro de una cónica:

Una recta d: $y = m \cdot x + n$ se dice diámetro de la cónica Q si contiene al centro (c_1, c_2) de la cónica.

1.29. Punto del infinito de una recta:

Se llama punto del infinito de la recta r: $y = a \cdot x + b$ a los puntos de r_{00} tales que $b = 0$. Haciendo $x = 1$:

Se tiene: $y = a + b = a$

Por tanto, el punto del infinito de la recta $r: y = a \cdot x + b$ es $(0, 1, a)$

1.30. Diámetros conjugados:

Dos diámetros de una cónica (Q, A) se dicen conjugados sii sus puntos del infinito son conjugados:

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = m'x + n' \end{cases} \text{ diámetros, } y = mx + n \text{ conjugado de } y = m'x + n' \Leftrightarrow (0, 1, m) \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

1.31. Ejes y vértices:

Se llaman ejes de la cónica Q a dos diámetros conjugados perpendiculares:

O sea, $d_1: y = m \cdot x + n$ y $d_2: y = m' \cdot x + n'$ son diámetros de la cónica Q sii contienen al centro, son conjugados, y, además, son ortogonales.

Es decir, si es (c_1, c_2) el centro de la cónica (Q, A):

$$c_2 = m \cdot c_1 + n, \quad c_2 = m' \cdot c_1 + n'$$

$$(0, 1, m) \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

$$m \cdot m' = -1$$

Los vértices de una cónica Q son los puntos de corte con los ejes.

2. ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CONICAS:

2.01. Reducir la ecuación de una cónica:

La ecuación general de una cónica del plano euclidiano sabemos que es de la forma

$$a_{11} \cdot x^2 + a_{22} \cdot y^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot xy + 2a_{01} \cdot x + 2a_{02} \cdot y + a_{00} = 0$$

esta ecuación podría simplificarse si, mediante una semejanza ortonormal logramos que se anulen varios de los coeficientes a_{ij} de la matriz de la cónica, de forma que permanezca al menos uno distinto de cero en cada fila y cada columna (salvo las limitaciones que impone el corolario 1.1.).

a) si es $a_{01} = a_{02} = a_{12} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ecuación: } a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$$

b) si es $a_{00} = a_{01} = a_{12} = a_{22} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02} \\ 0 & a_{11} & 0 \\ a_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ecuación: } a_{11}x^2 + 2a_{02}y = 0$$

c) si es $a_{00} = a_{02} = a_{12} = a_{11} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{01} & 0 \\ a_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ecuación: } a_{22}y^2 + 2a_{01}x = 0$$

d) si es $a_{01} = a_{02} = a_{11} = a_{12} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ecuación: } a_{22}y^2 + a_{00} = 0$$

e) si es $a_{01} = a_{02} = a_{22} = a_{12} = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Ecuación: } a_{22}x^2 + a_{00} = 0$$

2.02. Teorema 2.1:

Mediante la aplicación de un giro de amplitud $q = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}\right)$ la matriz A de una cónica Q queda reducida a otra matriz semejante A', donde son nulos los términos a_{12}' :

$$A' = \begin{pmatrix} a_{00}' & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & a_{11}' & 0 \\ a_{02}' & 0 & a_{22}' \end{pmatrix}$$

En efecto:

Siendo la matriz del giro $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & \sin q & \cos q \end{pmatrix}$, se tendrá:

$$\begin{aligned} G.A.G^t &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & -\sin q \\ 0 & \sin q & \cos q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos q & \sin q \\ 0 & -\sin q & \cos q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \cos q - a_{02} \sin q & a_{01} \sin q + a_{02} \cos q \\ a_{01} \cos q - a_{02} \sin q & a_{11} \cos^2 q - 2a_{12} \sin 2q + a_{22} \sin^2 q & \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2q + a_{12} \cos 2q \\ a_{01} \sin q + a_{02} \cos q & \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2q + a_{12} \cos 2q & a_{11} \sin^2 q + 2a_{12} \sin 2q + a_{22} \cos^2 q \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{00}' & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & a_{11}' & a_{12}' \\ a_{02}' & a_{12}' & a_{22}' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y, por tanto, haciendo $a_{12}' = \frac{1}{2}(a_{11} - a_{22}) \sin 2q + a_{12} \cos 2q = 0$

$$\text{resulta: } \tan 2q = \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} \Rightarrow q = \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}}\right)$$

2.03. Teorema 2.2:

Si a la matriz A' anterior se le aplica una traslación $T(h, k)$ de matriz

$$T = \begin{pmatrix} 1 & h & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ se obtiene la matriz}$$

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{00} + 2h.a'_{01} + 2k.a'_{02} + h^2.a'_{11} + k^2.a'_{22} & a'_{01} + h.a'_{11} & a'_{02} + k.a'_{22} \\ a'_{01} + h.a'_{11} & a'_{11} & 0 \\ a'_{02} + k.a'_{22} & 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$$

En efecto:

Basta realizar el producto de las matrices :

$$A'' = T.A'T^t = \begin{pmatrix} 1 & h & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & 0 \\ a'_{02} & 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a'_{00} + 2h.a'_{01} + 2k.a'_{02} + h^2.a'_{11} + k^2.a'_{22} & a'_{01} + h.a'_{11} & a'_{02} + k.a'_{22} \\ a'_{01} + h.a'_{11} & a'_{11} & 0 \\ a'_{02} + k.a'_{22} & 0 & a'_{22} \end{pmatrix}$$

2.04. Teorema 2.3:

Si $A'_{00} \neq 0$ se tiene que para $h = -a'_{01}/a'_{11}$, $k = -a'_{02}/a'_{22}$ resulta

$$A'' = \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$$

En efecto:

$$a''_{01} = a'_{01} + h.a'_{11} = a'_{01} - \frac{a'_{01}}{a'_{11}}.a'_{11} = 0$$

$$a''_{02} = a'_{02} + k.a'_{22} = a'_{02} - \frac{a'_{02}}{a'_{22}}.a'_{22} = 0$$

por tanto es: $A'' = \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$

2.05. Teorema 2.4:

Si $A'_{00} = 0$ se tiene:

$$a) (a'_{11} \neq 0 \wedge a'_{22} = 0) \vee (a'_{11} = 0 \wedge a'_{22} \neq 0)$$

b) Si $a_{11}' \neq 0$, entonces para $h = -a_{01}'/a_{11}'$ será también $a_{01}'' = 0$, y se dan estos dos casos:

$$b1) \text{ Si } a_{02}' \neq 0, \text{ entonces } A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{02}'' \\ 0 & a_{11}'' & 0 \\ a_{02}'' & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b2) \text{ Si } a_{02}' = 0, \text{ entonces } A'' = \begin{pmatrix} a_{00}'' & 0 & 0 \\ 0 & a_{11}'' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Si $a_{22}' \neq 0$, entonces para $k = -a_{02}'/a_{22}'$ será también $a_{02}'' = 0$, y se dan estos dos casos:

$$c1) \text{ Si } a_{01}' \neq 0, \text{ entonces } A'' = \begin{pmatrix} 0 & a_{01}'' & 0 \\ a_{01}'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}'' \end{pmatrix}$$

$$c2) \text{ Si } a_{01}' = 0, \text{ entonces } A'' = \begin{pmatrix} a_{00}'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{22}'' \end{pmatrix}$$

En efecto:

a) Sabemos que es $a_{12}' = 0$ y que $A_{00}' = a_{11}' \cdot a_{22}' = 0$ y que no pueden ser simultáneamente nulos los elementos a_{12}' , a_{11}' , a_{22}' (por corolario 1.1.), por tanto solo hay dos alternativas:

1. $a_{11}' \neq 0$ y $a_{22}' = 0$
2. $a_{22}' = 0$ y $a_{11}' \neq 0$

b) Si $a_{11}' \neq 0$ y $a_{22}' = 0$ se tiene que

$$a_{01}'' = a_{01}' + h \cdot a_{11}' = a_{01}' - \frac{a_{01}'}{a_{11}'} \cdot a_{11}' = 0$$

$$a_{22}'' = a_{22}' = 0$$

$$a_{11}'' = a_{11}' \neq 0$$

para obtener los restantes elementos de la matriz, veamos las dos alternativas respecto a a_{02}' :

b1) Si es

$$a_{02}' \neq 0 \Rightarrow a_{00}'' = a_{00}' - 2 \cdot \frac{a_{01}'}{a_{11}'} a_{01}' + 2k a_{02}' + \frac{a_{01}'^2}{a_{11}'} a_{11}' =$$

$$= a_{00}' - \frac{a_{01}'^2}{a_{11}'} + 2k a_{02}'$$

$$\text{y para } k = -\frac{1}{2a_{02}'} \left(a_{00}' - \frac{a_{01}'^2}{a_{11}'} \right) \text{ será } a_{00}'' = 0$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a''_{02} \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ a''_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b2) Si es $a'_{02} = 0 \Rightarrow a''_{22} = a'_{02} + k a'_{22} = 0$:

$$A'' = \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Si $a_{11}' = 0$ y $a_{22}' \neq 0$ se tiene que e

$$a''_{02} = a'_{02} + k a'_{22} = a'_{02} - \frac{a'_{02}}{a'_{22}} a'_{22} = 0$$

$$a''_{11} = a'_{11} = 0$$

$$a''_{22} = a'_{22} \neq 0$$

para obtener los restantes elementos de la matriz, veamos las dos alternativas respecto a a_{01}' :

c1) Si es

$$\begin{aligned} a'_{01} \neq 0 \Rightarrow a''_{00} &= a'_{00} - 2 \cdot \frac{a'_{02}}{a'_{22}} a'_{02} + 2 h a'_{01} + \frac{a'^2_{02}}{a'_{22}} a'_{22} = \\ &= a'_{00} - \frac{a'^2_{02}}{a'_{22}} + 2 h a'_{01} \end{aligned}$$

$$\text{y para } h = -\frac{1}{2a'_{01}} \left(a'_{00} - \frac{a'^2_{02}}{a'_{22}} \right) \text{ será } a''_{00} = 0$$

$$A'' = \begin{pmatrix} 0 & a''_{01} & 0 \\ a''_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$$

c2) Si es $a'_{01} = 0 \Rightarrow a''_{11} = a'_{01} + h a'_{11} = 0$:

$$A'' = \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$$

3. INVARIANTES METRICOS:

3.01. ¿Qué son los invariantes métricos de una cónica?:

Sea una cónica Q de M^2 , de matriz $A = (a_{ij})$, y sea $B = (b_{ij})$ la matriz de paso del cambio métrico (u ortonormal):

$$A' = B.A.B^t$$

Es decir, es

$$B = \begin{pmatrix} 1 & b_{01} & b_{02} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

donde la matriz $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ es ortonormal, y $|B| = \pm 1$

Se llaman invariantes métricos de la cónica Q a las funciones $F(a_{ij})$ de los elementos de la matriz de la cónica que se mantienen invariantes en el cambio métrico ($F(a_{ij}) = F(a'_{ij})$).

Para determinar cuáles son estos invariantes, veamos el teorema siguiente.

3.02. Teorema 3.1:

Los invariantes métricos de una cónica de matriz A son:

$$1) |A|, \quad 2) A_{00}, \quad 3) a_{11} + a_{22}$$

En efecto:

$$1) \text{ De ser } A' = B.A.B^t \text{ se tiene: } |A'| = |B.A.B^t| = |B| \cdot |A| \cdot |B^t| = 1 \cdot |A| \cdot 1 = |A|$$

luego, efectivamente, es $|A'| = |A|$ Se denomina primer invariante métrico.

2) De ser

$$\begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{02} & a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & b_{01} & b_{02} \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

y siendo el polinomio característico de una matriz invariante para los cambios ortonormales, se tiene:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - l & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - l \end{vmatrix} = l^2 - (a_{11} + a_{22})l + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

análogamente:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} - l & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} - l \end{vmatrix} = l^2 - (a'_{11} + a'_{22})l + \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

identificando ambos polinomios, se obtienen los otros dos invariantes métricos:

$$\begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{12} & a'_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{que es el } \underline{\text{segundo invariante métrico}}$$

$$a'_{22} + a'_{22} = a_{11} + a_{12} \quad \text{que es el } \underline{\text{tercer invariante métrico}}$$

4. CONICAS IRREDUCIBLES:

4.01. Cónicas irreducibles o regulares:

Se llaman irreducibles, o regulares, o propias,, a las cónicas (Q, A) que tienen no nulo el primer invariante métrico.

$$Q \text{ irreducible} \Leftrightarrow |A| \neq 0$$

En estas cónicas no existen puntos singulares, pues si $(p_0, p_1, p_2) \cdot A = (0, 0, 0)$ entonces sería $p_0 = 0$.

Las cónicas regulares o irreducibles pueden clasificarse en dos grupos, según que el segundo invariante métrico sea distinto de cero o bien, sea igual a cero.

4.02. Primer grupo de cónicas regulares ($A_{00} \neq 0$):

La matriz reducida de estas cónicas, según el teorema 2.3, es:

$$A'' = \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, la ecuación reducida queda:

$$a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{00} = 0$$

los invariantes métricos son:

$$|A| = a''_{00} \cdot a''_{11} \cdot a''_{22} \neq 0$$

$$A_{00} = a''_{11} \cdot a''_{22} \neq 0$$

$$a_{11} + a_{22} = a''_{11} + a''_{22} \neq 0$$

también, evidentemente:

$$|A| = a''_{00} \cdot A_{00}$$

4.03. Teorema 4.1:

1º) La condición necesaria y suficiente para que una cónica irreducible tenga centro propio es que $A_{00} \neq 0$.

2º) Si $A_{00} \neq 0$ entonces el centro y los ejes son centro y ejes de simetría de la cónica.

En efecto:

1º) Es evidente, por definición de cónica irreducible y teorema 1.2

2º) Veamos en primer lugar que el centro de la cónica es el origen (0, 0):

se tiene, por definición de centro, que

$$\forall (0, x_0, x_1) \in r_{00}, (1, c_1, c_2) \cdot \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{o sea: } (a'_{00}, c_0 a'_{11}, c_1 a'_{22}) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = c_0 a'_{11} \cdot x_0 + c_1 a'_{22} \cdot x_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} c_0 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

en cuanto a los diámetros, como contienen al centro (0, 0), sus ecuaciones serán de la forma:

$$y = \frac{d}{c} \cdot x, \quad y = \frac{d'}{c'} \cdot x$$

y al ser ejes, serán perpendiculares: $\frac{d}{c} \cdot \frac{d'}{c'} = -1 \Rightarrow \frac{d'}{c'} = -\frac{c}{d}$

y las ecuaciones de ambos ejes son de la forma:

$$y = \frac{d}{c} \cdot x, \quad y = -\frac{c}{d} \cdot x \Rightarrow \begin{cases} cy = dx \\ dy = -cx \end{cases}$$

de la relación de conjugación:

$$(0, c, d) \cdot \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a'_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ -c \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow d \cdot c \cdot (a'_{11} - a'_{22}) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{si } a'_{11} \neq a'_{22} \Rightarrow c = d = 0 \Rightarrow \text{ejes: } y = 0, x = 0 \\ \text{Si } a'_{11} = a'_{22} \Rightarrow \text{cualquier recta que pase por (0,0) es eje} \end{cases}$$

4.04. Las cónicas regulares del primer grupo con el segundo invariante métrico positivo:

Se denomina ELIPSE a una cónica (Q, A) en la que

$$|A| \neq 0$$

$$A_{00} > 0$$

4.05. Teorema 4.2:

En una elipse se verifica:

- 1) Tiene centro y ejes propios que son centro y ejes de simetría de la cónica.
- 2) $\text{Sign}(a'_{11}) = \text{sign}(a'_{22})$
- 3) No tiene puntos en la recta del finito.

En efecto:

- 1) Es inmediato, por el teorema 4.1
- 4) Siendo $A_{00} = a_{11}' \cdot a_{22}' > 0 \Rightarrow \text{Sign}(a_{11}') = \text{sign}(a_{22}')$
- 2) Veamos cual seria la intersección de la elipse con la recta impropia:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a_{00}'x_0^2 + a_{11}'x_1^2 + a_{22}'x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = x_1 = x_2 = 0$$

pero el punto (0, 0, 0) no es un punto del espacio P^2 .

Se denomina Elipse real a una elipse tal que

$$\text{sign}(a_{11}'') = \text{sign}(a_{22}'') \neq \text{sign}(a_{00}''), \text{ o, equivalentemente, } \text{sign}|A| \neq \text{sign}(a_{11}'' + a_{22}'')$$

Se denomina Elipse imaginaria a una elipse tal que

$$\text{Sign}(a_{11}'') = \text{sign}(a_{22}'') = \text{sign}(a_{00}''), \text{ o, equivalentemente, } \text{sign}|A| = \text{sign}(a_{11}'' + a_{22}'')$$

Las elipses, tanto reales como imaginarias, se llaman Circunferencias si $a_{11}' = a_{22}'$

Las ecuaciones de estas cónicas son, en definitiva, de la forma:

$$a_{00}''x_0^2 + a_{11}''x_1^2 + a_{22}''x_2^2 = 0 \Rightarrow a_{11}''x^2 + a_{22}''y^2 + a_{00}'' = 0$$

La ecuación reducida de una elipse real:

$$a_{11}''x^2 + a_{22}''y^2 + a_{00}'' = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{-a_{00}''/a_{11}''} + \frac{y^2}{-a_{00}''/a_{22}''} = 1$$

o sea:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{con } a = \sqrt{-\frac{a_{00}''}{a_{11}''}}, \quad b = \sqrt{-\frac{a_{00}''}{a_{22}''}}$$

La ecuación reducida de una elipse imaginaria:

$$a_{11}''x^2 + a_{22}''y^2 + a_{00}'' = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{a_{00}''/a_{11}''} + \frac{y^2}{a_{00}''/a_{22}''} = -1$$

o sea:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1, \quad \text{con } a = \sqrt{\frac{a_{00}''}{a_{11}''}}, \quad b = \sqrt{\frac{a_{00}''}{a_{22}''}}$$

La ecuación reducida de una circunferencia real:

$$a_{11}''x^2 + a_{22}''y^2 + a_{00}'' = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = -\frac{a_{00}''}{a_{11}''} = -\frac{a_{00}''}{a_{22}''}$$

o sea:

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{con } r = \sqrt{-\frac{a''_{00}}{a''_{11}}} = \sqrt{-\frac{a''_{00}}{a''_{22}}}$$

La ecuación reducida de una circunferencia imaginaria:

$$a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{00} = 0 \Rightarrow -x^2 - y^2 = \frac{a''_{00}}{a''_{11}} = \frac{a''_{00}}{a''_{22}}$$

o sea:

$$x^2 + y^2 = -r^2, \quad \text{con } r = \sqrt{\frac{a''_{00}}{a''_{11}}} = \sqrt{\frac{a''_{00}}{a''_{22}}}$$

4.06. Las cónicas regulares del primer grupo con el segundo invariante métrico negativo:

Se denomina HIPERBOLA a una cónica (Q, A) en la que

$$\begin{aligned} |A| &\neq 0 \\ A_{00} &< 0 \end{aligned}$$

4.07. Teorema 4.3:

En una hipérbola se verifica:

- 1) Tiene centro y ejes propios que son centro y ejes de simetría de la cónica.
- 2) $\text{Sign}(a''_{11}) \neq \text{sign}(a''_{22})$
- 5) Tiene dos puntos en la recta del finito.

En efecto:

- 1) Es inmediato, por el teorema 4.1
- 2) Siendo $A_{00} = a'_{11} \cdot a'_{22} < 0 \Rightarrow \text{Sign}(a''_{11}) \neq \text{sign}(a''_{22})$
- 3) Veamos cual sería la intersección de la hipérbola con la recta impropia:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a'_{00}x_0^2 + a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 = 0 \Rightarrow x_2 = \sqrt{-\frac{a'_{11}}{a'_{22}}} \cdot x_1$$

por tanto, son puntos del infinito:

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & +\sqrt{-\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0, & 1, & -\sqrt{-\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \end{pmatrix}$$

al tener puntos del infinito, la hipérbola tiene asíntotas (son, como ya sabemos, las rectas polares de sus puntos del infinito):

$$\begin{pmatrix} 0, & 1, & \pm\sqrt{-\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{x}{a''_{00}/a''_{11}} \pm \frac{y}{a''_{00}/\sqrt{a''_{11} \cdot a''_{22}}} = 0$$

Llamando $a^2 = \frac{a''_{00}}{a''_{11}}$ y $b^2 = \frac{a''_{00}}{a''_{22}}$, se tiene: $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{ab} = 0$

Por tanto las asíntotas son:

$$y = +\frac{b}{a}.x, \quad y = -\frac{b}{a}.x$$

La ecuación de la hipérbola quedaría así:

$$a'_{00}x_0^2 + a'_{11}x_1^2 + a'_{22}x_2^2 = 0 \Rightarrow a'_{00} + a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{a''_{00}}{a''_{11}}} - \frac{y^2}{\frac{a''_{00}}{a''_{22}}} \pm 1 = 0$$

o sea:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Una Hipérbola equilátera es una hipérbola que tiene perpendiculares sus dos asíntotas, o sea, una hipérbola en la que las rectas

$$y = +\frac{b}{a}.x, \quad y = -\frac{b}{a}.x$$

son perpendiculares, esto es: $b/a = a/b$. Pero esto implica que $a^2 = b^2$, o sea: $a = b$.

Por tanto, la ecuación de una hipérbola equilátera es: $y^2 - x^2 = \pm 1$, y las asíntotas: $y = x$, $y = -x$

4.08. Teorema 4.4:

La condición necesaria y suficiente para que una hipérbola sea equilátera es que se anule el tercer invariante métrico.

En efecto:

De ser $a = b$, se tiene que $a^2 = b^2 \Rightarrow \frac{a''_{00}}{a''_{11}} = \pm \frac{a''_{00}}{a''_{22}} \Rightarrow a''_{11} = -a''_{22} \Rightarrow a''_{11} + a''_{22} = 0$

Al revés, evidentemente, se verifica también.

4.09. Segundo grupo de cónicas regulares ($A_{00} = 0$):

La matriz reducida de estas cónicas, según el teorema 2.4, es de alguna de las formas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a''_{02} \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ a''_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a''_{01} & 0 \\ a''_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, la ecuación reducida quedaría del alguna de las formas:

$$a''_{11}x^2 + 2a''_{02}y = 0; \quad 2a''_{01}x + a''_{22}y^2 = 0;$$

los invariantes métricos son:

$$|A| = -a''_{11} \cdot a''_{02} \neq 0 \text{ o bien } |A| = -a''_{22} \cdot a''_{01} \neq 0$$

$$A_{00} = 0$$

$$a_{11} + a_{22} = a''_{11} \text{ o bien } a_{11} + a_{22} = a''_{22}$$

Se denomina PARABOLA a una cónica (Q, A) en la que

$$|A| \neq 0$$

$$A_{00} = 0$$

4.10. Teorema 4.5:

En una parábola se verifica:

- 1) Tiene centro impropio.
- 2) Tiene un eje propio, que es eje de simetría de la cónica, y otro impropio (la recta del infinito).

En efecto:

- 1) Por el teorema 4.1, y siendo $A_{00} = 0$, el centro es impropio.

Para hallarlo, bastará considerar que $(p_0, p_1, p_2).A = (1 \ 0 \ 0)$, despejando por Cramer, se tendría:

$$p_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a''_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{vmatrix}}{A} = \frac{0}{A} = 0$$

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a''_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{vmatrix}}{A} = \frac{-a''_{01} \cdot a''_{22}}{-a''_{22} \cdot a''_{01}} = \frac{1}{a''_{01}}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ a''_{02} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{A} = \frac{0}{A} = 0$$

Y el centro impropio sería (0, 1, 0) para las parábolas de ecuación reducida $a''_{22}y^2 + 2a''_{01}x = 0$

También:

$$p_0 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & a''_{02} \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{A} = \frac{0}{A} = 0$$

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & a''_{02} \\ 0 & 0 & 0 \\ a''_{02} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{A} = \frac{0}{A} = 0$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ a''_{02} & 0 & 0 \end{vmatrix}}{A} = \frac{-a''_{02} \cdot a''_{11}}{A} = \frac{-a''_{02} \cdot a''_{11}}{-a''_{11} \cdot a''_{02}^2} = \frac{1}{a''_{02}}$$

Y el centro impropio seria $(0, 0, 1)$ para las parábolas de ecuación reducida $a''_{11}x^2 + 2a''_{02}y = 0$.

2) Los ejes pueden ser, en principio, la recta r_{00} , así como toda recta que pase por el centro impropio de la cónica.

Veamos qué ocurre para las parábolas de ecuación reducida $a''_{22}y^2 + 2a''_{01}x = 0$ (el centro impropio de la cónica es $(0, 1, 0)$):

El eje impropio es $x_0 = 0$

El eje propio es $x_2 = 0$

Veamos qué ocurre para las parábolas de ecuación reducida $a''_{11}x^2 + 2a''_{02}y = 0$ (el centro impropio de la cónica es $(0, 0, 1)$):

El eje impropio es $x_0 = 0$

El eje propio es $x_1 = 0$

5. CONICAS REDUCIBLES:

5.01. Cónicas reducibles o irregulares:

Se llaman reducibles, o irregulares, o impropias a las cónicas que tienen nulo el primer invariante métrico.

$$Q \text{ reducible} \Leftrightarrow |A| = 0$$

En estas cónicas existen puntos singulares, que se caracterizan a continuación mediante los teoremas 5.1 y 5.2.

5.02. Teorema 5.1:

En una cónica (Q, A) reducible se verifica:

- a) Si rango $A = 2$ y $A_{00} \neq 0$, existe un único punto singular dado por

$$\left(1, \frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}}\right).$$

- b) Si rango $A = 2$ y $A_{00} = 0$, se tiene:

b.1) Si $A_{01} \neq 0$, el punto singular es el punto impropio $\left(0, 1, \frac{A_{02}}{A_{01}}\right)$

b.2) Si $A_{02} \neq 0$, el punto singular es el punto impropio $\left(0, \frac{A_{01}}{A_{02}}, 1\right)$

- b.3) Si $A_{01} = A_{02} = 0$, son puntos singulares los puntos impropios

$$\left(0, \frac{A_{12}}{A_{22}}, 1\right)$$

$$\left(0, 1, \frac{A_{12}}{A_{11}}\right)$$

- c) Si rango $A = 1$, existe una recta de puntos singulares.

En efecto:

$$a) \text{ De ser: } (p_0, p_1, p_2) \cdot A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} p_0 a_{00} + p_1 a_{01} + p_2 a_{02} = 0 \\ p_0 a_{01} + p_1 a_{11} + p_2 a_{12} = 0 \\ p_0 a_{02} + p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = 0 \end{cases}$$

Tomando como parámetro p_0 en las dos últimas ecuaciones:

$$\begin{cases} p_1 a_{11} + p_2 a_{12} = -p_0 a_{01} \\ p_1 a_{12} + p_2 a_{22} = -p_0 a_{02} \end{cases}$$

$$p_1 = \frac{\begin{vmatrix} -p_0 a_{01} & a_{12} \\ -p_0 a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{00}} = -p_0 \frac{\begin{vmatrix} a_{01} & a_{12} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{00}} = -p_0 \frac{A_{01}}{A_{00}}$$

$$p_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -p_0 a_{01} \\ a_{12} & -p_0 a_{02} \end{vmatrix}}{A_{00}} = -p_0 \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{01} \\ a_{12} & a_{02} \end{vmatrix}}{A_{00}} = p_0 \frac{A_{02}}{A_{00}}$$

haciendo $p_0 = 1$, se tiene el punto singular $\left(1, \frac{A_{01}}{A_{00}}, \frac{A_{02}}{A_{00}}\right)$

b) Sea ahora $\text{rango } A = 2$ y $A_{00} = 0$

b.1) Si es $A_{01} \neq 0$ escribimos el sistema en la forma:

$$\begin{cases} p_0 a_{01} + p_2 a_{12} = -p_1 a_{11} \\ p_0 a_{02} + p_2 a_{22} = -p_1 a_{12} \end{cases} \Rightarrow p_0 = 0, p_2 = p_1 \cdot \frac{A_{02}}{A_{01}} \Rightarrow \left(0, p_1, p_1 \cdot \frac{A_{02}}{A_{01}}\right)$$

haciendo $p_1 = 1$, se tiene el punto singular $\left(0, 1, \frac{A_{02}}{A_{01}}\right)$

b.2) Si es $A_{02} \neq 0$ escribimos el sistema en la forma:

$$\begin{cases} p_0 a_{01} + p_1 a_{11} = -p_2 a_{21} \\ p_0 a_{02} + p_1 a_{12} = -p_2 a_{22} \end{cases} \Rightarrow p_0 = 0, p_1 = p_2 \cdot \frac{A_{01}}{A_{02}} \Rightarrow \left(0, p_2 \cdot \frac{A_{01}}{A_{02}}, p_2\right)$$

haciendo $p_2 = 1$, se tiene el punto singular $\left(0, \frac{A_{01}}{A_{02}}, 1\right)$

b.2) Si $A_{01} = A_{02} = 0$ entonces será (por ser $\text{rango } A = 2$):

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ o bien } \begin{vmatrix} a_{00} & a_{02} \\ a_{02} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

en el primer caso:

$$\begin{cases} p_0 a_{00} + p_1 a_{01} = -p_2 a_{01} \\ p_0 a_{01} + p_1 a_{11} = -p_2 a_{12} \end{cases} \Rightarrow p_0 = 0, p_1 = p_2 \cdot \frac{A_{12}}{A_{22}} \Rightarrow \left(0, p_2 \cdot \frac{A_{12}}{A_{22}}, p_2\right)$$

en el segundo caso:

$$\begin{cases} p_0 a_{00} + p_2 a_{02} = -p_1 a_{01} \\ p_0 a_{02} + p_2 a_{22} = -p_1 a_{12} \end{cases} \Rightarrow p_0 = 0, p_2 = p_1 \cdot \frac{A_{12}}{A_{22}} \Rightarrow \left(0, p_1, p_1 \cdot \frac{A_{12}}{A_{22}}\right)$$

resultando los puntos singulares: $\left(0, \frac{A_{12}}{A_{22}}, 1\right)$ y $\left(0, 1, \frac{A_{12}}{A_{11}}\right)$

c) Sin $\text{rango } A = 1$, el sistema anterior se reduce a una sola ecuación:

$$p_0 a_{00} + p_1 a_{01} + p_2 a_{02} = 0$$

que es una recta de puntos singulares.

5.03. Teorema 5.2:

En una cónica (Q, A) reducible se verifica:

- a) La recta determinada por un punto singular y un punto de la cónica está contenida en la cónica.
- b) La recta determinada por dos puntos singulares es, toda ella, una recta de puntos singulares.

En efecto:

a) Sean p un punto singular, y sea q un punto cualquiera de la cónica. La recta que les contiene es de la forma $cp + dq$, y verifica la ecuación de la cónica.

$$(cp + dq).A.(cp^t + dq^t) = c^2 p.A.p^t + dcq.A.q^t + cdq.A.q^t + d^2 q.A.q^t = 0$$

- c) Sean p y q dos puntos singulares y sea $x = (x_0, x_1, x_2)$ un punto genérico de la cónica. Se tiene:

$$(cp + dq).A.x^t = cpAx^t + dqAx^t = 0$$

y la recta $cp + dq$ es singular.

5.04. Primer grupo de cónicas irregulares:

La matriz reducida de estas cónicas, según el teorema 2.3, es:

$$A'' = \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, la ecuación reducida queda:

$$a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + a''_{00} = 0$$

los invariantes métricos son:

$$\left. \begin{aligned} |A| &= a'''_{00} \cdot a'''_{11} \cdot a'''_{22} = 0 \\ A_{00} &= a'''_{11} \cdot a'''_{22} \neq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a'''_{00} = 0$$

$$a_{11} + a_{22} = a'''_{11} + a'''_{22} \neq 0$$

de donde, la ecuación es, siempre, de la forma:

$$a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 = 0$$

5.05. Las cónicas irregulares del primer grupo con el segundo invariante métrico positivo:

Esto quiere decir

$$|A| = 0$$

$$A_{00} > 0$$

y por tanto, que $\text{sign}(a''_{11}) = \text{sign}(a''_{22})$, con lo que la ecuación reducida de la cónica es de la forma:

$$\left(y + i\sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \cdot x \right) \left(y - i\sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \cdot x \right) = 0$$

que representa a UN PAR DE RECTAS IMAGINARIAS NO PARALELAS.

5.06. Las cónicas irregulares del primer grupo con el segundo invariante métrico negativo:

Esto quiere decir

$$|A| = 0$$

$$A_{00} < 0$$

y por tanto, que $\text{sign}(a''_{11}) \neq \text{sign}(a''_{22})$, con lo que la ecuación reducida de la cónica es de la forma:

$$\left(y + \sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \cdot x \right) \left(y - \sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \cdot x \right) = 0$$

que representa a UN PAR DE RECTAS REALES NO PARALELAS.

5.07. Teorema 5.3:

Una cónica reducible con $A_{00} \neq 0$ representará un par de rectas perpendiculares si $a_{11} + a_{22} = 0$.

En efecto:

a) Si son imaginarias:

$$\left(i\sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \right) \left(-i\sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \right) = -1 \Leftrightarrow \frac{a''_{11}}{a''_{22}} = -1 \Leftrightarrow a''_{11} = -a''_{22} \Leftrightarrow a''_{11} + a''_{22} = a_{11} + a_{22} = 0$$

b) Si son reales:

$$\left(\sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \right) \left(-\sqrt{\frac{a''_{11}}{a''_{22}}} \right) = -1 \Leftrightarrow \frac{a''_{11}}{a''_{22}} = -1 \Leftrightarrow a''_{11} = -a''_{22} \Leftrightarrow a''_{11} + a''_{22} = a_{11} + a_{22} = 0$$

5.08. Segundo grupo de cónicas irregulares:

La matriz reducida de estas cónicas, según el teorema 2.4, es de alguna de las formas:

$$\begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a''_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a''_{00} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y, por consiguiente, la ecuación reducida quedaría de alguna de las formas:

$$a''_{00} + a''_{22}y^2 = 0; \quad a''_{00} + a''_{11}x^2 = 0;$$

los invariantes métricos son:

$$|A| = 0$$

$$A_{00} = 0$$

$$a_{11} + a_{22} = a'''_{11} \text{ o bien } a_{11} + a_{22} = a'''_{22}$$

Y resulta:

$$\left(y + \sqrt{-\frac{a''_{00}}{a''_{22}}} \right) \left(y - \sqrt{-\frac{a''_{00}}{a''_{22}}} \right) = 0, \text{ o bien } \left(x + \sqrt{-\frac{a''_{00}}{a''_{11}}} \right) \left(x - \sqrt{-\frac{a''_{00}}{a''_{11}}} \right) = 0$$

y serán UN PAR DE RECTAS IMAGINARIAS PARALELAS si:

$$\text{sign}(a''_{00}) = \text{sign}(a''_{22}), \text{ o bien, si } \text{sign}(a''_{00}) = \text{sign}(a''_{11})$$

y serán UN PAR DE RECTAS REALES PARALELAS si:

$$\text{sign}(a''_{00}) \neq \text{sign}(a''_{22}), \text{ o bien, si } \text{sign}(a''_{00}) \neq \text{sign}(a''_{11})$$

finalmente, serían UN PAR DE RECTAS REALES Y COINCIDENTES si $a_{00}'' = 0$

5.09. Teorema 5.4:

- a) Si $A_{11} + A_{22} = 0$ las rectas son reales y coincidentes.
- b) Si $A_{11} + A_{22} > 0$ las rectas son imaginarias paralelas no coincidentes.
- c) Si $A_{11} + A_{22} < 0$ las rectas son reales paralelas no coincidentes.

En efecto:

a) Si $A_{11} + A_{22} = 0$ entonces es $a_{00}'' = 0$

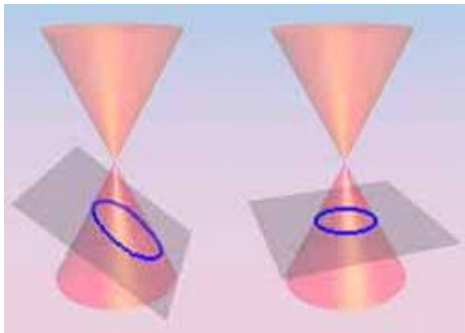
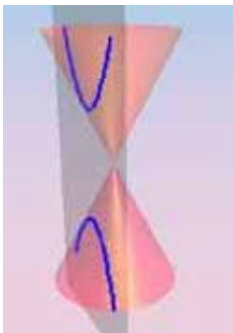
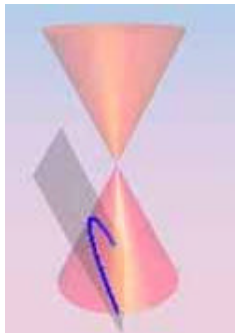
b) Si $A_{11} + A_{22} > 0$ entonces $\text{sign}(a''_{00}) = \text{sign}(a''_{22})$, o bien, si $\text{sign}(a''_{00}) = \text{sign}(a''_{11})$

c) Si $A_{11} + A_{22} < 0$ entonces $\text{sign}(a''_{00}) \neq \text{sign}(a''_{22})$, o bien, si $\text{sign}(a''_{00}) \neq \text{sign}(a''_{11})$

ANEXO 1

CUADRO RESUMEN

Pág 1/2

CONICAS REGULARES $ A \neq 0$	
PRIMER GRUPO $A_{00} \neq 0$ $A_{00} \neq 0$  ELIPSE ($A_{00} > 0$)  HIPÉRBOLA ($A_{00} < 0$)	SEGUNDO GRUPO $A_{00} = 0$ $A_{00} = 0$  PARÁBOLA

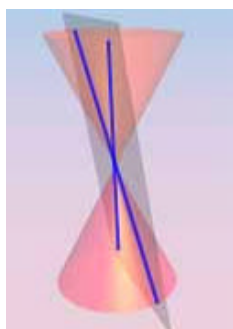
CONICAS IRREGULARES

$$|A| = 0$$

PRIMER GRUPO

$$A_{00} \neq 0$$

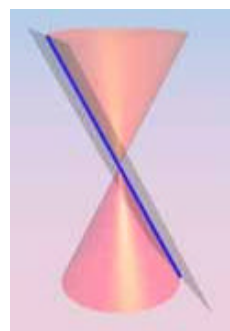
**[PAR DE RECTAS IMAGINARIAS NO
PARALELAS] ($A_{00} > 0$)**



**PAR DE RECTAS REALES NO
PARALELAS ($A_{00} < 0$)**

SEGUNDO GRUPO

$$A_{00} = 0$$



PAR DE RECTAS PARALELAS

NOTA: Las imágenes cónicas han sido tomadas de la página web
<http://www.math.com/tables/algebra/es-conics.htm>.

ANEXO 2

BIBLIOGRAFIA

ABELLANAS: Elementos de Matemáticas
REY PASTOR: Geometría Analítica
DONEDDU: Complements de Geometrie Algebrique
PINILLA: Programación lineal, cónicas, cuádricas, curvas y superficies.
KEEDY-NELSON: Geometría
GORDON FULLER: Geometría analítica
MARCOS DE LANUZA: Geometría analítica
LEHMANN: Geometría analítica
CASTELNUOVO: Lecciones de geometría analítica.
SEVERI: Elementos de Geometría.

PAGINAS WEB SOBRE CONICAS:

<http://www.math.com/tables/algebra/es-conics.htm>
<http://platea.pntic.mec.es/~jescuder/conicas.htm>
<http://www.lafacu.com/apuntes/matematica/conicas/>
http://vitalsoft.org.org.mx/mja/Descartes/conicas_eg2g.htm
[http://www.pntic.mec.es/Descartes/Unidades Didacticas/Otros/conicas.
htm](http://www.pntic.mec.es/Descartes/Unidades_Didacticas/Otros/conicas.htm)
<http://www.terra.es/personal/jftjft/Varios/Libros/Conicas.htm>

ANEXO 3

EJERCICIOS DE APLICACION

a) Enunciados:

1. Escribir la ecuación de una cónica de M^2 , cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$
2. Hallar los puntos del infinito de la cónica del ejercicio anterior.
3. Hallar cual ha de ser el ángulo de giro del sistema cartesiano de referencia para que no aparezca el termino en $x.y$ en la ecuación de la cónica

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + \sqrt{3}xy + 1 = 0$$

4. Determinar los invariantes métricos de las cónicas de los ejercicios 1 y 2.
5. a) Determinése algún procedimiento de cálculo para el centro de una cónica.
b) Determinar las coordenadas del centro de la cónica de ecuación:

$$13x^2 + 5y^2 + 4xy - 26x - 22y + 23 = 0$$

6. Dada la cónica $x^2 - y^2 - 1 = 0$, se pide:
 - a) La matriz de la cónica.
 - b) La recta polar del punto $p(3, 1)$.
 - c) Calcular α para que el punto $q(\alpha, 2)$ sea el conjugado del punto $p(3, 1)$.
 - d) Determinar el polo de la recta $y = 2x + 1$.
7. Dada la cónica $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y + 8 = 0$, se pide:
Calcular la recta polar del punto $(3, 2)$, el polo de la recta $2x + 3y + 7 = 0$, y el centro de la cónica, si existe.
8. a) Expresar matemáticamente la relación de conjugación de diámetros de una cónica.
b) Hállese la ecuación del diámetro conjugado de $y = 2x$ respecto de la cónica $x^2 + y^2 = 25$.
9. Calcular centro, ejes y vértices de la cónica

$$-x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 4 = 0$$

10. Reducir la cónica

$$4x^2 - 2y^2 + 8xy - x + 5 = 0$$

11. Clasificar la cónica f y determinar su ecuación reducida

$$f \equiv y^2 - 2xy + 4y - 2x + 3 = 0$$

12. Dada la ecuación siguiente, clasificar la cónica y obtener su ecuación reducida.

$$x^2 + 2xy + y^2 + c - 2y + 1 = 0$$

13. Clasificar la cónica dada por

$$13x^2 + 5y^2 + 4xy - 26x - 22y + 23 = 0$$

obtener su ecuación reducida y representar la cónica en un diagrama cartesiano.

14. Clasificar la cónica:

$$6x^2 + xy - 7x - 2y^2 + 7y - 5 = 0$$

Obtener su ecuación reducida. Expresión cartesiana.

15. Estudiar la cónica

$$25x^2 - 20xy + 20x + 4y^2 - 8y + 3 = 0$$

16. Estudiar la cónica

$$4x^2 + y^2 - 4xy + 1 = 0$$

17. En una parábola de ecuación reducida $y^2 = ax$ se define la directriz de la misma como la recta $x = -a/4$, y su foco por el punto $F(f_1, 0)$ donde es $f_1 = a/4$. Se pide determinar la ecuación de una parábola de este tipo en los casos siguientes:

- La ecuación de la directriz es $x = -2$.
- Pasa por el punto $(6, 6)$
- Su foco es $F(3, 0)$.

18. En una elipse real de ecuación reducida $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ se define la excentricidad e por

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \text{ y los focos los puntos } F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

Hallar la ecuación de la elipse, referida a un sistema ortonormal en que los ejes de la elipse coinciden con los ejes de coordenadas, en cada uno de los casos siguientes:

- $e = 3/5$ y distancia focal (distancia desde el foco al origen) igual a 3.

$$2) e = \frac{\sqrt{5}}{3}, a = 3.$$

$$3) a = 7 \text{ y la elipse pasa por } p\left(3, \frac{10}{7}\sqrt{10}\right).$$

$$4) \text{ La elipse pasa por } p\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \text{ y } q\left(-3, \frac{3}{4}\sqrt{7}\right)$$

- Dos vértices son $(10, 0)$ y $(0, 6)$

19. a) Demuestra que en elipse real $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ los vértices son los puntos $(a, 0), (-a, 0), (0, b), (0, -b)$.

- Probar que la distancia de cualquiera de los focos al vértice $(0, b)$ es a .

- Probar que la suma $d + d'$ de las distancias de los focos $(f, 0)$ y $(f', 0)$ a un punto

$$\text{genérico de la elipse } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \text{ es } 2a.$$

20. En una circunferencia real, de ecuación reducida $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 1$, se llama radio a la

$$\text{constante } a = \sqrt{\frac{-\hat{a}_{00}}{\hat{a}_{22}}}. \text{ Probar que todo punto de la circunferencia dista } a \text{ del centro.}$$

b) Soluciones:

1. Escribir la ecuación de una cónica de M^2 , cuya matriz es $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

SOLUC: $x^2 - 2y^2 + 4x - 4y + 3 = 0$

2. Hallar los puntos del infinito de la cónica del ejercicio anterior.

SOLUC: $(0, 1, -2 + \sqrt{14})$ y $(0, 1, -2 - \sqrt{14})$

3. Hallar cual ha de ser el ángulo de giro del sistema cartesiano de referencia para que no aparezca el termino en x.y en la ecuación de la cónica

$$x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + \sqrt{3}xy + 1 = 0$$

SOLUC: $J = \frac{1}{2} \arctg \frac{2a_{12}}{a_{22} - a_{11}} = 30^\circ$

4. Determinar los invariantes métricos de las cónicas de los ejercicios 1 y 2.

SOLUC: en la del ejercicio 1: $|A| = -2$, $A_{00} = -2$, $a_{11} + a_{22} = -1$

en la del ejercicio 2: $|A| = -\frac{31}{4} + 2\sqrt{3}$, $A_{00} = 5/4$, $a_{11} + a_{22} = 3$

5. a) Determinése algún procedimiento de cálculo para el centro de una cónica.
b) Determinar las coordenadas del centro de la cónica de ecuación:

$$13x^2 + 5y^2 + 4xy - 26x - 22y + 23 = 0$$

SOLUC:

a) Por definición de centro $(1, c_1, c_2)$: $(0, m, n) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0$, para todo m, n

Y de aquí: $m(a_{01} + a_{11}c_1 + a_{12}c_2) + n(a_{02} + a_{12}c_1 + a_{22}c_2) = 0$

Y teniendo en cuenta que m y n pueden ser números cualesquiera: $\begin{cases} a_{01} + a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = 0 \\ a_{02} + a_{12}c_1 + a_{22}c_2 = 0 \end{cases}$

Que es un sistema lineal y, para que exista centro, ha de ser compatible determinado, o sea:

$$A_{00} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

(esta condición se cumple siempre en las cónicas tipo elipse o hipérbola)

b) en este caso es:

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 61 \neq 0$$

por tanto, existe centro, que es $C(43/61, 117/61)$.

6. Dada la cónica $x^2 - y^2 - 1 = 0$, se pide:
a. La matriz de la cónica.
b. La recta polar del punto p(3, 1).

- c. Calcular α para que el punto $q(\alpha, 2)$ sea el conjugado del punto $p(3, 1)$.
 d. Determinar el polo de la recta $y = 2x + 1$.

SOLUC:

$$a) A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) $y = 3x - 1$

c) $\alpha = 1$

d) polo: $p(-2, -1)$

7. Dada la cónica $x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y + 8 = 0$, se pide:

Calcular la recta polar del punto $(3, 2)$, el polo de la recta $2x + 3y + 7 = 0$, y el centro de la cónica, si existe.

SOLUC:

Recta polar: $y = \frac{3}{4}x + 2$

Polo de $2x + 3y + 7 = 0$: No hay polo

Centro de la cónica: no existe centro.

8. a) Expresar matemáticamente la relación de conjugación de diámetros de una cónica.
 b) Hállese la ecuación del diámetro conjugado de $y = 2x$ respecto de la cónica $x^2 + y^2 = 25$.

SOLUC:

a)

$$\begin{cases} y = mx + n \\ y = m'x + n' \end{cases} \text{ diámetros conj} \Rightarrow (0, 1, m) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{01} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ m' \end{pmatrix} = 0$$

efectuando el producto matricial: $a_{11} + a_{12}(m + m') + a_{12}mm' = 0$

b) $y = -\frac{1}{2}x$

9. Calcular centro, ejes y vértices de la cónica

$$-x_1^2 + x_2^2 + 6x_1 - 4 = 0$$

SOLUC:

Centro: $(-3, 0)$

Ejes: $y = 0$, $x = -3$

Vértices:

$$(-3 + \sqrt{14}, +i\sqrt{13}), (-3 + \sqrt{14}, -i\sqrt{13}), (-3 - \sqrt{14}, +i\sqrt{13}), (-3 - \sqrt{14}, -i\sqrt{13})$$

10. Reducir la cónica

$$4x^2 - 2y^2 + 8xy - x + 5 = 0$$

SOLUC:

Ecuación reducida: $\frac{239}{48} + 6x^2 - 4y^2 = 0$

11. Clasificar la cónica f y determinar su ecuación reducida

$$f \equiv y^2 - 2xy + 4y - 2x + 3 = 0$$

SOLUC:

Clasificación: Es una cónica reducible ($\Delta A = 0$), del primer grupo ($A_{00} \neq 0$), y por ser $A_{00} < 0$ se trata de un par de rectas reales no paralelas.

Ec. reducida:

$$y = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}} \cdot x, \quad y = -\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}} \cdot x$$

12. Dada la ecuación siguiente, clasificar la cónica y obtener su ecuación reducida.

$$x^2 + 2xy + y^2 + x - 2y + 1 = 0$$

SOLUC:

Clasificación: Es una cónica irreducible ($\Delta A \neq 0$), del segundo grupo ($A_{00} = 0$), por tanto, se trata de una parábola.

Ec. reducida: $y = \pm \sqrt{\frac{2}{3}} x^2$

13. Clasificar la cónica dada por

$$13x^2 + 5y^2 + 4xy - 26x - 22y + 23 = 0$$

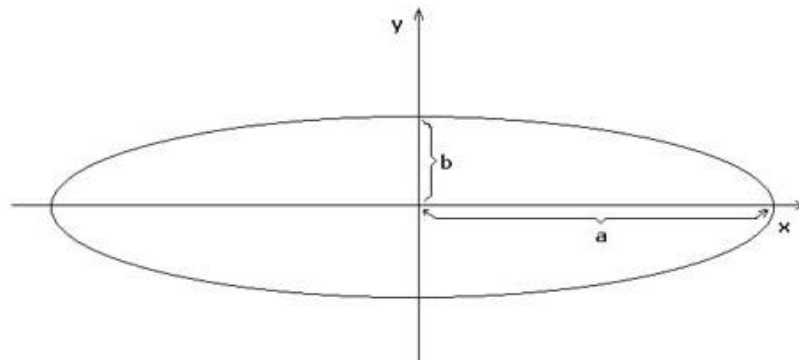
obtener su ecuación reducida y representar la cónica en un diagrama cartesiano.

SOLUC:

Clasificación: Es una cónica irreducible ($\Delta A \neq 0$), del primer grupo ($A_{00} \neq 0$), elipse ($A_{00} \neq 0$) y elipse real ($\text{sign} |A| \neq \text{sign}(a_{11} + a_{22})$).

Ec. reducida:

$$\left(\frac{x}{1/\sqrt{21}} \right)^2 - \left(\frac{y}{1/\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{443}{61}$$



$$(a = \frac{1}{\sqrt{21}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}})$$

14. Clasificar la cónica:

$$6x^2 + xy - 7x - 2y^2 + 7y - 5 = 0$$

Obtener su ecuación reducida. Expresión cartesiana.

SOLUC:

Clasificación: Es una cónica reducible ($|A| = 0$), del primer grupo ($A_{00} \neq 0$), dos rectas no paralelas reales ($A_{00} < 0$)

$$\text{Ec. reducida: } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{17}+2}{\sqrt{17}-2}} \cdot x$$

15. Estudiar la cónica

$$25x^2 - 20xy + 20x + 4y^2 - 8y + 3 = 0$$

SOLUC:

Invariantes métricos: $|A| = 0$, $A_{00} = 0$, $a_{11} + a_{22} = 29$

Clasific: conica reducible y par de rectas

$A_{11} = \text{adj } a_{11} = -4$, $A_{22} = \text{adj } a_{22} = -25 \Rightarrow A_{11} + A_{22} = -29 < 0 \Rightarrow$ par de rectas paralelas reales no coincidentes.

16. Estudiar la cónica

$$4x^2 + y^2 - 4xy + 1 = 0$$

SOLUC:

Invariantes métricos: $|A| = 0$, $A_{00} = 0$, $a_{11} + a_{22} = 5$

Clasific: conica reducible y par de rectas

$A_{11} = \text{adj } a_{11} = 1$, $A_{22} = \text{adj } a_{22} = 4 \Rightarrow A_{11} + A_{22} = 5 > 0 \Rightarrow$ par de rectas paralelas imaginarias no coincidentes.

17. En una parábola de ecuación reducida $y^2 = ax$ se define la directriz de la misma como la recta $x = -a/4$, y su foco por el punto $F(f_1, 0)$ donde es $f_1 = a/4$. Se pide determinar la ecuación de una parábola de este tipo en los casos siguientes:

- La ecuación de la directriz es $x = -2$.
- Pasa por el punto $(6, 6)$
- Su foco es $F(3, 0)$.

SOLUC:

- $y^2 = 8x$
- $y^2 = 6x$
- $y^2 = 12x$

18. En una elipse real de ecuación reducida $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ se define la excentricidad e por

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \text{ y los focos los puntos } F_1(\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \text{ y } F_2(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0).$$

Hallar la ecuación de la elipse, referida a un sistema ortonormal en que los ejes de la elipse coinciden con los ejes de coordenadas, en cada uno de los casos siguientes:

1) $e = 3/5$ y distancia focal (distancia desde el foco al origen) igual a 3.

$$2) e = \frac{\sqrt{5}}{3}, a = 3.$$

$$3) a = 7 \text{ y la elipse pasa por } p\left(3, \frac{10}{7}\sqrt{10}\right).$$

$$4) \text{ La elipse pasa por } p\left(2, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \text{ y } q\left(-3, \frac{3}{4}\sqrt{7}\right).$$

5) Dos vértices son $(10, 0)$ y $(0, 6)$

SOLUC:

$$\text{a) } \left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$$

$$\text{b) } \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{c) } \left(\frac{x}{7}\right)^2 + \left(\frac{y}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{d) } \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 1$$

$$\text{e) } \left(\frac{x}{10}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$$

-----o0o-----