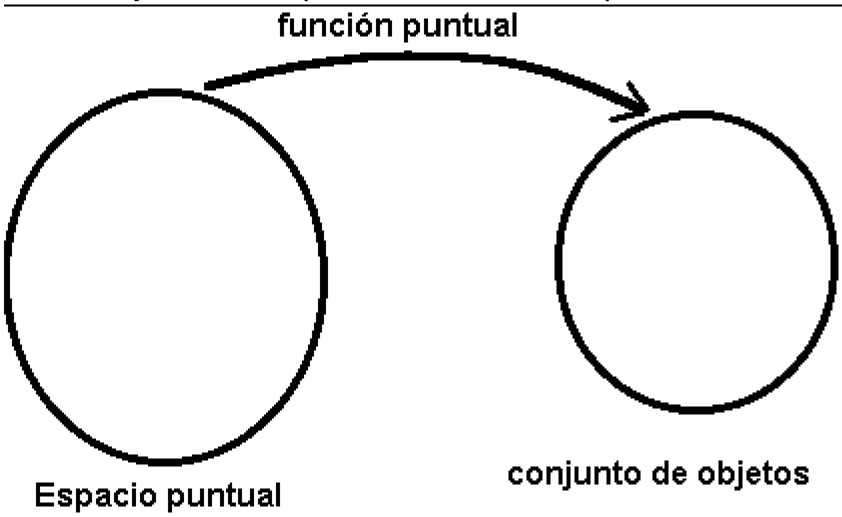
OPERADORES. OPERADORES DE HAMILTON

1. Funciones de puntos y operadores. Operadores sobre funciones de puntos.

Se denominan *funciones de puntos* o *funciones puntuales,* a las funciones cuyo conjunto de partida es un espacio puntual. El conjunto de llegada en las funciones puntuales puede ser un conjunto cualquiera (un cuerpo numérico, un conjunto de operadores, otro espacio vectorial, un conjunto



de tensores, etc.).

Llamaremos asimismo *operadores en un espacio* Φ a las funciones sobre ese espacio vectorial Φ, esto es, a las funciones cuyo conjunto de partida y de llegada son el mismo espacio vectorial Φ.

Sea ι un operador sobre el espacio vectorial puntual euclidiano real (En;R). Y Sea T el conjunto de todos los operadores ι.

Sea también Φ el conjunto de todas las funciones puntuales φ definidas desde el espacio vectorial euclidiano real (En;R). Este conjunto es también, trivialmente, un espacio vectorial:

$$\forall \boldsymbol{j}_{1,}\boldsymbol{j}_2 \in \Phi, \forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in R \rightarrow \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}_1(x) \in \Phi, \boldsymbol{b}\boldsymbol{j}_2(x) \in \Phi \rightarrow \boldsymbol{a}\boldsymbol{j}_1(x) + \boldsymbol{b}\boldsymbol{j}_2(x) \in \Phi \rightarrow \Phi esp\_vect$$

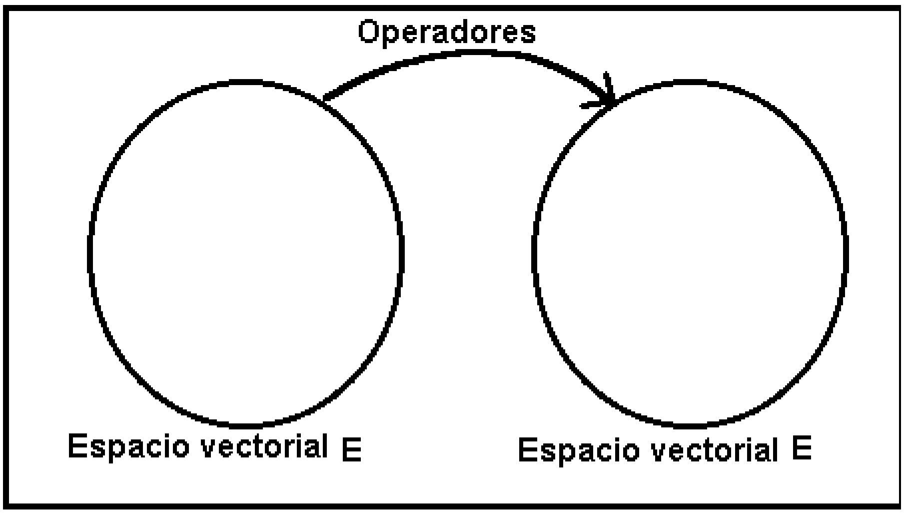
Llamemos O a un operador definido sobre el espacio vectorial Φ de dichas funciones puntuales.

$$O: \Phi \rightarrow \Phi$$

Consideramos, en definitiva, los elementos siguientes:

a) Un espacio puntual euclidiano real. (En;R).
b) El conjunto T de todos los operadores definidos sobre el espacio (En;R).
c) El conjunto Φ de todas las funciones definidas desde (En;R) hacia un conjunto cualquiera. El conjunto Φ tiene la estructura de espacio vectorial real (Φ;R).
d) El conjunto O de los operadores definidos sobre el espacio Φ.

Lo que se pretende hacer en el apartado siguiente es asociar los operadores que actúan sobre el espacio puntual euclidiano (En;R) con los operadores que actúan sobre el espacio Φ de las funciones definidas sobre



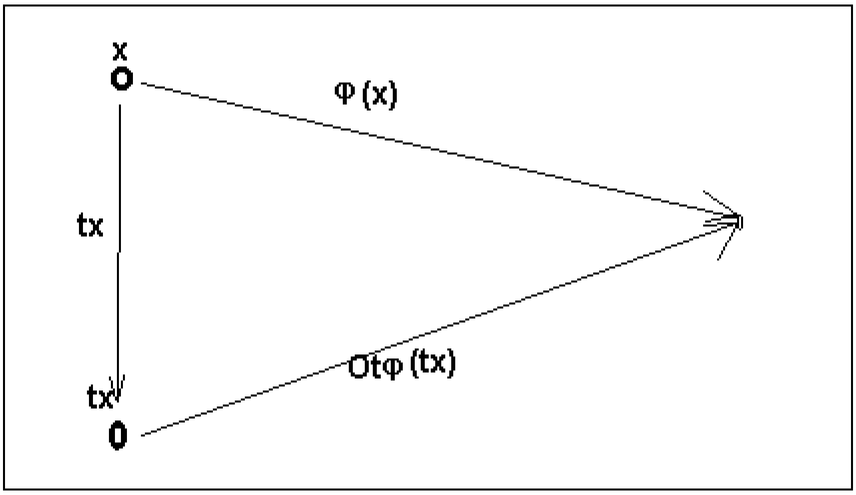
(En;R).

2. Los operadores Oι:

Se define el operador Oι como un operador O, esto es, como un operador sobre el espacio de las funciones puntuales Φ que verifica la condición de asociación siguiente con respecto a un operador ι actuante sobre el espacio puntual (En;R):

$$\forall \boldsymbol{j} \in \Phi, \forall \boldsymbol{t} \in T, \forall x \in En, \qquad (O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j})(\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x)$$

El operador Oι se define, pues, de forma que la imagen por la función puntual φ de cualquier vector x se corresponda con la imagen por Oιφ del vector ιx.



O sea, llamando $\boldsymbol{j}' = O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}$ se tendría:

$$\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x)$$

O bien, llamando $\boldsymbol{j}' = O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}$ y $x' = \boldsymbol{t}x$ se puede expresar

$$\boldsymbol{j}'(x') = \boldsymbol{j}(x)$$

o también, en este último caso: $\boldsymbol{j}'(x') = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}^{-1}x')$, o bien: $\boldsymbol{j}'(x) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}^{-1}x)$

.

Teorema: Los operadores Oι son lineales. Esto es, se cumple que:

$$\forall a\in R,\forall \boldsymbol{j}\in \Phi \to O\boldsymbol{t}(a\boldsymbol{j}) = aO\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}$$
$$\forall \boldsymbol{j}1,\boldsymbol{j}2\in \Phi \to O\boldsymbol{t}(\boldsymbol{j}1+\boldsymbol{j}2) = O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}1+O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}2$$

En efecto:

$$\forall x\in En, O\boldsymbol{t}(a.\boldsymbol{j})(x) = a.\boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}^{-1}x) = a.O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}(x)$$
$$\forall x\in En, O\boldsymbol{t}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{y})(x) = (\boldsymbol{j}+\boldsymbol{y})(\boldsymbol{t}^{-1}x) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}^{-1}x)+\boldsymbol{y}(\boldsymbol{t}^{-1}x) = O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}(x)+O\boldsymbol{t}\boldsymbol{y}(x)$$

•

Teorema: Si ι y μ son dos operadores sobre (En; R) y son Oι y Oμ sus correspondientes operadores O asociados, entonces se verifica que

Oιμ = Oι .Oμ

En efecto:

Sabemos que es :

$$O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x)$$
$$Om\boldsymbol{j}(mx) = \boldsymbol{j}(x)$$
$$Om\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}(m\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x)$$

por tanto:

llamando $O\boldsymbol{t}\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}'$ $\quad \boldsymbol{t}x = x'$ se tiene:

$$Om\boldsymbol{j}'(mx') = \boldsymbol{j}'(x') \Rightarrow OmO\boldsymbol{t}\boldsymbol{j}(m\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x) \Rightarrow OmO\boldsymbol{t} = Om\boldsymbol{t}$$

•

Teorema: si los operadores ι son un grupo, entonces los operadores Oι asociados también son un grupo.

En efecto:

Supongamos que los operadores ι forman un grupo. Veamos la estructura del conjunto O de los operadores Oι:

a) El producto es ley interna:

$$\forall O\boldsymbol{t}, Om\in O, O\boldsymbol{t}.Om = O\boldsymbol{t}m\in O$$

b) El producto es asociativo:

$$\forall O\boldsymbol{t}, Om, O\boldsymbol{u}\in O, O\boldsymbol{t}.(OmO\boldsymbol{u}) = O\boldsymbol{t}.Om\boldsymbol{u} = O\boldsymbol{t}(m\boldsymbol{u}) = O\boldsymbol{t}(m\boldsymbol{u}) = O(\boldsymbol{t}m)\boldsymbol{u} = (O\boldsymbol{t}.Om).O\boldsymbol{u}$$

b) Existe elemento neutro:

(llamemos 1 al elemento neutro en el grupo de los operadores ι)

$$\forall O\boldsymbol{t} \in O, O\boldsymbol{t}.O1 = O\boldsymbol{t}.O1 = O\boldsymbol{t}1 = O\boldsymbol{t} \Rightarrow O\boldsymbol{t}.O1 = O\boldsymbol{t}$$

c) Existe elemento simétrico:

$$\forall \boldsymbol{t}, \exists \boldsymbol{t}^{-1} / \boldsymbol{t}.\boldsymbol{t}^{-1} = 1 \Rightarrow O\boldsymbol{t}.O\boldsymbol{t}^{-1} = O\boldsymbol{t}.\boldsymbol{t}^{-1} = O1 \Rightarrow O\boldsymbol{t}^{-1}\_simetrico\_de\_O\boldsymbol{t}$$

3. Invariancia:

Una función de puntos φ se dice que es *invariante* con respecto a un operador ι, si tiene el mismo valor en todos los puntos imágenes del operador ι. O sea:

$$\boldsymbol{j}\_in\mathrm{var}\,iante\_respecto\_\boldsymbol{t} \Leftrightarrow \boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x), \forall x \in En$$

Una función se dice es *invariante con respecto a un grupo de operadores* si es invariante con respecto a cada uno de los operadores del grupo.

$$\boldsymbol{j}\_in\mathrm{var}\,iante\_respecto\_T\_y\_T\_grupo \Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{t} \in T, \boldsymbol{j}(\boldsymbol{t}x) = \boldsymbol{j}(x), \forall x \in En)$$

Ejemplo de función invariante respecto a un operador:

Sea φ la función que le hace corresponder a cada vector de En su norma: φ(x) = |x|, ∀x∈En

Sea ι un operador unitario, es decir, un operador rotación en el espacio En. Se tiene, entonces, que |ιx| = |x|. Por tanto:

φ(ιx) = |ιx| = |x| = φ(x) ----→ φ es invariante respecto de ι

Una función φ se dice invariante con respecto a un operador Oι si no resulta alterada por su aplicación:

φ invariante respecto a Oι ⇔ Oιφ = φ

Es inmediato que para el operador neutro o idéntico, O1, toda funcion es invariante.

En general, la ecuación de aplicación de un operador Oι a una función φ cualquiera es de la forma

$$O\iota\varphi = \lambda\varphi$$

y el problema de determinar las funciones invariantes para el operador Oι se reduce al cálculo de las funciones propias para el autovalor λ = 1 de tal operador:

$$O\iota\varphi = \varphi$$

- Teorema: Si una función puntual φ es invariante respecto de un operador ι es también invariante respecto del operador Oι, y viceversa.

En efecto:

a) φ invariante respecto a ι ⇒ $\forall x \in En, \boldsymbol{j}(tx) = \boldsymbol{j}(x) \Rightarrow \boldsymbol{j}(tx) = \boldsymbol{j}(x) \quad y \quad O t \boldsymbol{j}(tx) = \boldsymbol{j}(x)$

por tanto, se tiene: $O t \boldsymbol{j}(x) = \boldsymbol{j}(x) \Rightarrow O t \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \Rightarrow \boldsymbol{j}\_in\mathrm{var}iante\_respecto\_Ot$

b) φ invariante respecto a Oι ⇒ $O t \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j} \Rightarrow O t \boldsymbol{j}(x) = \boldsymbol{j}(x) \quad y \quad O t \boldsymbol{j}(tx) = \boldsymbol{j}(x) \Rightarrow$

⇒ φ(ιx) = φ(x) ⇒ *j invariante respecto de* ι

4. Los operadores de Hamilton:

Se llaman operadores H, u operadores de Hamilton, a los operadores funcionales Oι definidos en cada punto $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ por la diferenciación parcial:

$$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

en otro punto $r'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ el operador H tendrá la expresión

$$H(x') = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}$$

Los operadores H tienen, pues, la fundamental característica de variar de un punto a otro del espacio. O sea, son, realmente, funciones (operacionales) de los puntos del espacio En.

Los operadores H, por ser operadores funcionales, actúan sobre el espacio Φ de las funciones cuyo conjunto inicial es En, al igual que los operadores Oι en general. O sea, en un punto x del espacio En, se cumpliría la ecuación:

$$H(x)\varphi(x) = \phi(x),\ \forall x \in En, \qquad \varphi,\ \phi \in \Phi\ ,$$

Ejemplo de utilización de un operador de Hamilton:

Sea el espacio (En;R) y la función puntual $\varphi(x) = x_1^2 + x_2^3$

Será:

$$H(x)\boldsymbol{j}(x) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{j}(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{j}(x)}{\partial x_2^2} = 2 + 6x_2$$

-----

5. La invariancia de los operadores de Hamilton.

El operador H se considera invariante respecto a un operador ι si se verifica:

$$H(\iota x) = H(x),\ \forall x \in En$$

Si H es invariante respecto de un grupo de operadores T, se dirá que T es el grupo simétrico de H.

Veamos la relación entre las expresiones de un operador H en dos puntos diferentes, x y x’, de un espacio vectorial euclidiano real (En;R).

Consideremos el operador ι que verifica la relación:

$$\iota x = x'$$

y sea $(\alpha_{ij})_n$ la matriz asociada a ι:

$$(\alpha_{ij})_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Se tiene, entonces:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{23} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

o bien, desarrollando:

$$x'_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} . x_k$$

(j=1,2, ... , n)

de aquí, se tiene, que al derivar parcialmente cada componente x'_i:

$$\frac{\partial x'_j}{\partial x_k} = \alpha_{jk}$$

(j,k=1,2, ..., n)

y de ser:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x'_j} . \frac{\partial x_j'}{\partial x_k}$$

se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial x'_j}$$

Por tanto:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2_k} = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial x'_j} \right)^2$$

donde el exponente 2 indica el orden de la diferenciación parcial.

En definitiva, el operador H de Hamilton es:

En el punto x: $$H(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

En el punto x' = ιx: $$H(x') = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{jk} \frac{\partial}{\partial x'_j} \right)^2$$

Pero la condición de invariancia de H, esto es, la condición para que H(x)=H(ιx) es que

$$\sum_{r,j,i=1}^{n} \alpha_{jk.} \alpha_{ir} = \delta_{ji} . \delta_{kr}$$

y esta condición equivale a que $(\alpha_{ij})_n$ sea una matriz ortogonal.

$$(\alpha_{jk})_n . (\alpha_{kj})_n = I$$

En definitiva, se tiene que los operadores de Hamilton son invariantes en todos los puntos del espacio relacionados por matrices de paso ortogonales.

Puesto que las matrices ortogonales corresponden a rotaciones o simetrías, según que su determinante sea +1 o –1, respectivamente, cabe inferir que los operadores de Hamilton son invariantes en los giros y en las simetrías.

A las matrices de determinante 1 se las llama *unimodulares* y a las matrices de determinante –1, *polimodulares*. Se utiliza el símbolo SO(n) para representar a las matrices ortogonales de n-simo orden unimodulares, y RO(n) para representar a las matrices ortogonales de n-simo orden polimodulares.

•
Teorema: El conmutador de un operador H invariante respecto de ι, y el operador Oι es nulo. O sea:

$$H(x) = H(\iota x) \Rightarrow [H, O\iota] = 0$$

En efecto:
Llamemos: $\Psi 1 = (HO\iota)\varphi$ y $\Psi 2 = (O\iota H)\varphi$

Se tiene:

$$\Psi 1(\iota x) = (HO\iota)\varphi(\iota x) = H(O\iota\varphi)(\iota x) = H(\iota x)\varphi(x) = H(x)\varphi(x)$$

$$\Psi 2(\iota x) = (O\iota H)\varphi(\iota x) = O\iota(H\varphi)(\iota x) = H(x)\varphi(x)$$

Por tanto:

$$\Psi 1(\iota x) = \Psi 2(\iota x) \Rightarrow \quad \Psi 1 = \Psi 2 \quad \Rightarrow \quad O\iota H = HO\iota \quad \Rightarrow \quad [H, O\iota] = 0$$

6. La invariancia en un espacio bidimensional euclidiano real y puntual.

En un espacio bidimensional se simplifican notablemente las expresiones anteriores:

En un punto $x = (x_1, x_2)$ será $H(x) = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2_1} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2_2}$

En otro punto o $x' = (x'_1, x'_2)$ será $H(x') = \dfrac{\partial^2}{\partial x'^2_1} + \dfrac{\partial^2}{\partial x'^2_2}$

Si es $x' = \iota x$ y es $(\alpha_{ij})_n$ la matriz asociada a ι:

$$(\boldsymbol{a}_{ij})_n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

será:

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$x'_1 = a.x_1 + b.x_2$$

$$x'_2 = c.x_1 + d.x_2$$

y el operador H en x' = (x'_1, x'_2) en función de su expresión en x = (x_1, x_2) es:

H(x') =

$$= \sum_{k=1}^{2}\left(\sum_{j=1}^{2}\alpha_{jk}\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\alpha_{1k}\frac{\partial}{\partial x_1}+\alpha_{2k}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{2}\left(\alpha_{1k}^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\alpha_{2k}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\alpha_{1k}\alpha_{2k}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)=$$

$$= \alpha_{11}^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\alpha_{21}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\alpha_{11}\alpha_{21}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}+\alpha_{12}^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\alpha_{22}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\alpha_{12}\alpha_{22}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}=$$

$$= \left(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\left(\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{22}\alpha_{12}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

En definitiva:

$$H(x) = \frac{\partial^2}{\partial {x^2}_1}+\frac{\partial^2}{\partial {x^2}_2}$$

$$H(x') = \left(\alpha_{11}^2+\alpha_{12}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\left(\alpha_{11}\alpha_{21}+\alpha_{22}\alpha_{12}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

O bien:

$$H(x) = \frac{\partial^2}{\partial {x^2}_1}+\frac{\partial^2}{\partial {x^2}_2}$$

$$H(x') = \left(a^2+b^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\left(c^2+d^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+2\left(ac+bd\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

y la condición de invariancia será:

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0$$

Esta condición de invariancia se obtiene también, naturalmente, desde el hecho de que la matriz del operador ha de ser ortogonal:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ca+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$c^2 + d^2 = 1$$

$$ac + bd = 0$$

7. Los grupos de los giros y las simetrías en dos dimensiones:

a) El operador ι corresponde a una rotación:

En este caso la matriz ortogonal correspondiente es unimodular (de determinante +1), por lo que se tiene que es:

$$(\boldsymbol{a}_{jk})_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\boldsymbol{q} & -\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} \\ \mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} & \cos\boldsymbol{q} \end{pmatrix}$$

la cual, evidentemente, cumple la condición de ortogonalidad y de determinante igual a +1.

b) El operador ι corresponde a una simetría:

En este caso la matriz ortogonal correspondiente es polimodular (de determinante -1), por lo que se tiene que es:

$$(\boldsymbol{a}_{jk})_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\boldsymbol{q} & \mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} \\ \mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} & \cos\boldsymbol{q} \end{pmatrix}$$

la cual, evidentemente, cumple la condición de ortogonalidad y de determinante igual a -1.

Sea SO(2) el conjunto de todas las simetrías en el espacio (E2;R). Sea, asimismo, RO(2), el conjunto de las rotaciones en el mismo espacio (E2;R).

Los cojuntos SO(2) y RO(2) son, ambos, grupos con respecto al producto. En efecto:

- (SO(2), .) es un grupo:

Si llamamos A(α) a la matriz $\begin{pmatrix} \cos \boldsymbol{a} & -\operatorname{sen} \boldsymbol{a} \\ \operatorname{sen} \boldsymbol{a} & \cos \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$, se tiene trivialmente que es

$$A(\alpha).A(\beta) = \begin{pmatrix} \cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) & -\operatorname{sen}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ \operatorname{sen}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) & \cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \end{pmatrix}$$

Luego, el producto es ley de composición interna, y trivialmente se comprueba que es asociativa, que el elemento neutro es la matriz A(0), y que la matriz simétrica de A(α) es la matriz A(-α).

-(RO(2),.) es un grupo:

Si llamamos A'(α) a la matriz $\begin{pmatrix} -\cos \boldsymbol{a} & \operatorname{sen} \boldsymbol{a} \\ \operatorname{sen} \boldsymbol{a} & \cos \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$, se tiene trivialmente que es

$$A'(\alpha).A'(\beta) = \begin{pmatrix} -\cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) & \operatorname{sen}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \\ \operatorname{sen}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) & \cos(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \end{pmatrix}$$

Luego, el producto es ley de composición interna, y trivialmente se comprueba que es asociativa, que el elemento neutro es la matriz A'(0), y que la matriz simétrica de A(α) es la matriz A'(-α).