

SOBRE EL CONCEPTO DE FRACTAL

Para poder hablar de fractales es necesario establecer primero lo que significa la *dimensión topológica* y lo que significa la *dimensión fractal*., para, a partir de ello, definir el objeto fractal y su correspondiente geometría, así como sus aplicaciones más básicas.

1. Dimensión topológica y dimensión fractal:

Desde un punto de vista topológico sabemos que la circunferencia y un segmento rectilíneo son la misma curva y encierran el mismo tipo de superficie (pues es posible transformar una en la otra mediante una deformación continua, es decir, sin que sea preciso someter a ninguna de las dos a manipulaciones “no topológicas”).

Ahora bien, desde un punto de vista métrico no son la misma curva, ya que la circunferencia y el área que encierra, el círculo, son finitos, y, en cambio, el segmento, aunque es finito, no encierra con su borde un área finita.

Aparece aquí, entonces, una característica moderna de las matemáticas: intentar clasificar los objetos por lo que se conserva, por los invariantes, y analizar, por otra parte, qué ocurre con lo que no se conserva, cómo hay que analizarlo, qué hay que hacer con ello, cómo integrarlo en el mundo de los entes matemáticos.

En el ejemplo anterior, lo que se conserva es su carácter topológico, es decir, su dimensión topológica.

Analicemos brevemente lo que significa la dimensión topológica, que es un término que introdujo Henri Poincaré para discernir sobre cuestiones de este tipo.

La definición inductiva dada por Poincaré al introducir este concepto fue la siguiente:

- El conjunto vacío tiene dimensión -1 .
- Si los bordes de los entornos pequeños de todos los puntos del ente son espacios $(n-1)$ -dimensionales, decimos que el espacio que consideramos es n -dimensional.

Así, según esto, se tiene:

conjunto vacío:	dimensión topológica:	$D = -1$
punto:	dimensión topológica:	$D = 0$
segmento:	dimensión topológica:	$D = 1$
cuadrado:	dimensión topológica:	$D = 2$
cubo:	dimensión topológica:	$D = 3$

Otra definición de la dimensión topológica de un objeto geométrico la dio K. Devlin en 1988. Es la definición por el movimiento:

En una curva solo podemos movernos en una dirección, adelante o hacia atrás. En una superficie podemos ir adelante, atrás, a derecha, a izquierda. En un volumen podemos movernos, además, hacia arriba, hacia abajo. La curva tiene una dimensión, la superficie tiene dos dimensiones y el volumen tiene tres dimensiones.

Una definición distinta de dimensión topológica es la definición por semejanza, llamada también de autosemejanza, que sugirió Felix Hausdorff en 1919, readaptada posteriormente por Besicovich (dimensión de Hausdorff-Besicovich):

Si al obtener desde un ente H , N entes iguales, semejantes al original, con razón de semejanza r , entonces la dimensión topológica de H es el número real D que verifica:

$$N.r^D = 1$$

O sea, $\ln N + D \cdot \ln r = 0$. Por tanto:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)}$$

Esta definición se puede justificar desde la teoría de la medida:

- 1) La medida de la unión de N figuras que no se solapan $A_1, A_2, \dots, A_N$, es la suma algebraica de sus medidas:

$$m(\text{unión}) = \sum_{k=1}^N m(A_k)$$

- 2) Si una figura A es semejante a otra figura A' , con razón de semejanza r , la medida de A es proporcional a la medida de A' , siendo la constante de proporcionalidad una potencia de la razón de semejanza:

$$m(A) = \left(\frac{1}{r}\right)^D . m(A')$$

Veamos como obtener la definición de Hausdorff-Besicovich mediante la medición de un segmento AB del que se obtienen N subsegmentos iguales, cuya razón de semejanza con AB es r, despreciando el resto del segmento.

La media total del segmento AB es la suma de la medida de todos los subsegmentos iguales:

$$m(AB) = \sum_{k=1}^N m(s_k) = N . m(s_1)$$

por otra parte:

$$m(AB) = \left(\frac{1}{r}\right)^D . m(s_1)$$

de donde, identificando:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D \Rightarrow r^D . N = 1$$

El exponente D es, pues, lo que Husdorff-Besicovich llama *dimensión de autosemejanza*.

Ejemplos elementales:

Un segmento:

Lo dividimos, por ejemplo, en dos partes iguales. N = 2, r = ½. Se tiene:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$

Dimensión de autosemejanza: D = 1.

Un cuadrado:

Lo dividimos, por ejemplo, en 4 cuadrados iguales. N = 4. r = ½. Se tiene:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$$

Dimensión de autosemejanza: D = 2.

Un cubo:

Lo dividimos, por ejemplo, en 8 cubos iguales. $N = 8$. $r = \frac{1}{2}$. Se tiene:

$$D = \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{r} \right)} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

Dimensión de autosemejanza: $D = 3$.

La dimensión topológica en el sentido de Poincaré o de Devlin coincide en general con la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich. Pero hay ciertos objetos geométricos en los que no ocurre así.

A estos objetos geométricos los denominaremos, usando la terminología de Benoit Mandelbrot, *Fractales*. Diremos que la dimensión definida por Poincaré o Devlin es su **Dimensión Topológica** y que la dimensión por semejanza de Hausdorff-Besicovich es su **Dimensión Fractal**.

2. Fractales:

Se llama **Fractal** a un ente geométrico que tiene una dimensión por semejanza, dimensión fractal, estrictamente mayor que su dimensión topológica.

En general, un fractal tiene tantos puntos como todo el espacio tridimensional y tiene tal estructura que cada una de sus partes, observada con una lente de aumento adecuada, reproduce en cierto sentido el conjunto generador de partida (autosemejanza).

Entendemos por **Geometría Fractal** a la parte de la matemática que estudia la generación, dimensionalidad y aplicación práctica de los fractales.

Veamos a continuación algunos fractales básicos: El Intervalo de Cantor, la Curva de Koch (copo de nieve), El Conjunto de Besicovich, El estuche triangular de Sierpinski y el Fractal aritmético de Sierpinski.

3. El Intervalo de Cantor:

Es un intervalo de números reales, del cual se obtienen dos intervalos semejantes dividiendo el intervalo inicial en tres partes iguales. Se elimina la parte central, con lo que aparecen dos intervalos semejantes al primero, con razón de semejanza 1/3.

Es decir, $N = 2$, $r = 1/3$.

La reiteración ad infinitum del proceso permite reducir a polvo el intervalo generador (polvo de Cantor).

La dimensión fractal es:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = 0'0630905$$



EL INTERVALO DE CANTOR

4. La Curva de Koch (copo de nieve):

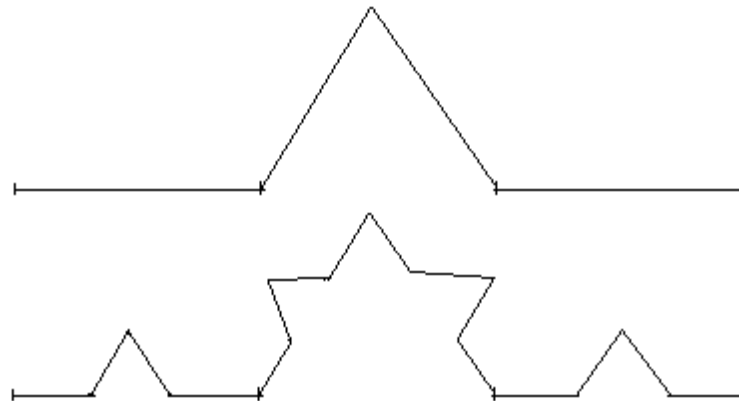
Es un segmento con un quiebro en su parte central, cuya longitud es igual al resto del segmento.

Como se observa, de cada uno de los cuatro segmentos que constituyen la curva se obtiene otra semejante con razón de semejanza 1/3.

Luego, es $N = 4$, $r = 1/3$.

Dimensión fractal:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1'26181$$



LA CURVA DE KOCH

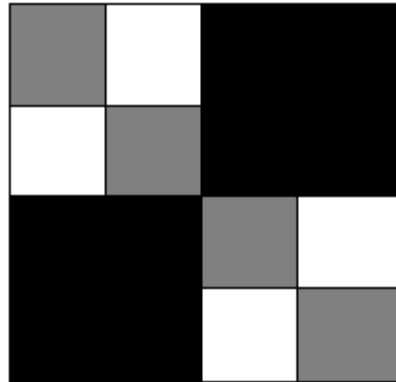
5. El Conjunto de Besicovich:

Es un cuadrado que se divide en cuatro partes, de las cuales se eliminan dos dispuestas en diagonal, con lo que resultan dos cuadrados de razón de semejanza $\frac{1}{2}$.

Luego, es $N = 2$, $r = \frac{1}{2}$.

Dimensión fractal:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 2}{\ln 2} = 1$$



EL CONJUNTO DE BESICOVICH

6. El Estuche Triangular de Sierpinski:

Es un triángulo equilátero sobre el que se traza otro triángulo interior uniendo los puntos medios de sus lados. Aparece un triángulo central, que se elimina, y otros tres triángulos iguales entre sí y semejantes al original con razón 1/2.

O sea, es $N = 3$, $r = 1/2$

Dimensión fractal:

$$D = \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} = \frac{\ln 3}{\ln 2} = 1.5849$$



ESTUCHE TRIANGULAR DE SIERPINSKI

A medida que se repite el proceso en el Estuche de Sierpinski, los triángulos blancos van aumentando y los triángulos negros van disminuyendo. En el infinito, la superficie total del triángulo será la suma de las superficies de los triángulos blancos, mientras que los triángulos negros tienden a tener superficie total nula.

7. El Fractal Aritmético de Sierpinski:

Este fractal es en realidad una modalidad del Estuche de Sierpinski.

Consideremos el triángulo de Tartaglia o de Pascal, constituido por números naturales de forma que la fila n-sima sean los números

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad (k = 0, \dots, n)$$

o sea, es el triángulo infinito expresado por:

```
      1
     1 1
    1 2 1
   1 3 3 1
  1 4 6 4 1
 1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
... ..
```

en este triángulo, como se ve, cada número es la suma de los dos que quedan sobre él en la fila anterior.

El Fractal Aritmético de Sierpinski aparece cuando se nos ocurre colocar un cero donde hay un número par, y un 1 donde hay un número impar, con lo cual resulta:

```
      1
     1 1
    1 0 1
   1 1 1 1
  1 0 0 0 1
 1 1 0 0 1 1
1 0 1 0 1 0 1
1 1 1 1 1 1 1
1 0 0 0 0 0 0 1
```



```
  1 1 0 0 0 0 0 0 1 1
  1 0 1 0 0 0 0 0 1 0 1
  1 1 1 1 0 0 0 0 1 1 1 1
```

Como sabemos que los triángulos blancos, formados aquí por ceros, tienden al área total del triángulo, y el área de los triángulos negros, formados por unos, tiende a cero, podemos deducir una propiedad aritmética importante del triángulo de Pascal, a partir de su carácter fractal:

Casi todos los números del triángulo de Pascal son pares.

Y esto resulta ser un ejemplo de aplicación elemental del concepto de fractal.

----oo0oo----