INTEGRAL DE LEBESGUE-STIELTJES

0. Objetivos y procedimientos de la exposición:

0.1. Objetivos:

El objetivo de esta exposición es la presentación de la integral de Lebesgue-Stieltjes para funciones de una sola variable, con generalización para n variables.

0.2. Procedimientos:

Estudiaremos el tema intentando presentar en primer lugar el concepto de *clase aditiva de conjuntos,* y viendo como toda familia C de conjuntos engendra una clase aditiva mínima; en particular, la familia de los intervalos de R, que engendran, como clase aditiva mínima, lo que se llama *clase de Borel.*

A continuación intentaremos presentar alguna forma o modo de medir conjuntos, tratando de definir una medida. Empezaremos definiéndola para intervalos de R, luego para conjuntos que sean unión de sucesiones numerables de intervalos de R, hasta, finalmente, establecer una clase L de conjuntos que admitan tal medida. Será esta clase lo que llamaremos *clase de los conjuntos medibles*.

El siguiente paso en el procedimiento de la exposición es generalizar la medida a funciones de conjuntos, y trabajar con una P-medida dada.

1. Clases aditivas de conjuntos. La clase de Borel:

Definición 1:

Dado un espacio S, una clase de conjuntos de **S, F*,** es *aditiva* cuando, y solo cuando, se verifique que:

a) **S Î F***
b) Si todos los elementos de la sucesión numerable S_1, S_2, ..., S_n pertenecen a F* , entonces la unión también pertenece a **F*: S_1`U S_2 U ... U S_n Î F***
c) Si A pertenece a F* también su complementario S - A pertenece a F*.

Se prueba trivialmente que si F_1 y F_2 son dos clases aditivas del espacio S, también $F_1 \cap F_2$ es una clase aditiva del espacio S.

Teorema 1:

Dada una familia **C** de subconjuntos de **S**, existe siempre una clase F_b, de subconjuntos de **S** que cumple:

1) **C Î F_b.**
2) F_b es clase aditiva.
3) F_b es la mínima clase aditiva que contiene a **C.**

Demostración:

Sea **F'** la clase definida por:

$$F'=\{F_i / C \in F_i \qquad y \qquad F_i\_clase\_aditiva\_de\_S\}$$

Es claro que **F' ¹ Æ**, pues, al menos, el conjunto **P(S)** de las partes de **S** pertenece a **F**'. Consideremos entonces:

F_b = Ç F_i
F_i Î F'

Es inmediato que F_b es clase aditiva y **C Ì F_b**. Además se prueba fácilmente que es la mínima clase aditiva que contiene a **C**.

La clase F_b se llama *clase aditiva engendrada por* ***C.***

Definición 2:

Si **C** es el conjunto de los intervalos de **R** (abiertos, cerrados y semiabiertos), entonces, la clase F_b engendrada por **C** se llama *clase de los conjuntos de Borel de R*, y se denota por **B.**

2. La medida de Lebesgue:

Definición 3:

Sea **S** un conjunto y **H’** una familia de subconjuntos de **S**. Una *medida definida en H’* es una aplicación **L:H’→R** que verifique las dos condiciones siguientes:

a) Para todo conjunto **H** de **H’** es $\mathbf{L(H) \geq 0}$.

b) Si H es la unión de conjuntos disjuntos, H_i, de la familia H’ entonces la medida de H es la suma algebraica de las medidas de los H_i.

$$H = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \quad \wedge \quad H_i \cap H_j = \emptyset \;\Rightarrow\; L(H) = L(H_1) + L(H_2) + \ldots$$

Teorema 2:

Si **i = (a, b)** es un intervalo en **R**, entonces **L(i) = b – a** es una medida en la clase **I** de los intervalos de R.

En efecto:

a) Trivialmente, $\mathbf{L(i_k) = b_k - a_k \geq 0, \ \forall k}$.

b) Para una sucesión de intervalos disjuntos $\{i_k\} = \{(a_k, b_k)\}$, se cumple que $L(\Sigma i_k) = \Sigma L(i_k)$.

Así, pues, L (longitud del intervalo) es una medida en la familia I’ de los intervalos de R.

Teorema 3:

Sea **Fr** la familia de conjuntos de **R** que pueden expresarse como reunión de una sucesión numerable de intervalos de **R.**
Es claro que $\mathbf{I \subset Fr}$. Si definimos sobre **Fr** una aplicación **Lr:Fr → R** de forma que **Lr** aplicada a un elemento **F** de **Fr** que también pertenezca a **I** coincida con la medida **L** definida anteriormente en **I,** entonces se cumple que **Lr** es también una medida en **Fr.**

En efecto:

" I Î Fr, I = I1 È I2 È ... È In con Ij Ç Ik = Æ , si i ¹ j

con lo cual, es **L(I) = L(I1) + L(I2) + ... + L(In).**

Definición 4:

Sea el espacio formado por un intervalo **(a, b)** de **R** y consideremos un conjunto **S Ì (a, b).** Sea, asimismo, un elemento **I** de la clase **Fr** se verifica que **S Ì I Ì (a, b),** lo cual puede hacerse siempre, pues, al menos, se podría tomar **I = (a, b).**

En estas condiciones, definimos:

Medida exterior, Le(S), del conjunto **S**, es el extremo inferior o ínfimo del conjunto de números reales dado por **{L(I) / I** es un conjunto soporte y **S Ì I Ì (a, b)}. Esto es:**

Le(S) = infim {L(I) / I es un conjunto soporte y **S Ì I Ì (a, b)}**

Medida interior, Li(S), del conjunto **S,** es **b- a** menos la medida exterior del complementario **S'** de **S** en el espacio **(a, b)**:

Li(S) = b – a – Le(S')

Definición 5:

Un conjunto acotado **S** se dice que **es medible**, si, y solo sí, sus medidas exterior e interior coinciden.

Tal valor común **L(S) = Le(S) = Li(S)** se llama **medida de Lebesgue del conjunto S,** o, simplemente, **medida del conjunto S.**

Definición 6:

Un conjunto no acotado **S** se dice que **es nedible**, si y solo sí, es medible para todo valor de **x > o** la intersección $\mathbf{i_x}$ **Ç S** (donde es $\mathbf{i_x}$ **= [-x, x]**). En tal caso, se define **la medida de Lebesgue, o medida,** del conjunto **S** por el límite:

L(S) = lim (Ix Ç S)
x→ µ

Definición 7:

Se llama **clase de los conjuntos medibles lebesgue,** o, simplemente, **clase de los conjuntos medibles,** a la clase **L** formada por todos los conjuntos, acotados o no, que admiten la medida de **Lebesgue**. Una medida de estas características resulta ser, además, única.

La clase **L** resulta ser, pues, una clase más amplia que la clase **B** de los conjuntos de Borel de **R.**.

La noción de medida de **Lebesgue** puede generalizarse definiéndola como una función de conjunto sobre la clase **B** de los conjuntos de **Borel.**

Definición 8:

Una **función de conjunto no negativa y aditiva** es una función de conjunto **$P(S)$,** definida sobre **B,** que satisface las condiciones siguientes:

1) $P(S) \geq 0, \quad \forall S$

2) $P(S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n) = P(S_1) + P(S_2) + \ldots + p(S_n)$, si **$S_j \cap S_k = \emptyset$** para **$j \neq k$.**

3) Si **S** es **acotado $\Rightarrow$ $P(S)$ finita.**

Definición 9:

A toda función de conjunto, **$P(S)$,** le corresponde una función de puntos **$F(x; k)$, k** constante, definida de la manera siguiente:

$$f(x;k) = \begin{cases} P(k < \xi \leq x) & para\_x > k \\ 0 & para\_x = k \\ -P(x < \xi \leq k) & para\_x < k \end{cases}$$

Teorema 4:

1) Si es $k_1 < k_2$, entonces, es $f(x; k_1) - f(x; k_2) = P(k_1 < \xi \leq k_2)$.

2) Para un valor fijo **k_0,** y llamando **$f(x)$** a **$f(x; k_0)$,** se verifica que, **$f(x; k) = f(x) + const, \ \forall k \in R$**

3) Para cualquier medida **P** queda definida una función de puntos **$f(x)$,** determinada salvo una constante, no decreciente y finita para todo valor finito de **x,** de modo que la relación

$$f(b) - f(a) = P(a < \xi \leq b)$$

se verifica para cualquier intervalo **(a, b)** finito.

En efecto:

1) si es **$x > k1 > k2$:**

$$f(x; k_2) = P(k2 < \xi \leq x)$$
$$f(x; k_1) = P(k_1 < \xi \leq x)$$

o sea:

$$f(x; k_1) - f(x; k_2) = P(k_1 < \xi \leq x) - P(k2 < \xi \leq x) = P(k_1 < \xi \leq k_2)$$

si es **$k1 > k2 > x$:**

$$f(x; k_2) = -P(x < \xi \leq k_2)$$
$$f(x; k_1) = -P(x < \xi \leq k_1)$$

o sea:

$$f(x; k_1) - f(x; k_2) = P(x < \xi \leq k_2) - P(x < \xi \leq k_1) = P(k_1 < \xi \leq k_2)$$

luego, en todos los casos se verifica que $f(x;\,k_1) - f(x;\,k_2) = P(k_1 < x \leq k_2)$.

2) si es $k_0 > k$:

$$f(x;\,k) - f(x;\,k_0) = P(k < x \leq k_0) \Rightarrow f(x;\,k) = f(x;\,k_0) + P(k < x \leq k_0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x;\,k) = f(x) + P(k < x \leq k_0) \Rightarrow f(x;k) = f(x) + const.$$

si es $k_0 < k$:

$$f(x;\,k_0) - f(x;\,k) = P(k_0 < x \leq k) \Rightarrow f(x;\,k) = f(x;\,k_0) - P(k_0 < x \leq k) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x;\,k) = f(x) + P(k < x \leq k_0) \Rightarrow f(x;k) = f(x) + const.$$

luego, en todos los casos se verifica que **$f(x;\,k) = f(x) + const,\ \forall\, k \in R$**

3) si es $x > k_0$:

$f(x) = f(x;\,k_0) = P(k_0 < x \leq x)$, *por lo que es:*

$$f(a) = f(a;\,k_0) = P(k_0 < x \leq a)$$
$$f(b) = f(b;\,k_0) = P(k_0 < x \leq b)$$

y, por consiguiente:

$$f(b) - f(a) = P(k_0 < x \leq b) - P(k_0 < x \leq a) = P(a < x \leq b)$$

si es $k_0 < x$:

$f(x) = f(x;\,k_0) = P(k_0 < x \leq x)$, *por lo que es:*

$$f(a) = f(a;\,k_0) = P(k_0 < x \leq a)$$
$$f(b) = f(b;\,k_0) = P(k_0 < x \leq b)$$

y, por consiguiente:

$$f(b) - f(a) = P(k_0 < x \leq b) - P(k_0 < x \leq a) = P(a < x \leq b)$$

luego, en todos los casos se verifica que **$f(a) - f(b) = P(a < x \leq b)$**

3. Sumas de Darboux. Propiedades de monotonía:

Definición 10 (definición de las Sumas de Darboux):

Sea una medida dada sobre la clase **B** de los conjuntos de **Borel**, dada por una función de conjuntos **P(S)** o por la correspondiente función de puntos **f(x; k)**, que llamaremos **P**-medida.

Sea **S** un conjunto de Borel, de **P**-medida finita. Sea $\Pi(S)$ el conjunto infinito de todas sus particiones disjuntas, esto es, sea **$\Pi(S) = \{\Pi \,/\, \Pi$ partición disjunta de $S\} = \{\Pi \,/\, S = \cup S_j \wedge S_i \cap S_k = \emptyset$, si $i \neq k\}$.**

Sea asimismo **g(x)** una función definida y acotada en todo punto **x** de **S,** es decir, una función para la que existen siempre dos números reales, **m** y **M,** tales que **$m \leq g(x) \leq M$** para todo punto de **S,** y, también, para todo subconjunto

S_i, de la partición disjunta $\Pi = \{\cup S_j \Leftrightarrow S_i \cap S_k = \emptyset \text{ si } i \neq k\}$, existen números reales m_i y M_i, tales que $m_i \leq g(x) \leq M_i$ para todo punto de S_i.

Entonces:

a) Se define **Suma Superior de Darboux sobre el conjunto S para la partición disjunta Π y respecto a la función g(x)** como la expresión:

$$U(S,\Pi,g) = \sum_{k=1}^{n} M_k.P(S_k)$$

b) Se define **Suma Inferior de Darboux sobre el conjunto S para la partición disjunta Π y respecto a la función g(x)** como la expresión:

$$l(S,\Pi,g) = \sum_{k=1}^{n} m_k.P(S_k)$$

Teorema 5 (Propiedades de monotonía):

Sea **g(x)** una función de **P-**medida finita, definida y acotada en **S,** y sean Π_1 y Π_2 dos de las particiones disjuntas de **S.** Se verifica, entonces:

a) $m.P(S) \leq l(S,\Pi,g(x)) \leq U(S,\Pi,g(x)) \leq M.P(S)$

b) $U(S,\Pi',g(x)) \leq U(S,\Pi,g(x))$ y $l(S,\Pi,g(x)) \leq l(S,\Pi',g(x))$, si $\Pi' \supseteq \Pi$.

c) $l(S,\Pi_1,g(x)) \leq U(S,\Pi_2,g(x))$, para todo par de particiones Π_1 y Π_2.

d) Existen los números reales supremo del conjunto infinito de las sumas inferiores y ínfimo del conjunto infinito de las sumas superiores. Esto es, existen los números:

$$\sup\{l(S,\Pi,g(x)) \,/\, \Pi \in \Pi(S)\}$$
$$\inf\{U(S,\Pi,g(x)) \,/\, \Pi \in \Pi(S)\}$$

En efecto:

a) Para todo conjunto **S_k,** de la partición Π se verifica:

$$m \leq m_k \leq M_k \leq M \Rightarrow m.P(S_k) \leq m_k.P(S_k) \leq M_k.P(S_k) \leq M.P(S_k)$$

y, sumando, para todos los n puntos de la partición Π:

$$\sum_{k=1}^{n} m.P(S_k) \leq \sum_{k=1}^{n} m_k.P(S_k) \leq \sum_{k=1}^{n} M_k.P(S_k) \leq \sum_{k=1}^{n} M.P(S_k)$$

es decir:

$$m.P(S) \leq l(S,\Pi,g(x)) \leq U(S,\Pi,g(x)) \leq M.P(S)$$

b) Sean Π y Π' de modo que $\Pi \subset \Pi'$. Para probar la proposición bastará suponer que Π' tiene un solo subconjunto más que Π, es decir:

$$\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_n\}$$

$$\Pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, S_{n1}, S_{n2}\}$$

donde es $S_n = S_{n1} \cup S_{n2}$ y $S_{n1} \cap S_{n2} = \emptyset$. Cumpliéndose que $m_n \leq m_{ni}$ y $M_{ni} \leq M_n$, para $i = 1,2$.

Veamos las Sumas de Darboux:

$$l(S,\Pi',g(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} m_k.P(S_k) + m_{n1}.P(S_{n1}) + m_{n2}.P(S_{n2}) \geq \sum_{k=1}^{n-1} m_k.P(S_k) + m_n.P(S_{n1}) +$$

$$+ m_n.P(S_{n2}) = \sum_{k=1}^{n-1} m_k.P(S_k) + m_n.(P(S_{n1}) + P(S_{n2})) = \sum_{k=1}^{n-1} m_k.P(S_k) + m_n.P(S_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} m_k.P(S_k) = l(S,\Pi,g(x))$$

$$U(S,\Pi',g(x)) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k.P(S_k) + M_{n1}.P(S_{n1}) + M_{n2}.P(S_{n2}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} M_k.P(S_k) + M_n.P(S_{n1}) +$$

$$+ M_n.P(S_{n2}) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k.P(S_k) + M_n.(P(S_{n1}) + P(S_{n2})) = \sum_{k=1}^{n-1} M_k.P(S_k) + M_n.P(S_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M_k.P(S_k) = U(S,\Pi,g(x))$$

c) Para probar esta proposición consideremos la intersección de las particiones Π_1 y Π_2:

$$\Pi = \{ S_i \cap S_j \ / \ S_i \in \Pi_1 \text{ y } S_j \in \Pi_2 \}$$

entonces, es $\Pi_1 \subseteq \Pi$ y $\Pi_2 \subseteq \Pi$, por lo cual:

$$l(S,\Pi_1,g(x)) \leq l(S,\Pi,g(x)) \leq U(S,\Pi,g(x)) \leq U(S,\Pi_2,g(x))$$

d) Los conjuntos $\{l(S,\Pi,g(x)) \ / \ \Pi \in \mathrm{P}(S)\}$ y $\{U(S,\Pi,g(x)) \ / \ \Pi \in \mathrm{P}(S)\}$ están, por lo visto en a), superior e inferiormente acotados, respectivamente, por lo cual tienen supremo e ínfimo. Esto es, existe el supremo de las Sumas Inferiores de Darboux, y existe el ínfimo de las Sumas Superiores de Darboux.

4. Integral superior e inferior respecto a una P-medida. Funciones integrables Lebesgue-Stieltjes.

Definición 12 (de la integral inferior y superior):

El extremo superior, o supremo, de las Sumas Inferiores de Darboux se llama **integral inferior de la función g(x) sobre el conjunto S respecto de la P-medida.** Escribimos:

$$\underline{\int_S} g(x).dP(S) = \sup\{l(S,\Pi,g(x)) / \Pi \in \Pi(S)\}$$

El extremo inferior, o ínfimo, de las Sumas Superiores de Darboux se llama **integral superior de la función g(x) sobre el conjunto S respecto de la P-medida.** Escribimos:

$$\overline{\int_S} g(x).dP(S) = \inf\{U(S,\Pi,g(x)) / \Pi \in \Pi(S)\}$$

Teorema 6:

La integral inferior es siempre menor o igual a la integral superior:

$$\underline{\int_S} g(x).dP(S) \leq \overline{\int_S} g(x).dP(S)$$

En efecto:

Puesto que es $\overline{\int_S} g(x).dP(S) = \inf\{U(S,\Pi,g(x)) / \Pi \in \Pi(S)\}$ se tiene que dado un **ε > 0** existe una partición Π_ε de **S** tal que $U(S,\Pi_\varepsilon,g(x)) \leq \overline{\int_S} g(x).dP(S) + \varepsilon$, y como para toda partición Π de **S** es **$l(S, \Pi, g(x)) \leq U(S, \Pi, g(x))$,** resulta que $\overline{\int_S} g(x).dP(S) + \varepsilon$ es una cota superior para el conjunto de las sumas inferiores **$l(S, \Pi, g(x))$.** Luego, es:

$\underline{\int_S} g(x).dP(S) \leq \overline{\int_S} g(x).dP(S) + \varepsilon$, y siendo ε arbitrario, sigue el teorema.

Definición 13 (de la Integral de Lebesgue-Stieltjes):

Se dice que la función acotada **g(x)** es integrable en **S** con respecto al P-medida dada si las integrales superior e inferior coinciden. El valor común de ambas se llama **Integral de Lebesgue Stieltjes de la función g(x) en el conjunto S.**

$$\int_S g(x).dP(S) = \inf\{U(S,\Pi,g(x)) / \Pi \in \Pi(S)\} = \sup\{l(S,\Pi,g(x)) / \Pi \in \Pi(S)\} =$$

$$= \underline{\int_S} g(x).dP(S) = \overline{\int_S} g(x).dP(S)$$

En el caso particular de que **F(x) = x** sigue que **P(S) = L(S)** y la definición anterior es la de la **Integral de Lebesgue de la función g(x) en el conjunto S.**

Teorema 7 (de caracterización de la Integral de Lebesgue -Stieltjes):

Son equivalentes las siguientes proposiciones:

a) **g(x)** es integrable en **S** respecto de la **P-** medida.
b) Para todo **e > 0** existe una partición **Pe**
 de **S** tal que para cualquier otra partición **P** de **S** que cumpla que **Pe Í P** se verifica que

0 £ U(S,P, g(x)) - l(S, P, g(x)) < e

En efecto:

Veamos en primer lugar que a) $\Rightarrow$ b):

$$\int_S g(x).dP(S) = \inf\{ U(S,\Pi,g(x))\} \Rightarrow \forall\Pi_e, \exists e > 0 / \int_S g(x).dP(S) + \frac{e}{2} \geq U(S,\Pi,g(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\Pi_e, \exists e > 0 / \left| U(S,\Pi,g(x)) - \int_S g(x).dP(S) \right| \leq \frac{e}{2}$$

$$\int_S g(x).dP(S) = \sup\{ l(S,\Pi,g(x))\} \Rightarrow \forall\Pi_e, \exists e > 0 / \int_S g(x).dP(S) - \frac{e}{2} \geq l(S,\Pi,g(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall\Pi_e, \exists e > 0 / \left| l(S,\Pi,g(x)) - \int_S g(x).dP(S) \right| \leq \frac{e}{2}$$

Por tanto, se tiene:

$$\forall\Pi_e, \exists e > 0 / \left| U(S,\Pi_e,g(x)) - l(S,\Pi_e,g(x)) \right| =$$

$$= \left| U(S,\Pi_e,g(x)) - \int_S g(x).dP(S) - l(S,\Pi_e,g(x)) + \int_S g(x).dP(S) \right| \leq$$

$$\leq \left| U(S,\Pi_e,g(x)) - \int_S g(x).dP(S) \right| + \left| l(S,\Pi_e,g(x)) - \int_S g(x).dP(S) \right| \leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$$

Veamos ahora que b) $\Rightarrow$ a):

$$\forall\Pi_e, \exists e > 0 / \left| U(S,\Pi_e,g(x)) - l(S,\Pi_e,g(x)) \right| < e \Rightarrow U(S,\Pi_e,g(x)) < l(S,\Pi_e,g(x)) + e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\int_S} g(x).dP(S) \leq U(S,\Pi_e,g(x)) < l(S,\Pi_e,g(x)) + e \leq \underline{\int_S} g(x).dP(S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{\int_S} g(x).dP(S) \leq \underline{\int_S} g(x).dP(S)$$

esto unido a que siempre es $\underline{\int_S} g(x).dP(S) \leq \overline{\int_S} g(x).dP(S)$ implica finalmente que

$\underline{\int_S} g(x).dP(S) = \overline{\int_S} g(x).dP(S)$ y la función g(x) es integrable en **S** con respecto a la **P**-medida.

5. La funciones medibles Borel. Propiedades de la integración Lebesgue-Stieltjes.

Definición 14 (de las funciones medibles Borel):

Una función g(x), definida para todo x de **S**, se dice **medible Borel,** o **medible en sentido de Borel** o **medible-B,** en el conjunto **S,** si el conjunto

B_k = { x e S / g(x) £ k, k e R }

es de Borel, para todo **k** real. (o sea, si B_k **e B)**

Teorema 8:

Si **g(x)** es acotada y medible Borel en un conjunto **S** de medida finita, entonces g(x) es integrable Lebesgue-Stieltjes.

En efecto:

Si es **m £ P(S) £ M** para tod **x** de **S**. Dado un ε > 0, dividamos el intervalo (m, M) en subintervalos mediante los puntos **y_k** tales que

m = y_0 < y_1 < y_2 < .... < y_{n-1} < y_n = M

siendo la bngitud de cada subintervalo menor que ε para todo k: **y_k – y_{k-1}** < ε, ∀k ∈ [1, 2, ..., n]. Esto siempre es posible tomando m suficientemente grande.

Sea ahora: **Sk = { x Î S / y_{k-1} £ g(x) £ y_k}** para **k = 1, 2, ..., n.**

Entonces, se tiene que **S = S_1 U S_2 U .... U S_n** y es **Sj Ç Sk = Æ ,** si **j ¹ k**

Además, es **S_k = B_k - B_{k-1},** luego es **S_k** de Borel. Por lo que se cumple que **M_k - m_k £ y_k - y_{k-1} < e**

O sea, para esta subdivisión disjunta Π ∈ Π(S), se tiene que

$$0 \le U(S,\Pi,g(x)) - l(S,\Pi,g(x)) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k).P(S_k) < \in .\sum_{k=1}^{n} P(S_k) = \in .P(S)$$

Y como **e** es arbitrariamente pequeño y **P(S)** es finito, se sigue que la diferencia anterior puede hacerse tan pequeña como se quiera, compliéndose la parte b) del teorema 7 de caracterización de la integral de Lebesgue-Stieltjes: **0 £ U(S, P, g(x)) - l(S, P, g(x)) < e,** que, como afirma dicho teorema, implica que la función **g(x)** es integrable Lebesgue-Stieltjes en el conjunto **S.**

Teorema 9:

Para funciones acotadas y conjuntos de **P-**medida finita, se verifican las proposiciones siguientes:

1) $\int_S [g_1(x) + g_2(x)].dF = \int_S g_1(x).dF + \int_S g_2(x).dF$

2) $\int_S c.g(x).dF = c.\int_S g(x).dF \qquad c, constante$

3) $m.P(S) \leq \int_S g(x).dF \leq M.P(S)$

4) $\int_{S_1 \cup S_2} g(x).dF = \int_{S_1} g(x).dF + \int_{S_2} g(x).dF \qquad si\_S_1 \cap S_2 = f$

5) $\left| \int_S g(x).dF \right| \leq \int_S |g(x)|.dF$

En efecto:

Las cinco proposiciones son triviales.

Teorema 10 (funciones de P-medida nula):

La integral de una función acotada sobre un conjunto de **P-**medida nula, es, también, cero. Por consiguiente, el valor de una integral no queda afectado si se cambian de modo arbitrario los valores de la función g(x) en un conjunto de **P-**medida nula.

En efecto:

Es consecuencia de la proposición 3) del anterior teorema:

$$m.P(S) \leq \int_S g(x).dF \leq M.P(S)$$

a partir de la cual, resulta evidente que si la medida es nula, P(S) = 0, entonces la integral también lo es.

6. La integración de sucesiones funcionales uniformemente acotadas:

Definición 15 (de sucesión funcional uniformemente acotada):

Diremos que una sucesión funcional **$\{f_n(x)\}$** es uniformemente acotada en el conjunto **S** si verifique que

" n Î {1, 2, ..., n}, " x Î S, $ k Î R / ½$f_n(x)$½ < k

Teorema 11:

Si la sucesión **{ $f_n(x)$ }** es uniformemente acotada en **S** y el límite $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ existe "casidondequieera" **P** en **S,** se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(x).dx = \int_S f(x).dx$$

En efecto:

Si no existe $\lim\limits_{n\to\infty} g(x)$ para todo x de S, completamos la definición de g(x) poniendo g(x) = 0 para los x de S para los que no exista el límite.

Entonces, tenemos $|g(x)| \le k, \forall x \in S$ **,** y, por lo dicho antes, g(x) es medible-B en S, puego, aplicando el teorema 8, g(x) es integrable Lebesgue-Stieltjes en S respecto de la P-medida.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $S_N = \{x \in S / \mid g_n(x) - g(x) \mid < \varepsilon, n = N, N+1, \ldots\}$, entonces, S_N es de Borel, y la sucesión $S_1, S_2, \ldots,$ es no decreciente.

Asimismo, el conjunto **Lim S_N** contiene los x de S para los que existe el **lim $g_n(x)$**. Así, lim S_N y S se diferencian en un número finito de puntos para los que no existe lim $g_n(x)$. De aquí se sigue, por la proposición del teorema 10, que **P(lim S_N) = P(S)**.

Pero como es lim $P(S_N)$ = P(lim S_N), se tiene que **lim P(SN) = P(S)** por lo cual, eligiendo un ε tal que

$P(S_N) > P(S) - \varepsilon$, o bien, tal que $P(S - S_N) < \varepsilon$, se tiene, para todo $n \ge N$:

$$\int_S |g_n(x) - g(x)|.dP = \int_{S_N} |g_n(x) - g(x)|.dP + \int_{S-S_N} |g_n(x) - g(x)|.dP <$$

$$< \mathbf{e}.P(S_N) + 2k.P(S - S_N) < \mathbf{e}.[P(S) + 2k]$$

Luego, es:

$$\left| \int_S g_n(x).dP - \int_S g(x).dP \right| \le \int_S |g_n(x) - g(x)|.dP < \mathbf{e}.[P(S) + 2k]$$

de donde sigue que

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(x).dx = \int_S f(x).dx$$

7. La integración de series convergentes “casi donde quiera”.

Teorema 12:

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge "casi dondequiera" en S, y las sumas parciales están acotadas uniformemente en S, se verifica:

$$\int_S \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S f_n(x).dP$$

En efecto: es una generalización de la primera parte del teorema 9.

Teorema 13:

Si es **S = S$_1$ÈS$_2$È ... ÈS$_n$, y es S$_i$ Ç S$_j$ = Æ** , si **j ¹ k,** entonces:

$$\int_S g(x).dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} g(x).dP$$

En efecto: es también una generalización de la cuarta parte del teorema 9.

Sea la función $e_n(x)$, definida de la forma:

$$e_n(x) = \begin{cases} 1, & si \quad x \in S_n \\ 0 & si \quad x \notin S_n \end{cases}$$

para x ∈ S tenemos que es: $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x).g(x)$, y las sumas parciales de esta serie están acotadas en S, así que, por la proposición anterior es:

$$\int_S g(x).dP = \int_S \sum_{n=1}^{\infty} e_n(x).g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S e_n(x).g(x).dP = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{S_n} g(x).dP$$

8. Generalización de la integración Lebesgue-Stieltjes a funciones de n variables.

Corolario:

Si en las expresiones de las Sumas de Darboux consideramos que **P(S)** designa una función de conjunto en $\mathbf{R}^n$, no negativa y aditiva, mientras que m_k y M_k son los extremos inferior y superior de la función dada

$$g(\vec{x}) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

en el conjunto n-dimensional $\mathbf{S_k}$, entonces la integral de Lebesgue-Stieltjes

$$\int_S g(\vec{x}).dP = \int_S g(x_1, x_2, ..., x_n).dP$$

queda definida del mismo modo que la de una sola dimensión.

Todo lo visto anteriormente, propiedades y definiciones de la integral e integrabilidad para funciones no acotadas y sobre conjuntos de P-medida infinita, se generalizan trivialmente.

En el caso de que P(S) es la medida de Lebesgue, L(S), en n dimensiones, se obtiene la llamada Integral de Lebesgue de g(x), que se escribe con la notación usual para integrales múltiples.

$$\int_S g(\vec{x}).dL = \int_S g(x_1, x_2, ..., x_n).dx_1.dx_2...dx_n$$

Si **S** es un intervalo sobre el cual **g(x)** es integrable en el sentido de Riemann, la integral de Lebesgue coincide con la integral múltiple ordinaria de Riemann.

---oo0oo---

9. Bibliografía:

CRAMER: Métodos matemáticos de Estadística. Aguilar
DIEUDONNE: Elementos de Matemáticas. Reverté.
RUDIN: Principios de Análisis Matemático. Ediciones del Castillo.
PUIG ADAM: Cálculo Integral. Biblioteca Matemática, S. L.
VALLEE POUSSIN: Cours d'Analyse Infinitesimale. Tomo II
WILLIANSON: Integral de Lebesgue. C. Bermejo Impresor.