Prueba Geométrica de Potenciales Trackers en Cosmología.

Alexander Moreno Sánchez

Universidad Nacional de Colombia

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Resumen

La cosmología moderna encuentra que el universo se expande aceleradamente, para explicar tal comportamiento se han propuesto multiples teorías, una de ellas conocida como quintaesencia, la cual consiste en proponer un campo escalar que evoluciona suavemente, a lo largo de la historia del universo, uno de los esquemas teóricos derivados de quintaesencia es conocido como campos Tracker, los cuales en principio permiten ajustar las densidades de energía de materia y de constante cosmológica tanto en épocas primordiales y tardías del universo. También se consideran nuevos marcos conceptuales de gravedad modificada, como son las teorías f(R) y escalar-tensor, las cuales permiten construir modelos más generales. Se presenta una propuesta en el marco de teorías modificadas de la gravedad y bajo el enfoque de los sistemas dinámicos para encontrar soluciones cosmológicas junto con la aplicación de la técnica de máxima verosimilitud para ajustar parámetros con el fin de considerar o descar modelos de energía oscura.

***PACS*:** 97.60.Bw, 26.30.Ef, 07.85.-m, 97.70.Rz
***Palabras Claves*:** cosmología, parámetros cosmológicos, densidades de energía, campos escalares, campos Tracker, sistemas dinámicos, máxima verosimilitud.

Abstract

Modern cosmology found that the universe expanded rapidly, to explain the behavior multiplied several theories, one of them known as quintessence, which consists of proposing a field that evolves smoothly, throughout the history of the universe, one of the theoretical schemes derived from quintessence is known as Tracker fields, which in principle would allow to adjust the energy densities of matter and cosmological constant both in primordial and late eras of the universe. New conceptual frameworks of modified gravity are also considered, such as the f (R) and scalar-tensor theories, which allow us to build more general models. A proposal is presented in the framework of modified gravity techniques and the dynamic systems approach to find cosmological solutions together with the application of the maximum likelihood technique to adjust parameters in order to consider or download dark energy models.

***PACS*:** 97.60.Bw, 26.30.Ef, 07.85.-m, 97.70.Rz
***Keywords*:** cosmology, cosmological parameters, energy densities, scalar fields, Tracker fields, dynamic systems, maximum likelihood.

1 Introducción

A la fecha se conoce que el universo contiene una distribución de materia y energía algo inusual a lo que se consideraba. En este momento se sabe que el universo contiene 70% de la llamada energía oscura la cual se manifiesta en la expansión acelerada del universo y quizá como causa de la Inflación primordial; también contamos con 25 % de la llamada materia oscura, la cual confiere cohesión y estabilidad a las grandes estructruas del universo, además de modificar la rotación de estrellas en las galaxias, entre otros; además, se sabe que la llamada materia bariónica constituye el 5% de materia energía del universo. En pocas palabras, sólo conocemos las leyes físicas e interacciones de un porcentaje mínimo de los constituyentes del universo[1,2,3]. Desde 1998 el modelo ΛCDM modela la energía oscura mediante la constante cosmológica Λ introducida en el modelo cosmológico. Todos los datos cosmológicos de los últimos años ratifican esta hipótesis. Sin embargo hay muchos otros modelos teóricos alternativos.

Ahora bién, para explicar la energía oscura se han propuesto múltiples modelos que van desde constante cosmológica, hasta teorías de altas dimensiones y de gravedad modificada, pasando por teorías de quintaesencia, k-esencia, campos fantasmas, y muchas más. En todos los casos, las alternativas al modelo ΛCDM (que asume la gravedad de Einstein) requieren introducir parámetros adicionales.

Para estudiar la energía hay que estudiar su ecuación de estado $w = \frac{p}{\rho}$, donde p es la presión y ρ la densidad de energía. Para la constante cosmológica $w = \frac{p}{\rho} = -1$. Entre muchos otros factores, la ecuación de estado puede variar con el tiempo, es decir $p(a) = w(a)\rho(a)$ son la presión y densidad de energía variando según a.

Uno de los esquemas que más atención ha recibido es el de quintaesencia, la cual en sí consiste en involucrar un campo escalar que constituiría la energía oscura del universo y que evolucionaría con él, los estudios alrededor de quintaesencia se han ampliado y difundido de forma transversal en todos los campos de la cosmología, hoy día sigue siendo un amplio tema de estudio y una hipótesis con amplia aceptación en el campo de la cosmología, pero adolece de un par de problemas, primero no existe a la fecha una explicación amplia y completa de los procesos inflacionarios y de expansión acelerada y segundo no existe un esquema fundamental o microscópico de el campo escalar de quintaesencia[1,2,3,4,5,6,7].

En todos los casos, las alternativas al modelo ΛCDM (que asume la gravedad de Einstein) requieren introducir parámetros adicionales, lo cual implica que la incertidumbre estadística se hace mayor. A pesar de esto, no hay indicios claros de que de estas alternativas se deban descartar, para algunos se decide según la navaja de Ockham la cual prefiere el modelo con menor número de parámetros libres, para otros los modelos alternativos brindan la posibilidad de entender fenómenos e interacciones más generales.

Un derivado de la teoría de quintaesencia es la de los campos Trackers, los cuales son campos escalares que en principio permitirían explicar las densidades de materia y energía en las épocas primordiales y actuales del universo, salvando lo que se conoce como el problema de coincidencias, estos campos aportan nuevos elementos dinámicos y conceptuales a un marco teórico que intenta explicar la energía oscura del universo[2].

En lo que sigue se asumirá el marco conceptual de teorías modificadas de la gravedad, se obtendrán los sistemas dinámicos cosmológicos que incluyen potenciales tipo trackers para el campo escalar, además de relacionar estos modelos con pruebas geométricas observacionales que permitan acotar modelos de energía oscura.

2 Marco teórico

Los elementos básicos del formalismo que se seguirá consisten en usar unidades naturale $c = \hbar = 1$, $\kappa = 8\pi G$, donde G es la constante gravitacional de Newton. La signatura métrica es $(-,+,+,+)$. El tensor de Ricci es definido como $R^{\nu}_{\alpha\nu\beta} = R_{\alpha\beta}$, donde el tensor de Riemann es $R^{\mu}_{\alpha\nu\beta} = \partial_\nu \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\beta}\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu}$, y el escalar de Ricci es $R = R^{\nu}_{\upsilon} = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$.

Como se dijo antes se considera un universo plano tipo FLRW, es decir un universo descrito mediante la métrica[10,11,12]

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sen^2\theta d\phi^2] \ , \tag{1}$$

y solucionando la ecuación de campo se obtiene la dinámica de la cosmología,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \ . \tag{2}$$

Un fluido perfecto es aquel donde las partículas no interactúan entre ellas y donde no hay conducción de calor o viscosidad, de tal modo que las componentes del tensor momentun-energía toma la forma

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 \\ 0 & p g_{ij} \end{pmatrix} \ , \tag{3}$$

en general, se pueden escribir las componentes del tensor momento-energía como

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} \ , \tag{4}$$

donde ρ y p están relacionadas mediante la ecuación de estado que define las propiedades de estas componentes de energía.

Ahora, según $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$ y la métrica de $FLRW$ se desarrolla un proceso algebraico para obtener las componentes de $G_{\mu\nu}$ que se pueden expresar como

$$G^0_0 = -\frac{3}{a^2}(\dot{a}^2 + k) \ , \tag{5}$$

$$G^i_j = \frac{1}{a^2}(2a\ddot{a}^2 + \dot{a}^2 + k)\delta^i_j \ , \tag{6}$$

donde a es el factor de escala, de esta manera las ecuaciones de Einstein son

$$H^2 = (\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho \ , \tag{7}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \ . \tag{8}$$

Las anteriores dos ecuaciones son la ecuación de Friedmann y la ecuación de aceleración. Por tanto, multiplicando la ecuación de Friedmann por a^2, diferenciando y usando la ecuación de aceleración, se obtiene

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \ , \tag{9}$$

llamada ecuación del fluido o de continuidad. El término $\dot{\rho}$ es la rata de cambio de densidad de energía en el volumen del universo y ρ corresponde a la disolución de densidad de energía debido a que el volumen se incrementa, mientras que la presión p causa perdida de energía porque esta debe trabajar haciendo que se incremente el volumen del universo. En cosmología, una presión única se relaciona con una densidad, tal que

$$p(t) = p(\rho) \ , \tag{10}$$

conocida como ecuación de estado. Además de lo anterior el parámetro de curvatura puede ser obtenido como

$$\frac{k}{a^2} = H^2[\frac{\rho}{\rho_c} - 1] = H^2[\Omega_m(t) - 1] \ , \tag{11}$$

donde $\Omega_m(t) = \frac{\rho}{\rho_c}$ es el parámetro adimensional de densidad y $\rho_c = \frac{2H^2}{8\pi G}$ se conoce como densidad crítica. La relación entre el parámetro de densidad y la geometría del universo de acuerdo a la ecuación de Friedmann es[8,9,10,11,12]

$$\Omega < 1 \ , \rho < \rho_c \ \rightarrow \ k = -1 \ : \ \text{Universo Abierto,} \tag{12}$$

$$\Omega = 1 \ , \rho = \rho_c \ \rightarrow \ k = 0 \ : \ \text{Universo Plano,} \tag{13}$$

$$\Omega > 1 \ , \rho > \rho_c \ \rightarrow \ k = +1 \ : \ \text{Universo Cerrado.} \tag{14}$$

En el caso de universo plano, el valor presente del factor de escala se puede normalizar a un valor conveniente $a_0 = 1$. De forma similar a lo anterior se puede definir el parámetro de densidad adimensional asociada con el término de curvatura

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \ ,$$

así en un universo espacialmente plano, la ecuación de Friedmann en términos de parámetros de densidad se puede expresar como

$$\Omega_m + \Omega_k = 1 \tag{15}$$

2.1 Ecuación de aceleración

Según lo mostrado anteriormente tenemos lo siguiente

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) \ , \tag{16}$$

esta ecuación de aceleración no depende del factor de curvatura el cual está presente en la ecuación de Friedmann, por lo tanto se tiene

$$\ddot{a} \quad > \quad 0 \ \rightarrow \ p < \frac{-1}{3}\rho \ \ , \tag{17}$$

$$\ddot{a} \quad < \quad 0 \ \rightarrow \ p > \frac{-1}{3}\rho \ \ . \tag{18}$$

Por lo tanto para tener expansión acelerada se requiere presión negativa $p < \frac{-1}{3}\rho$, conduciendo a $\ddot{a} > 0$.

2.2 Constante cosmológica

Lo anterior se basa en un universo sin constante cosmológica, sin embargo la ecuación de campo más completa incluye un término de constante cosmológica Λ, con lo cual se obtiene[10,11,12]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \ , \tag{19}$$

y donde las ecuaciones de evolución toman la siguiente forma

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \ , \tag{20}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \ . \tag{21}$$

Para obtener una solución de universo acelerado, se debe tener $\rho + 3p < 0$ con ecuación de estado

$$w = \frac{p}{\rho} < -\frac{1}{3} \ . \tag{22}$$

Así una constante cosmológica es exactamente equivalente a materia con $w = -1$, la cual contribuye negativamente al término de presión y de este modo despliega un efecto repulsivo. De forma similar a lo anterior se puede definir un parámetro adimensional de densidad de constante cosmológica

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \ , \tag{23}$$

se observa que es un parámetro que evoluciona con el tiempo según H. Además se obtiene la siguiente expresión

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \ , \tag{24}$$

y con esto se escribe la ecuación de Friedmann en términos de parámetros de densidad

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1 \ . \tag{25}$$

En 1929 Edwin Hubble descubrió que las galaxias distantes se alejan entre sí, esta fue la primera evidencia de que el universo se expande, y posteriormente se mostró que la evolución y futuro del universo depende de la cantidad de materia y energía contenida en este, de tal modo que el futuro del universo es controlado por la gravedad. La rata de expansión debe disminuir debido a que la materia-energía curva el espaciotiempo induciendo un acercamiento entre la materia-energía, es decir reduciendo la rata de expansión. De aquí, resultan dos hechos, si la cantidad de materia-energía no es la suficiente, el universo se expandirá por siempre, o si la cantidad de materia-energía es bastante, se frenará la expansión y posiblemente el universo colapsará en el llamado Big-Crunch. La medida de la velocidad de expansión es crucial para determinar el destino del universo, así se tiene que la observación de SNIa, CMB, lensado gravitacional, estructura a gran escala del cósmos, son consistentes y han permitido formular un modelo bastante completo y coherente del universo llamado ΛCDM, y como observación y resultado partícular de este modelo se tiene el de la expansión acelerada del universo, encontrada primero con la observación de SNIa.

Entre otras muchas cosas, se ha encontrado que el universo inició en una etapa de expansión acelerada, la cual en principio es atribuible a la misteriosa energía oscura que se puede presentar en dos formas, bien sea una constante cosmológica o bien sea un campo escalar[12], e igualmente se considera responsable de la expansión acelerada del universo.

3 Sistema dinámico para el modelo ΛCDM

La observación del universo y los múltiples datos obtenidos, sugieren que el universo es plano, homogéneo e isotrópico. Lo cual permite afirmar que el universo tiene una densidad de energía crítica con tres tipos principales de componentes: relativistas, no relativistas, y oscuras. De este modo, se puede formular lo que se conoce como **Modelo Estándar de la Cosmología (ΛCDM),**

En lo siguiente se obtendrá una descripción de sistema dinámico para la cosmología, primero para un modelo simple de universo plano con radiación y materia, y después se considerará materia y energía oscura.

3.1 Modelo para materia-radiación

Las ecuaciones de Einstein se pueden expresar como

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = \kappa\rho \ , \tag{26}$$

$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2} + \Lambda = \kappa p \ , \tag{27}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad , \tag{28}$$

En cosmología se asume que cada componente satisface su propia ecuación de conservación. Por lo tanto se requiere encontrar tres funciones $a(t)$, $\rho(t)$, $p(t)$. Igualmente se tiene una ecuación de estado lineal entre presión y densidad de energía.

Ahora, se reescribe la ecuación de campo usando el parámetro de Hubble, según la siguiente relación

$$\dot{H} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\ddot{a}}{a} - H^2 \ , \tag{29}$$

lo cual permite escribir las ecuaciones como

$$3H^2 + 3\frac{k}{a^2} - \Lambda = \kappa\rho \ , \tag{30}$$

$$-2\dot{H} - 3H^2 - \frac{k}{a^2} + \Lambda = \kappa p \ , \tag{31}$$

de este modo se puede obtener la ecuación

$$1 = \frac{\kappa\rho}{3H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} - \frac{k}{a^2H^2} \ . \tag{32}$$

Ahora, introduciendo los parámetros de densidad fraccionales como

$$\Omega = \frac{\kappa\rho}{3H^2} \ , \ \ \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \ . \tag{33}$$

Con el fin de encontrar un sistema dinámico simple se considera un universo espacialmente plano $k = 0$, y sus contenidos de materia son radiación ρ_r para la cual $w = 1/3$, y un fluido perfecto (polvo) ρ_m con $w = 0$. Por lo tanto las siguientes ecuaciones determinan el sistema dinámico

$$\begin{aligned} 3H^2 - \Lambda &= \kappa(\rho_r + \rho_m) \ , \\ -2\dot{H} - 3H^2 + \Lambda &= \kappa\frac{1}{3}\rho_r \ , \\ \dot{\rho_r} + 4H\rho_r &= 0 \ \ , \\ \dot{\rho_m} + 3H\rho_m &= 0 \ \ . \end{aligned} \tag{34}$$

Usando parámetros de densidad adimensionales, Ω_m, Ω_r, Ω_Λ , se puede expresar la ecuación de Friedmann como

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda \ \ . \tag{35}$$

Se quiere encontar el sistema dinámico para las variables Ω_m, Ω_r, para lo cual se considera

$$\frac{d}{dt}\Omega_m = \frac{d}{dt}(\frac{\kappa\rho_m}{3H^2}) = \frac{\kappa}{3}\frac{\dot{\rho_m}H^2 - \rho_m 2H\dot{H}}{H^4} = \frac{\kappa}{3H}(\frac{\dot{\rho_m}}{H} - 2\rho_m\frac{\dot{H}}{H^2}) \ , \tag{36}$$

y haciendo uso de las relaciones anteriores para $\frac{\dot{\rho_m}}{H}$ y para $\frac{\dot{H}}{H^2}$, se obtiene

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Omega_m = \frac{\kappa}{3H^2}(-3\rho_m + 3\rho_m(1 - \frac{\Lambda}{3H^2} + \frac{\kappa\rho_r}{9H^2})) \ \ , \tag{37}$$

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Omega_m = -\Omega_m + 3\Omega_m(\Omega_m + \Omega_r + \frac{\Omega_r}{3}) \ , \tag{38}$$

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Omega_m = -\Omega_m + 3\Omega_m(\Omega_m + \frac{4\Omega_r}{3}) \ , \tag{39}$$

$$\frac{1}{H}\frac{d}{dt}\Omega_m = \Omega_m(3\Omega_m + 4\Omega_r - 3) \ . \tag{40}$$

Ahora, se observa que

$$d\log a = \frac{\dot{a}}{a}dt = Hdt \ , \tag{41}$$

lo cual significa que se puede introducir una nueva variable independiente $N = \log a$, lo cual permite denotar la diferenciación respecto a N por una prima, de este modo se llega a la siguiente relación

$$\Omega_m' = \Omega_m(3\Omega_m + 4\Omega_r - 3) \ , \tag{42}$$

y del mismo modo se obtiene una relación para Ω_r, que se expresa como

$$\Omega_r' = \Omega_r(3\Omega_m + 4\Omega_r - 4) \ . \tag{43}$$

Lo que se debe hacer es integrar el sistema 2D para Ω_m , Ω_r y la condición $1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda$ implica que si $\Omega_\Lambda = 0$ entonces, $\Omega_m + \Omega_r \leq 1$. Como las densidades de materia normalizadas son no negativas, el plano de fase es el triángulo $\Omega_m + \Omega_r \leq 1$, $\Omega_m \geq 0$, $\Omega_r \geq 0$. Con esto, se integra en t, pero se representa las curvas en el plano (Ω_m, Ω_r), donde t juega el papel de parámetro de la curva (parámetrica).

4 El modelo ΛCDM (Lambda Cold Dark Matter)

El modelo ΛCDM (Lambda Cold Dark Matter), conocido como modelo estándar de la cosmología, es el modelo más concocordante con el Big-Bang y con los datos observacionales. Aquí se considerá un universo como el descrito anteriormente, con un espaciotiempo plano del tipo Friedmann-Robertson-Walker con componentes de materia como radiación(r), bariones (b), materia oscura (DM), y una constante cosmológica (Λ) como energía oscura (DE). Todos estos componentes se representan como fluidos perfectos cuya densidad de energía ρ y presión p están relacionadas mediante una ecuación de estado tipo barotrópica γ de la forma $p = (\gamma - 1)\rho$. Se tiene para radiación, $\gamma_r = 4/3$; para bariones y materia obscura $\gamma_b = 1$, mientras para constante cosmológica $\gamma_\Lambda = 0$. De este modo, la ecuación de Friedmann

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \ , \tag{44}$$

se puede expresar como

$$H^2 = \frac{\kappa^2}{3}(\rho_{DE} + \rho_{DM} + \rho_b + \rho_r) \ , \tag{45}$$

donde las ecuaciones de continuidad para cada fluido o componente está descrito por

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{DM} + 3H\rho_{DM} &= 0 \ , \\ \dot{\rho}_b + 3H\rho_b &= 0 \ , \\ \dot{\rho}_r + 4H\rho_r &= 0 \ , \\ \dot{\rho}_{DE} &= 0 \ . \end{aligned} \tag{46}$$

Definiendo nuevas variables, dadas por

$$\begin{aligned} x &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\rho_{DM}}}{H} \ , \\ y &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\rho_b}}{H} \ , \\ z &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\rho_r}}{H} \ , \\ w &= \frac{\kappa}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{\rho_{ED}}}{H} \ , \end{aligned} \tag{47}$$

con lo cual el sistema de ecuaciones diferenciales planteado anteriormente, se transforma en un sistema dinámico en el espacio de fase $\{x, y, z, w\}$, definido por

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{2}(f(x,y,z) - 1)x \ , \\ y' &= \frac{3}{2}(f(x,y,z) - 1)y \ , \\ z' &= \frac{3}{2}(f(x,y,z) - \frac{4}{3})z \ , \\ w' &= \frac{3}{2}f(x,y,z)w \ . \end{aligned} \tag{48}$$

donde la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + \frac{4}{3}z^2$ y por lo tanto la ecuación de Friedmann se puede escribir como un restricción en el espacio de fase dada por

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1 \ , \tag{49}$$

y los parámetros de densidad quedan definidos como

$$\begin{aligned} \Omega_{DM} &= x^2 \ , \\ \Omega_b &= y^2 \ , \\ \Omega_r &= z^2 \ , \\ \Omega_{DE} &= w^2 \ . \end{aligned}$$

La solución detallada de este sistema dinámico permite obtener la evolución de los parámetros de densidad, que en principio debe mostrar que la componente dominante del universo en épocas tempranas es la radiación, seguida por el proceso de desacoplamiento que conduce a la época de dominio de materia, y finalmente se debe observar que la constante cosmológica es quien determina la dinámica en el universo tardío.

5 Campo escalar

Los campos escalares son entes u objetos que se presentan en física de partículas, física de altas energías, supergravedad y en otros ámbitos de la física moderna. Igualmente su introdución en la cosmología se ve favorecida debido al rol que han jugado para explicar modelos de Inflación en el universo temprano, hoy día son candidatos a energía oscura, tal que se tienen diversos modelos de campos escalares como quintaesencia, campos fantásmas, campos taquiónicos, K-esencia, campos dilatónicos y otros. Para los propósitos aquí, sólo se consideraran modelos de quintaesencia y sus modelos derivados.

Quintaesencia difiere de la explicación dada por constante cosmológica, ya que introduce un campo escalar canónico ϕ con un potencial escalar $V(\phi)$ que interactúa con las otras componentes de materia-energía y con las componentes de gravedad[7,8,9,10].

El campo escalar está acoplado minimalmente a la gravedad, lo cual es descrito mediante la acción

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{1}{2\kappa^2}R + \mathcal{L}_\phi] \ , \tag{50}$$

donde $\kappa^2 = 8\pi G$, R es el escalar de Ricci y la densidad lagrangiana del campo escalar está dada por

$$\mathcal{L}_\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - V(\phi) \ . \tag{51}$$

Entonces realizando la variación de la acción respecto de ϕ conduce a la ecuación de Klein-Gordon

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \ , \tag{52}$$

igualmente se encuentra el tensor de energía-momentum del campo escalar, dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta S_\phi}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g}}\frac{\delta(\sqrt{-g}\mathcal{L}_\phi)}{\delta g^{\mu\nu}} \ , \tag{53}$$

con lo cual se obtiene

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - g_{\mu\nu}[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + V(\phi)] \ , \tag{54}$$

así, la densidad de energía del campo escalar y la presión se pueden expresar como

$$T_{00} = \rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \ , \tag{55}$$

$$T_i^i = p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \ , \tag{56}$$

entonces según estas expresiones, se puede expresar la ecuación de estado como

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \ . \tag{57}$$

Ahora bién, la ecuación de movimiento del campo escalar se expresa como

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 \ , \tag{58}$$

la cual conduce a la ecuación de conservación de la energía [8, 9, 10, 11], que se expresa como

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1 + w_\phi)\rho_\phi = 0 \ , \tag{59}$$

En consecuencia, ρ_ϕ escala de la siguiente forma

$$\rho_\phi \sim e^{-3\int(1+w_\phi)\frac{da}{a}} \ , \tag{60}$$

obviamente, el escalado de ρ_ϕ es inferior a la energía potencial $V(\phi)$ que inicia dominando sobre la energía cinética $\frac{1}{2}\dot{\phi}^2$ del campo escalar y w_ϕ se torna negativo.

Como el acople del campo escalar a la radiación o materia es minimal, se deduce que se conserva la energía de radiación o materia separadamente, en general

$$\dot{\rho}_n + 3H(1 + w_n)\rho_n = 0 \ , \tag{61}$$

en consecuencia se puede expresar la forma de escalar la densidad de radiación o materia de acuerdo a

$$\rho_n \sim e^{-3\int(1+w_n)\frac{da}{a}} \ , \tag{62}$$

donde ρ_n es la densidad de energía del constituyente dominante (materia o radiación) en el universo con ecuación de estado $p_n = w_n\rho_n$ con $w_n = \frac{1}{3}$ para radiación y $w_n = 0$ para materia.

6 Teorías modificadas de la gravedad

La teoría de la Relatividad General (RG) es una teoría geométrica del espaciotiempo, basada principalmente en un campo tensorial métrico, a pesar de los mútiples aciertos y éxitos de la teoría son muchos los aspectos que no son explicados ni abordados por ella, por ejemplo la expansión acelerada del universo, la inflación cósmica, energía y materia oscura, entre otros, debido a ello han surgido muchas otras teorías alternas, como por ejemplo teorías escalar-tensorial (TST), teorías $f(R)$ o potenciales tipo tracker. En general una teoría escalar-tensorial incluye campos escalares y campos métricos tensoriales que permite representar de forma más amplia interacciones y fenómenos más generales. En este tipo de teorías se desarrolla un marco conceptual más general, ya que una parte de la gravitación es descrita por un campo escalar y otra parte es descrita por el campo tensorial métrico. En RG los únicos grados de libertad del campo gravitacional se adjudican a la métrica $g_{\mu\nu}$, quiere decir esto que la gravitación es descrita sólo por el tensor métrico, entonces como ya se mencionó, se pueden elaborar teorías más generales que incorporen otros grados de libertad, en partícular un campo escalar ϕ. Por lo tanto, se plantea la siguiente acción para la teoría escalar-tensorial

$$S_{ST} = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{y(\phi)}{2}R + \frac{w(\phi)}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi) - V(\phi)] + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \ , \tag{63}$$

donde R es el escalar de Ricci, $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico, $V(\phi)$ es el potencial del campo escalar, y $y(\phi)$, $w(\phi)$ son funciones del campo escalar, $S_M(g_{\mu\nu}, \psi)$ es la acción que describe los campos de materia-energía acoplada a la gravitación.

Otro tipo de gravedad modificada es la llamada teoría $f(R)$, la cual generaliza la acción para permitir otros invariantes de curvatura, distintos del escalar de Ricci R, entonces se construye un lagrangiano con una función general del escalar de curvatura, no obstante, el campo gravitacional sigue siendo representado por la métrica, como en RG. De manera similar se plantea la acción para la teoría $f(R)$ como

$$S_{f(R)} = \int d^4x\sqrt{-g}f(R) + S_M(g_{\mu\nu}, \psi) \ .$$

La acción para cada una de estas teorías conduce respectivamente a las ecuaciones de campo, así tenemos que realizando las respectivas variaciones respecto a la métrica y respecto al campo escalar se obtienen las siguientes ecuaciones de campo para TST

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{\kappa}{\phi}T_{\mu\nu} + \frac{1}{\phi}(\nabla_\mu\nabla_\nu - g_{\mu\nu}\Box)\phi + \frac{w(\phi)}{\phi^2}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial_\alpha\phi)^2) - g_{\mu\nu}\frac{V(\phi)}{2\phi} \ , \tag{64}$$

$$\frac{2w(\phi)+3}{\phi}\Box\phi = \frac{\kappa}{\phi}T - \frac{w'(\phi)}{\phi}(\partial_\alpha\phi)^2 + V'(\phi) - 2\frac{V(\phi)}{2\phi} \ , \tag{65}$$

e igualmente la ecuación de campo para teorías $f(R)$, que se puede expresar como

$$f(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}\Box - \nabla_\mu\nabla_\nu)f(R) = \kappa T_{\mu\nu} \ , \tag{66}$$

La relación entre las teorías TST y $f(R)$ y sus equivalencias se han estudiado ampliamente, en partícular las equivalencias entre $f(R)$ y un tipo especial de TST llamada teoría Brans-Dicke, pero en general existen las equivalencias respectivas entre dichas teorías. Por lo tanto se pueden obtener las respectivas relaciones cosmológicas, las cuales involucran, necesariamente, términos adicionales que deben dar cuenta de nuevas interacciones, o nuevos fenómenos o permitir realizar nuevas predicciones naturales. En consecuencia, en el marco de estas teorías se pueden obtener los respectivos sistemas dinámicos cosmológicos, que deben ser equivalentes, las cosmologías respectivas y los modelos de energía oscura.

Ahora bien, para el desarrollo del presente proyecto de investigación, es necesario relacionar los marcos teóricos y los modelos cosmológicos, con la respectiva observación, en partícular con las distancias de luminosidad u otras distancias.

7 Medida de distancias en cosmología

En cosmología existen varias maneras diferentes de especificar la distancia entre dos puntos. Debido a la expansión cósmica del universo, las distancias entre objetos comóviles está cambiando según cambia el factor de escala. La constante de Hubble H_0 es la constante de proporcionalidad entre la velocidad de recesión v (velocidad con la que se alejan las galaxias) y la distancia d en la expansión del universo (distancia a la que se encuentra una galaxia)[15],

$$v = H_0 d \ , \tag{67}$$

las dimensiones de H_0 son inversas del tiempo, usualmente se expresa

$$H_0 = 100h \quad km\ s^{-1}\ Mpc^{-1} \ , \tag{68}$$

donde h es el factor que parametriza el desconocimiento del valor exacto de H_0, se considera $0.6 < h < 0.9$. El inverso de la constante de Hubble es el llamado tiempo de Hubble,

$$t_H = \frac{1}{H_0} = 9.78 \times 10^9\ h^{-1}\ yr = 3.09 \times 10^{17}\ h^{-1}\ s \ , \tag{69}$$

igualmente se define la distancia de Hubble como la distancia que recorre la luz en el tiempo de Hubble

$$d_H = c \times t_H = \frac{c}{H_0} = 3000h^{-1}\ Mpc = 9.26 \times 10^{25} h^{-1}\ m\ . \tag{70}$$

Estas cantidades determinan la escala del universo, es decir que permiten parametrizar cualquier distancia o tiempo. Además, es convencional en cosmología trabajar en unidades geométricas con $c = t_H = d_H = 1$[15].

7.1 Distancia de Luminosidad

Para calcular distancia se usa el hecho de que el flujo observado de fotones por unidad de tiempo de una fuente disminuye como el cuadrado de la distancia. Si F es el flujo observado y L es la luminosidad emitida por la fuente, entonces para un espacio plano que no se expande, se encuentra

$$F = \frac{L}{4\pi d_L^2}\ , \tag{71}$$

Para distancias cosmológicas, es necesario tener presente otras consideraciones. La luminosidad de n fotones por unidad de tiempo emitidos por una fuente a redshift z es,

$$L = \frac{nh\nu_e}{dt_e}\ , \tag{72}$$

igualmente el flujo observado se define como

$$F = \frac{nh\nu_o}{dt_o}\frac{1}{d_P^2}\ , \tag{73}$$

donde d_p es la distancia propia. Además se sabe que

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = 1 + z\ , \tag{74}$$

y que $dt_e \neq dt_o$, debido a que la fuente se encuentra en movimiento, y por lo tanto hay dilatación del tiempo, los observadores miden que el tiempo en la fuente es más lento, es decir

$$dt_o = dt_e(1+z)\ , \tag{75}$$

de tal modo que el flujo ahora es

$$F = \frac{nh\nu_o}{dt_o}\frac{1}{d_P^2} = \frac{nh\nu_e}{dt_e}\frac{1}{(1+z)^2}\frac{1}{d_P^2} = \frac{L}{(1+z)^2 d_P^2}\ , \tag{76}$$

Así, la distancia de luminosidad se relaciona con la distancia propia como

$$d_L = (1+z)d_p\ . \tag{77}$$

Ahora, en consideración de la métrica FLRW, la distancia propia está dada por

$$d_p = \frac{1}{|\Omega_k|^{1/2}} \sinh\left\{|\Omega_k|^{1/2}\int_0^z [H(z)]^{1/2}\, dz\right\}\ . \tag{78}$$

7.2 Modelo ΛCDM bajo datos de SN Ia

Como se ha observado el modelo estándar proporciona las funciones de densidad de cada componente del universo. El método formal para incorporar datos observacionales a un modelo cosmológico, o la forma de restringir un modelo cosmológico bajo cierto tipo de observaciones y cierto modelo teórico, consiste en aplicar la técnica de máxima verosimilitud, en la cual se construye el estadístico chi-cuadrado, y mediante un proceso de minimización y marginalización se determina el valor óptimo de los parámetros involucrados en el modelo. Así, el chi-cuadrado queda definido como

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{m_{obs}(z_i) - m_{teo}(z_i)}{\sigma_i(z_i)} \right]^2 , \tag{79}$$

donde m_{obs} es la magnitud aparente observada corregida por la curva de luz ancho-luminosidad, extinción galáctica, entre otros, m_{teo} es la magnitud aparente teórica o esperada, σ_i es la desviación estándar de las observaciones, y la suma se realiza hasta el total de datos disponibles. La magnitud aparente teórica, se obtiene según la siguiente expresión

$$m_{teo}(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_{DM}) = 5 \log d_L(z; \Omega_m, \Omega_\Lambda, \Omega_{DM}) + M - 5 \log H_0 + 25 \ . \tag{80}$$

De tal forma que siguiendo el proceso de Máxima Verosímilitud (*maximum likelihood)*, se obtiene los valores óptimos para los parámetros, las regiones de confianza para los parámetros considerados, el ajuste para los datos de supernovas, la magnitud residual, el parámetro de desaceleración, y otros más[1,15].

La prueba geométrica que se construirá se basará en datos de SNIa los cuales se usan para determinar y medir parámetros cosmológicos. En partícular se puede estudiar un tipo de distancia conocido como distancia por retrazo temporal. Las distancias por retraso temporal, que consiste en una medida dada por la combinación de tres distancias diametrales angulares, puede ser extraída de las curvas de luz de retraso temporal observadas. Esta contiene información de la geometría espaciotemporal y las propiedades de las componentes de energía-materia del universo. Esta técnica que se puede desarrollar con una muy buena precisión brinda la posibilidad de conocer los contenidos de densidades de energía-materia en etapas primordiales del universo, es decir en etapas donde posiblemente los campos escalares y sus potenciales dominaban, esto hace factible considerar este tipo de técnica para determinar por lo menos algunas cotas de campos escalares en etapas tempranas.

El retraso temporal está determinado por una combinación de distancias diametrales angulares, que se expresa como

$$D_{\Delta t} = \frac{D_A(z_l) D_A(z_s)}{D_A(z_l, z_s)} \ , \tag{81}$$

de este modo el retraso temporal está dado por

$$\Delta t = (1 + z_l) D_{\Delta t} \Delta \phi \ , \tag{82}$$

y donde las distancias diametrales angulares se determinan bajo el modelo cosmológico de interés[16].

References

[1] Planck 2015 results. XIV. Dark energy and modified gravity ,arxiv.org, 1502.01590, may 2016.

[2] Kai Liao, Zhengxiang Li, Gua-Jian Wang, Xi-Long Fan, Test of FLRW metric and curvature with strong lenstime delays, arxiv:1704.043229v1, 14 Apr 2017

[3] Vinod B. Johri, Searchs for Tracker Potentials in Quintessence Theory, arXiv: astro-ph/0108247v1, 14 Aug 2001

[4] Maneekhum. Phatchaya, The Tracker Solutions for Cosmological Scalar Field, Thesis Master Sciences, Naresuan University, 2012

[5] Rakhi R, Indulekha K, Dark Energy and Tracker Solutions, Mahatma Gandhi University, 2013

[6] L. Arturo Ureña-López, Tonatiuh Matos, A new cosmological trackers solutions for Quintessence, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPE, 2000

[7] Y. Fujii and K. Maeda, The Scalar-Tensor Theory of Gravitation (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge Univ. Press, 2003)

[8] A. Silvestri and M. Trodden, Rept. Prog. Phys.72 096901 (2009), arXiv:0904.0024 [astro-ph.CO]

[9] V. Sahni and A. A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D9,373 (2000) [astro-ph/9904398]

[10] Azam Hussain, Shruti Thakur, Tapomoy Guha Sarkar (Birla Inst. Tech. Sci.), Anjan A. Sen (Jamia Millia Islamia), Prospects of probing quintessence with HI 21-cm intensity mapping survey Mar 7, 2016. 7 pp. Published in Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 463 (2016) no.4, 3492-3498, arXiv:1603.02087 [astro-ph.CO]

[11] P. J. Steinhardt,L. Wang, and I. Zlatev, Cosmological Tracking Solutions, arXiv:astro-ph/9812313v1

[12] C. Rubano, P. Scudellaro, E. Piedipalumbo, S. Capozziello, M. Capone, Exponential Potentials for Tracker Fields, Feb 2004, arXiv:astro-ph/0311537v3

[13] Satadru Baga, Swagat S. Mishraa, and Varun Sahnia, New tracker models of dark energy, arXiv:1709.09193v2 [gr-qc] 28 Sep 2017

[14] V.B Johri, Search for Tracker Potentials in Quintessence Theory, arXiv: 0108247v1, 14 Aug 2001

[15] D. W. Hogg, *Institute for Advanced Study*, Princeton NJ, astro-ph/9905116v4, 2000.

[16] Kai Liao, Zhengxiang Li, Gua-Jian Wang, Xi-Long Fan, Test of FLRW metric and curvature with strong lenstime delays, arxiv:1704.043229v1, 14 Apr 2017.