

Modelos Braneworld Combinados

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 01-03- 2014; Aceptado 30 - 03- 2014; Publicado en línea 10 - 10 - 2014

Resumen

La ciencia física en los últimos años ha desarrollado varios esquemas teóricos que confrontan la asombrosa realidad natural con nuestra limitada capacidad de análisis y comprensión de aquello que llamamos realidad. La teoría del llamado braneworld o mundos membrana, es un espectacular marco teórico que en principio unifica varias teorías físicas, y ofrece múltiples alternativas de explicación y comprensión de la intrincada realidad oculta de la naturaleza. En este corto trabajo se muestra el esquema teórico del modelo braneworld que unifica el modelo de Randall-Sundrum y el modelo de Lykken, se colocan algunos resultados y se enuncian algunas conclusiones.

PACS: 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv

Palabras Claves: Mundobrane, dimensiones adicionales, reducción KK, gravitones, compactificación.

Abstract

Physical science in recent years has developed several theoretical schemes facing the amazing natural reality with our limited capacity for analysis and understanding of what we call reality. Theory called braneworld or membrane worlds is a great theoretical framework that in principle unifies various physical theories, and offers multiple alternatives of explanation and understanding of the intricate hidden reality of the nature. In this short paper shown the theoretical framework of the braneworld model that unifies the Randall-Sundrum model and the model Lykken, some results are placed and some conclusions are drawn.

PACS: 04.50.-h, 04.50.Kd, 14.70.Kv

Keywords: Braneworld, extra dimensions, reduction KK, gravitons. compactification.

©2014. Centro Colombiano de Cosmología y Astrofísica. Todos los derechos reservados.

1 Introducción

En estos momentos, donde todo transcurre tan rápido, parecen un poco lejanos los modelos propuestos por Randall y Sundrum, quienes exhibieron un par de modelos cuyo objetivo principal era mostrar por qué la gravedad es tan débil en comparación con las otras interacciones, en otros palabras decidieron proponer una solución al llamado problema de jerarquías. Una de las características principales de dichos modelos es la de

considerar una dimensión espacial no compacta, en claro contraste con los modelos de dimensiones adicionales compactas. En tales modelos, cuyo origen primordial hay que buscarlo en la teoría de cuerdas y en teoría-M, el universo tal cual lo conocemos se encuentra contenido en las llamadas branas, algo así como un tapiz donde los grabados y figuras representan el universo; considero que está es una idea sumamente atractiva, evocativa, y altamente significativa, considerar que nuestro universo es como una membrana que gracilmente se agita en un volumen extenso es sin duda una idea bastante elegante y consecuente con nuestro paulatino alejamiento del geocentrismo; nuestro planeta dejó de ser el centro del universo, después nuestro sol dejó de ser el centro del universo, posteriormente, se encontró que estamos inmersos en un enorme sistema llamado galaxia, la cual tampoco es el centro del universo, en las últimas décadas se han encontrado una serie de estructuras materiales y energéticas de creciente tamaño y complejidad dando origen a lo que llamamos estructura a gran escala del universo, y por lo que se puede inferir es posible que se encuentren estructuras más asombrosas y enormes en el tejido espaciotemporal, ello ha venido poco a poco configurando la imagen del universo, que hasta donde se conoce tuvo un origen específico, tiene unas estructuras impresionantes, acompañadas de una dinámica extraordinaria, y es posible que el universo como lo conocemos se transforme en algo totalmente nuevo o termine diluyéndose o desapareciendo totalmente, ¡¡he ahí el misterio de la cosmología!!.

Ahora, bien, el modelo de braneworld considero (opinión personal), continúa este proceso de categorización, y ahora parece ser que todo nuestro universo resulta ser como una membrana en un volumen de dimensiones adicionales o extras, análogo a lo que se conjetura en modelos de multiverso donde el universo conocido es un burbuja en inflación o que sufrió un proceso inflacionario, en una plétora de universos que se crean continuamente.

Bueno, como se dijo anteriormente, la idea del braneworld es bastante sugestiva, entonces imaginemos algunas cosas, o tratemos de contestar o plantear algunas preguntas, ¿Que apreciaría un observador fuera de la brane?, bueno si pensamos en un observador fuera de la brane, lo primero que notaríamos es que no observa nada porque no existe radiación electromagnética, pero percibe la gravitación, es decir podría realizar experimentos gravitacionales y encontrar que por lo menos localmente hay efectos gravitacionales, y quizá también perciba otros campos similares a la gravedad, si vamos un poco más allá este observador consciente, posiblemente pueda desarrollar un equipo que le permita detectar la presencia de las branas, las cuales percibiría como unas láminas o paquetes energéticos, con movimientos intrínsecos muy complejos, a decir verdad este es un escenario realmente nuevo.

Quizá, podríamos preguntar también, ¿Por qué no detectamos la presencia del bulk o de las dimensiones extras, pudiera ser que debido a que nos encontramos "como encerrados o atrapados" en la brane, las interacciones electromagnéticas no pueden propagarse más allá del horizonte definido por la brane, es la gravitación o en otros términos la geometría de la brane quien define el grado de interacción con ese llamado bulk. También se puede preguntar cómo se observa la expansión cosmológica desde el bulk o desde la brane, puede inferirse que desde la brane observaríamos la expansión como la hemos observado de tiempo atrás, pero desde el bulk quizá se observe como un auténtico globo que se expande siguiendo alguna dinámica especial. Como se puede observar el tema es bastante especulativo, pero también bastante lógico y coherente con muchos resultados físicos conocidos hoy día.

Los modelos de braneworld tienen como base los modelos desarrollados por Randall y Sundrum hacia 1999, posteriormente se han desarrollado otros muchos modelos, se han incorporado campos escalares, vectoriales, otras dimensiones, simetrías, dimensiones compactas y no compactas, entre otros muchos elementos; pero pienso que los modelos inicialmente propuestos rompen los esquemas convencionales y determinan un punto de partida diferente y especial para comprender muchos fenómenos que continúan sin clara explicación ni fundamentación teórica.

Aquí, en este corto artículo, sólo quiero considerar, un modelo que es el modelo combinado de Randall y Sundrum, es decir combinar los modelos RSI y RSII, el cual se conoce como modelo Lykken-Randall.[1][2][3][4][5][6][7].

2 Modelos con dimensiones extras

Aquí se muestra de forma genérica el telón de fondo sobre el que se desarrolla la idea de dimensiones adicionales y de braneworld. El estudio de los modelos teóricos de campos en el espaciotiempo con dimensiones espaciales extras fueron iniciados por Kaluza-Klein, éstos daban origen a una aproximación teórica de campos, para la

descripción de interacciones de partículas en un espaciotiempo multidimensional. Una fuerte motivación para la aproximación KK proviene de la teoría de cuerdas en donde la multidimensionalidad del espaciotiempo se requiere para una formulación consistente.

Recientemente modelos con dimensiones extras de un nuevo tipo, llamados modelos ADD y RS, se han propuesto como esquemas de altas dimensiones. Fueron diseñados para suministrar una novedosa solución al problema de jerarquías en altas energías. Muchos hechos esenciales de estos modelos eran inherentes en la aproximación KK. También muchas ideas y conceptos recientemente descubiertos en teoría de cuerdas y teoría M, han sido incorporados en tales modelos[8][9][10].

La aproximación KK se basa en la hipótesis de que el espaciotiempo es un espacio pseudo-euclideo con $(4+d)$ -dimensiones, es decir que se puede obtener como un producto topológico

$$E_{4+d} = M_4 \times K_d \quad (1)$$

donde M_4 es el espaciotiempo cuatridimensional y K_d es un espacio compacto d -dimensional de tamaño característico R . Ahora bien, si se introducen coordenadas locales sobre dicho espacio, se pueden denotar como

$$x^M = \{x^\mu, y^m\} \text{ , con } M = 0, 1, 2, \dots, 3 + d \text{ , } \mu = 0, 1, 2, \dots \text{ , } m = 1, 2, \dots, d \text{ ,} \quad (2)$$

en consecuencia con el producto directo o con la estructura del producto directo del espaciotiempo, la medida de distancias o métrica que usualmente se escoge se puede obtener como

$$ds^2 = G_{MN}(x)dx^M dx^N = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu + \gamma_{mn}(y)dy^m dy^n \text{ .} \quad (3)$$

Ahora bien, consideremos el espaciotiempo de Minkowski, con un campo escalar $(4+d)$ -dimensional, donde la integral de acción estará dada por

$$S = \int d^{4+d}x \sqrt{-G} \left[-\frac{1}{2}(\partial_M \phi)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!}g_{(4+d)}\phi^4 \right] \text{ ,} \quad (4)$$

de este modo para interpretar la teoría como un campo escalar cuatridimensional efectivo ϕ se recurre a una expansión en series de Fourier

$$\phi(x, y) = \sum_n \phi^{(n)}(x) Y_n(y) \text{ ,} \quad (5)$$

donde las funciones $Y_n(y)$ son funciones propias normalizadas ortogonales del operador de Laplace Δ_{K_d} en el espacio K_d , de tal forma que

$$\Delta_{K_d} Y_{(n)}(y) = \frac{\lambda_n}{R^2} Y_{(n)}(y) \text{ ,} \quad (6)$$

aquí n es un multi-índice que marca los valores propios $\lambda_{(n)}$ de las funciones propias $Y_{(n)}(y)$.

En el caso de una compactificación toroidal se identifica el espacio de dimensiones adicionales como $K_d = T^d$, con T^d un toro d -dimensional con radio igual a R , así de este modo se hace más simple el análisis, y si consideramos el caso de la gravedad $(4+d)$ -dimensional, la cual se puede obtener de la acción dada por

$$S_E = \int d^{4+d}x \sqrt{-G} \frac{1}{16\pi G_{(4+d)}} R^{(4+d)} [G_{MN}] \text{ ,} \quad (7)$$

donde el escalar de curvatura que puede calcular con ayuda de la métrica G_{MN} , así de este modo, desarrollando la expansión en modos propios e integrando sobre K_d se llega a la integral de acción cuatridimensional

$$S_E = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{16\pi G_{N(4)}} R^{(4)} \left[g_{MN}^{(0)} \right] + \dots \right\} \text{ ,} \quad (8)$$

y de esta manera se identifica $G_{N(4)} = \frac{1}{V_d} G_{N(4+d)}$, $M_{Pl} = (G_{N(4)})^{-1/2} = 1.2 \times 10^{19} \text{ GeV}$, $M = (G_{N(4+d)})^{-\frac{1}{d+2}}$ con lo cual

$$M_{Pl}^2 = V_d M^{d+2}. \quad (9)$$

La cota o valor límite sobre el tamaño de R , puede ser derivado de la ausencia de señales de excitación de modos KK en las partículas del Modelo Estándar, con los datos disponibles hoy día se infiere un valor para la masa de los posibles modos KK-masivos dada por

$$m_1 \sim \frac{1}{R} \geq 1TeV, \quad (10)$$

Un elemento fundamental en el análisis de teorías con dimensiones extras tiene que ver con la llamada localización de campos, o en otros términos la restricción que deben tener los campos conocidos sobre la brane, esto constituye un ingrediente esencial, los mecanismos de localización de campos sobre las branes aseguran coherencia y consistencia con la observación. Inicialmente, se considerará la teoría del campo escalar $\Phi(x, y)$, con un potencial definido como

$$V(\Phi) = \frac{1}{4} \lambda (\Phi^2 - \frac{1}{\lambda} m^2)^2, \quad (11)$$

es sencillo chequear que existe un tipo de solución que depende de la quinta coordenada o de la dimensión extra, lo cual conduce a una solución dada por

$$\Phi_{cl}(y) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} m \tanh \frac{1}{\sqrt{2}} m(y - y_0), \quad (12)$$

de tal forma que la densidad de energía de esta configuración está localizada en la vecindad del hiperplano $y = y_0$ en una región de espesor $\sim \frac{1}{m}$.

El espectro de fluctuaciones cuánticas o modos KK alrededor del tipo de solución incluye a los modos cero (correspondiente a la simetría translacional de la teoría), un modo masivo y un continuo de estados. A muy bajas energías solo los modos discretos son excitados, y efectivamente la teoría describe campos moviéndose dentro del pozo de potencial a lo largo del plano y_0 . El modelo suministra un ejemplo de localización dinámica de campos sobre el hiperplano el cual juega el rol de espacio tridimensional inmerso en el espacio cuatridimensional. Este hiperplano es referido como una tre-brane o "pared". Si la energía de los modos es lo suficientemente alta el espectro continuo es excitado, y una manifestación posible de esto puede hacerse efectiva con partículas escapando hacia la quinta dimensión. De manera similar los fermiones acoplados a los campos escalares pueden estar localizados sobre la brane[23][24][25].

3 Motivación para una teoría de cuerdas y teoría-M

Un caso importante es cuando el espacio de dimensiones extras es un orbifold, que se define como si se considerará un círculo S^1 de radio R y se denotaran sus puntos por y , entonces el orbifold es construido por identificación de puntos los cuales se relacionan por la transformación Z_2 (simetría de espejo), tal que, $y \rightarrow (-y)$. En consecuencia tenemos la identificación usual de puntos S^1 debido a la periodicidad $y \simeq (y + 2\pi R)$, donde $y = R$, $y = \pi R$ son puntos fijos de la identificación- Z_2 . Una 3-brane, o hiperplano tridimensional, puede jugar el rol de nuestro mundo tridimensional, el cual se puede localizar en estos puntos fijos. En el caso de la compactificación del orbifold todos los campos multidimensionales se pueden describir por funciones pares o impares, es decir $\Phi(x, y) = \Phi(x, -y)$, o también $\Phi(x, y) = -\Phi(x, -y)$, así que sus modos de descomposición son de la forma

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(x) \cos \frac{ny}{R}, \text{ si } \Phi(x, y) \text{ es par}, \quad (13)$$

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(n)}(x) \sin \frac{ny}{R}, \text{ si } \Phi(x, y) \text{ es impar}, \quad (14)$$

un hecho importante de teoría de cuerdas es que existen las configuraciones de p-branes las cuales constituyen gauges y otros grados de libertad.

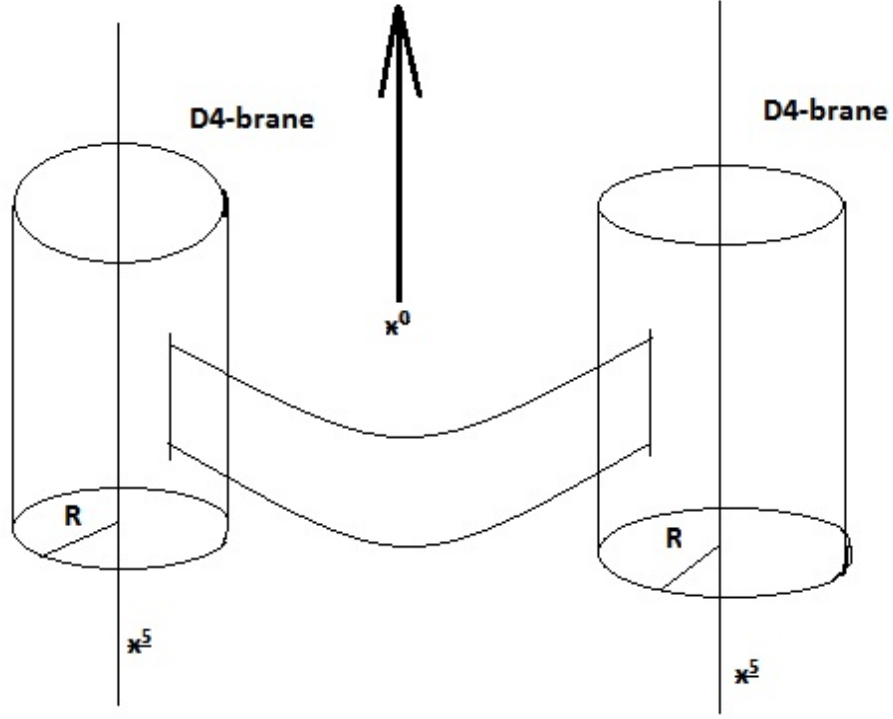


Figure 1: Este esquema muestra un gran espacio el bulk y dos D4-branes, en teoría de cuerdas Tipo I.

Otro hecho importante es que existe una compactificación consistente de los límites 11D de la teoría-M, considerada como una teoría de todas las cosas, bajo (3+1)-dimensiones. El camino de la compactificación no es único, por ejemplo, en el régimen no perturbativo de la teoría de cuerdas heteróticas $E_8 \times E_8$ puede ser identificado como el límite 11D de la teoría-M con una dimensión compactificada en el orbifold S^1/Z_2 y con un conjunto de campos gauge E_8 en cada uno de los 10D puntos fijos del orbifold. Compactificando esta teoría sobre una variedad Calabi-Yau se llega a una teoría la cual, para ciertos rangos de energía, se comporta como un modelo supersimétrico (SUSY) cinco-dimensional N=1 con una dimensión compactificada sobre S^1/Z_2 .

Adicional a las motivaciones anteriores dadas para construir teoría de cuerdas o teoría-M, se tienen otras motivaciones para elaborar dichos escenarios, por ejemplo. El final de una cuerda abierta está restringida a D4-branes en el espaciotiempo 11-dimensional. Las excitaciones de cuerdas abiertas incluyen bosones gauge, campos escalares y fermiones. La teoría efectiva a bajas energías de estas excitaciones se supone que contienen el Modelo Estándar (MS), de este modo los campos del MS están localizados sobre las D4-branes. Ahora bien, las cuerdas cerradas se propagan en el bulk, es decir en todo el espaciotiempo. Las excitaciones de cuerdas cerradas incluyen el gravitón, por lo tanto la gravedad se propaga en el bulk. Una imagen esquemática del espaciotiempo en la teoría de cuerdas tipo-IA, se puede esquematizar en la figura anexa.

Las D4-branes contienen tres-dimensiones como de espacio no compactos, correspondiente a nuestro espacio usual, y una dimensión compactificada en el círculo S^1 de radio R . En la medida que se aleja del resto de las dimensiones que son concernientes, la quinta dimensión espacial o una parte de ella puede formar un espacio compacto de tamaño característico R . La asunción $R \gg r$ no parece ser imposible, esto es motivado por el hecho de que en teoría de cuerdas se tiene la siguiente relación

$$M_{string} = M_{Pl} \frac{\sqrt{k\alpha_{GUT}}}{2}, \quad (15)$$

por lo tanto la relación $M_{str} \ll M_{Pl}$ y $R \sim M_{str}^{-1} \gg M_{PL}^{-1} \sim r$ lo cual no es inconsistente con la teoría de cuerdas. Con esta posibilidad en mente existe la propuesta de escenarios donde parte de la dimensión compacta tiene un tamaño relativamente grande, por ejemplo $R^{-1} \sim 10 MeV$, $r^{-1} \sim 1 TeV$, con lo cual se asume que para alcanzar el radio de curvatura de la brane debemos explorar energías del orden de los TeV.

Otro aspecto importante es la posibilidad de unificar la interacción débil y fuerte a un escala menor de masa o energía, digamos $M_{GUT} \sim 10 TeV$, o quizá también permita, la existencia de un mecanismo de rompimiento SUSY sobre la brane, entonces el rompimiento SUSY es comunicado a la brane MS vía campos en el bulk. Pueden, existir otras razones para explorar modelos físicos en altas dimensiones pero no es el tema de este corto artículo [11][12][13][14][15].

4 Modelo de Randall-Sundrum

Considerando una métrica general, que de cuenta de soluciones de tipo cosmológico, tal como $ds_5^2 = -N^2(t, y)dt^2 + A^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + B^2(t, y)dy^2$, en la cual podemos hacer $B^2(y) \rightarrow 1$, con lo cual se deja independiente la coordenada adicional o dimensión extra de la función $B^2(y)$, así obtenemos [1][2]

$$ds_{4+1}^2 = -N^2(y)dt^2 + A^2(y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + dy^2, \quad (16)$$

entonces podemos simplificar

$$ds_{4+1}^2 = (N^2(y)\delta_{ij} + A^2(y)\gamma_{ij}) dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (17)$$

de tal forma que se puede hacer la siguiente identificación¹ $(N^2(y)\delta_{ij} + A^2(y)\gamma_{ij}) = e^{\frac{-2|y|}{l}} \eta_{\mu\nu}$. Esta identificación general permitirá desarrollar el modelo de braneworld y solucionar en principio el problema de jerarquías, el cual es un problema fundamental en la física de altas energías.

En el marco de los modelos de braneworld, como por ejemplo en los modelos de Randall y Sundrum, se considera que las branes están sumergidas en un espaciotiempo AdS_5 , en donde se puede introducir un sistema de coordenado gaussiano normal, así que las coordenadas en tal espaciotiempo se pueden denotar como $x^\mu = (x^a, y)$ con lo cual puede considerarse que la métrica adopta la siguiente expresión [3][4]

$$ds^2 = e^{-2K|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (18)$$

el factor de curvatura exponencial, introducido anteriormente, significa que el volumen en el espacio $5D$ se puede hacer pequeño cuando y se hace grande. En su primer artículo Randall y Sundrum mostraron que la jerarquía entre la escala electrodébil de TeV y la aparente escala de Planck de $10^{19} GeV$, se puede explicar por el factor de curvatura, aún si el tamaño de la dimensión extra es relativamente pequeña (distancia entre branes). Ya en su segundo artículo mostraron que si no existía una segunda brane, y la dimensión extra se extendía al infinito, la gravedad puede permanecer efectivamente localizada sobre la única brane existente, ya que el volumen integrado permanece finito cuando $y \rightarrow \infty$, esta es la razón por la cual se propuso este modelo como una alternativa a la compactificación, es decir como una manera diferente de estudiar y de introducir dimensiones adicionales de tipo espacial infinitas.

El éxito experimental de la ley Inversa del Cuadrado y de la Teoría General de la Relatividad, es que parece que en todas las situaciones se implican cuatro dimensiones espaciotemporales no compactas (universo $3+1$). De otra parte, la concepción clásica o tradicional es que las dimensiones adicionales pueden ser aceptadas tan sólo si ellas son compactas y suficientemente pequeñas para ser consistentes con las pruebas gravitacionales corrientes, como también si existen n -dimensiones extras compactas, la escala de Planck, debe relacionarse con la escala gravitacional en altas dimensiones, mediante $M_{Pl}^2 = M^{2+n} V_n$, donde V_n , es el volumen del espacio n -dimensional.

¹ En realidad la métrica Randall-Sundrum tiene su origen en la teoría de cuerdas, propiamente dicha, y es allí donde se encuentra plenamente justificado el factor de curvatura exponencial.

El modelo Randall-Sundrum, muestra que nada de lo establecido anteriormente, es necesariamente cierto, ya que lo establecido esta basado en las propiedades de una geometría factorizable, la historia puede cambiar significativamente cuando tal consideración sea omitida, talvéz la consecuencia más dramática es que quizá vivamos en un espaciotiempo de $(4 + n)$ -dimensiones con n dimensiones de tipo no compactas, en perfecta compatibilidad con la gravedad experimental u observacional.

Se muestra que la masa de Planck esta determinada por la curvatura de las altas dimensiones más que por el tamaño de las dimensiones extras. Esta curvatura no entra en conflicto con la invarianza cuatridimensional de Poincaré (De acuerdo con el principio de covariancia toda ecuación de la teoría de la relatividad especial debe ser invariante bajo transformaciones que pertenezcan al grupo de Poincaré, así, el grupo de Poincaré se puede concebir como el grupo maximal tal que deja invariante todas las ecuaciones de la relatividad especial, sin embargo, en general el grupo de Poincaré no desempeña ningún papel importante en la teoría de la relatividad general, ya que el grupo de transformaciones que dejan invariante esa teoría en general no incluye un subgrupo homeomorfo al grupo de Poincaré. El grupo de Poincaré sin embargo sí es importante en la teoría cuántica de campos ordinaria la cual no incluye los efectos de la gravitación, ya que esa teoría se formula sobre el espaciotiempo plano de Minkowski). La razón de lo establecido anteriormente, es que la curvatura del espacio 5-dimensional soporta un “estado acotado” de gravitón en altas dimensiones sin masa permaneciendo confinado a una pequeña región del espacio² [1] [2] [3].

En el escenario braneworld no se realiza una compactificación para localizar o garantizar que la gravedad cumpla la ley inversa del cuadrado sobre la brane, por el contrario se considera que la curvatura del volumen (bulk) permite pensar la gravedad de tal forma que cumple con las observaciones normales, esto hace que sea posible evitar el ‘escape’ de la gravedad en las dimensiones extras, ahora bien a bajas energías interviene una constante cosmológica de tipo volumétrica (bulk), la cual “presiona” la gravedad, esto se relaciona como

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{\kappa^2 l^2} = -6\mu^2, \quad (19)$$

donde l es el radio de curvatura del espacio AdS_5 y donde μ es la correspondiente escala de energía. Esto es como si la constante cosmológica volumétrica actuara para presionar el campo gravitacional cercano a la brane. Por lo cual, la métrica de los modelos RS, se puede escribir de forma general como

$$ds^2 = e^{-2K(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (20)$$

donde se ha introducido la función $K(y)$, la cual contiene información de la dimensión extra.

En consecuencia, llevando la métrica a la ecuación de campo gravitacional [17] [18] [20], obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$6K^2 = -\kappa^2 \Lambda_2, \quad 3K' = \kappa^2 \lambda \delta(y), \quad (21)$$

y así solucionando la primera ecuación se obtiene la siguiente solución

$$K(y) = \sqrt[2]{-\frac{\kappa^2 \Lambda_5}{6}} y \equiv k |y|, \quad (22)$$

que corresponde a la función introducida anteriormente, esto nos dice que Λ_5 debe ser negativa, ahora, si se integra la segunda ecuación desde $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$, y en consideración de la simetría Z_2 (simetría de orbifold o periódica sobre una circunferencia), encontramos $6K' = \kappa^2 \lambda$, de este modo junto con $K(y) = k |y|$ conduce a una relación para $\Lambda_5 = -\frac{\kappa^2 \lambda^2}{6}$, que es la expresión análoga a lo que se conoce como ajuste-fino entre la tensión de la brane y la constante cosmológica volumétrica, así que mediante un ajuste adecuado permite obtener la solución RS estática.

En el modelo RSI (modelos de dos branes), localizadas en $y = 0$, $y = L$, con simetría Z_2 , además de considerar que en cada brane existe una tensión o energía del vacío, las cuales son iguales y opuestas, es decir $\pm\lambda$, con

²Es decir, que las fluctuaciones o interacciones gravitacionales descritas mediante los gravitones permanezcan acotadas o con-
streñidas a las vecindades de la brane, para evitar que la energía de dichas interacciones termine escapando.

$$\lambda = \frac{3M_p^2}{4\pi l^2}, \quad (23)$$

de este modo en la brane de tensión positiva existe la escala fundamental de energía M_5 (llamada brane oculta), y en la brane de tensión negativa encontramos localizados los campos del Modelo Estándar que están confinados sobre esta brane (llamada brane visible). Debido al factor de curvatura exponencial, la escala efectiva sobre la brane visible en $y = L$ es la escala de Planck M_p , en donde[3]

$$M_p^2 = M_5^3 l \left[1 - e^{-2L/l} \right], \quad (24)$$

expresión que muestra una aproximación a la solución del problema de jerarquías, cuando $L \rightarrow \infty$, $M_p^2 = M_5^3 l$, luego existe un valor bien definido para la masa de Planck, incluso si la dimensión adicional es infinita[4].

En resumen, el modelo RSI, propone un mecanismo para solucionar el problema de jerarquías introduciendo una dimensión extra pequeña, con un espacio intermembrana tipo AdS_5 , no obstante en el segundo modelo RSII se introduce una brane con tensión positiva en la cual la segunda membrana se remueve o lleva al infinito, de tal forma que aún si no existe la otra brane y la dimensión extra se extiende hasta el infinito, la gravedad permanece efectivamente localizada sobre la brane existente, ya que el volumen completo permanece finito cuando la dimensión extra tiende a infinito, esto es lo que se ha propuesto como una alternativa a la compactificación[16][17][18].

5 Modelo de Lykken-Randall

En este modelo se combinan los esquemas teóricos de RSI y RSII, es decir un modelo de dos branes en un bulk cinco-dimensional junto con un modelo de una brane con una dimensión extra no compacta, así que reuniéndolos se puede obtener una solución adecuada al problema de dimensiones extras infinitas y además mantener la solución al problema de jerarquías[26]. Hemos dicho anteriormente que las dimensiones extras suministran una ruta alternativa para tratar algunas cuestiones físicas, entre ellas una muy importante conocida como el problema de jerarquías de la física de altas energías, que se resume en la pregunta ¿Por qué la intensidad del campo gravitacional es tan débil, en comparación con la intensidad de las otras interacciones?[14][15][16].

Se conoce que de la escala de Planck se puede derivar la escala energética que describe el acople gravitacional a bajas energías, mediante el uso de una geometría factorizable simple. Es así como se ha propuesto que la escala de Planck del universo cudridimensional está relacionada, con un mundo o universo existente en altas dimensiones, mediante un factor de volumen adecuado. La enorme escala de Planck puede conducir a un acople gravitacional débil como una consecuencia del enorme volumen en el cual el gravitón se propaga. En este escenario se puede obtener de forma natural una disminución de la interacción gravitacional, debido a la presencia del enorme volumen generado por las dimensiones extras. La idea es que el acople gravitacional débil surge debido a una forma particular o especial de la función de onda que describe el gravitón en las dimensiones extras. Se propone por lo tanto que el gravitón esté localizado lejos del mundo $(3+1)$ -dimensional, es decir "lejos" del mundo brane, fuera de la brane sobre la cual residen todos los campos del modelo estándar. Por lo tanto se considera que existe un enorme valor de la escala de Planck en las dimensiones extras, que disminuye o se hace efectivo en cuatro dimensiones, ahora bien, si se piensa que la función de onda del gravitón se origina con pequeñas amplitudes, de tal modo que ellas inducen una "pequeña escala de Planck" sobre la brane que habitamos, es decir la función de onda con pequeñas amplitudes interactúa con la brane, sintiéndose o reflejándose dicha interacción como una manifestación de la escala de Planck inducida en la brane.

La geometría de una única brane con una densidad de energía cosmológica se puede ajustar para garantizar la invarianza de Poincaré que toma la forma matemática de

$$ds^2 = e^{-2k|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (25)$$

el aspecto notable que describe ésta geometría es que da origen a un campo de gravitones localizado, es decir da origen a un único estado acotado gravitacional. El nuevo hecho aquí es que el fondo geométrico creado da origen a un estado acotado único. Puede entonces considerarse que este modo de oscilación juega el rol del gravitón de

un mundo cuadridimensional, y es responsable de reproducir todos los efectos de la gravedad cudridimensional. Con la perspectiva de generar la jerarquía de masas entre las escalas de Planck y la escala electrodébil, se cuenta con la correspondencia de esta geometría en la quinta dimensión y la escala de masa total. Lo anterior, puede ser entendido debido a que el factor de curvatura es un factor conformal. Sin embargo, desde la perspectiva de la generación de jerarquía de masas es importante recalcar la correspondencia existente entre la escala de Planck y la escala electrodébil para todas las escalas de masa posibles. El factor de masa es re-escalado mediante este factor, así que una escala natural para el parámetro de masa debe ser de $M_{Pl} = 10^{19} GeV$ sobre una brane en el origen. Esta observación fue explotada introduciendo una geometría de orbifold. Si el modelo estándar está localizado sobre una segunda brane, la amplitud del gravitón es exponencialmente suprimida o reducida generando una jerarquía de masas. La desventaja potencial de este sistema es la necesidad de involucrar objetos de energía negativa y la geometría de orbifold. Aunque nada los relaciona, es deseable contar con un sistema alternativo involucrando sólo objetos de energía positiva. Las ventajas de este sistema son, la existencia de objetos de energía positiva, llamados D-branes y NS-branes, que están bien entendidos y sobre los cuales los campos gauge y los campos de materia estarían localizados así que los campos del modelo estándar pueden ser situados allí. Algunos aspectos potencialmente problemáticos de esta cosmología aún no se han logra comprender claramente. Existe una ventaja de tipo estática la cual permite un espacio de dimensión infinita en la cual la escala de masas está asociada con una localización definida en el espacio. Si se permite que todas las escalas de masa, distribuidas en la quinta dimensión, presumiblemente tendrían mejores posibilidades para tratar las dificultades cosmológicas. También se tiene una mejor oportunidad para explotar las ideas holográficas. Se demuestra que se puede tratar el problema de jerarquías con únicamente objetos de energía positiva, combinando la consistencia de vivir en una quinta dimensión infinita, se puede generar una jerarquía viviendo lejos de la brane sobre la cual la gravedad está localizada.

La cuestión crucial es si un observador sobre esta brane de TeV observa una teoría consistente de la gravedad, se ha mostrado que si se mira una teoría de la gravedad que está muy cercana a la teoría gravitacional cuadridimensional y si se vive sobre la brane en la cual está localizada el gravitón. Pero, aún para un observador bastante lejos de la brane, se obtiene una teoría gravitacional aceptable, esencialmente indistinguible, desde el mundo cudridimensional.

La imagen que emerge es notablemente hermosa. El gravitón está localizado sobre una brane que la llamamos brane de Planck. Vivimos sobre una brane separada de la brane de Planck alrededor de 30 longitudes de Planck en la quinta dimensión. Sobre esta brane la escala de masas es suprimida exponencialmente, conduciendo de esta forma a la generación, de forma natural, de la escala electrodébil. De otra parte, la máxima escala que podemos probar sobre nuestra brane es del orden de la escala de TeV , ya que todos los modos de oscilación de las posibles "cuerdas" se hacen fuertemente interactuantes en esta escala. El aspecto potencialmente peligroso de este sistema es la enorme multiplicidad de modos Kaluza-Klein arbitrariamente livianos. Se ha mostrado que una señal de la dimensión extra infinita es un continuo sin brechas de modos KK, así, claramente si estos modos estuvieran fuertemente acoplados, la teoría sería desastrosa, ya que las pruebas gravitacionales y de física de partículas debería ser violada fuertemente.

La teoría se incorpora entre un mundo cuadridimensional y uno cinco dimensional, los observadores sobre la brane TeV observan los modos por debajo de TeV como un acople débil. Los modos mayores de TeV están más fuertemente acoplados, y pueden en principio reproducir los resultados cinco dimensionales esperados. Generalizando a una localización arbitraria, nunca se reconoce la geometría de altas dimensiones, independientemente de la localización, el mundo aparece o surge a bajas dimensiones y bajas energías.

Entonces, tenemos el siguiente sistema, una brane de Planck, o conjuntos de branes, sobre la cual los modos cero del gravitón están localizados o confinados exponencialmente decayendo en una dirección fuera de la brane o en la dirección y de la dimensión extra. El nuevo hecho es que se cuenta con una única brane, o multiples branes localizadas a una distancia y_0 desde esta brane, donde $e^{-ky_0} = TeV/M_{Pl}$, donde k se relaciona con la constante cosmológica sobre la brane y determina la atenuación exponencial del gravitón. La nueva brane puede ser considerada como una prueba de la geometría determinada por la brane de Planck, lo uno o lo otro se asume, que la brane tiene una gran tensión, o que consiste de un gran conjunto de branes. Parece que realmente la inclusión de una pequeña tensión (energía del vacío) en la brane no afecta sustancialmente el resultado. También noté, que no tratamos la cuestión de determinar la localización y_0 aquí, aunque el mecanismo que estabiliza la geometría del orbifold debe también debe ser aplicado.

Es claro que los modos cero generan consistentemente la gravedad. Si tomamos la coordenada $y = 0$ como la localización de la brana de Planck, se puede fácilmente derivar

$$M_{Pl}^2 = 2 \int_0^\infty e^{-2ky} M^3 dy = \frac{1}{k} M^3, \quad (26)$$

así que con M y k y tomando del orden de $M_{Pl} = 10^{19} GeV$, los modos cero están correctamente acoplados a la gravedad generada cuatridimensional. Por lo tanto de los modos adicionales KK tenemos que, los modos propios del gravitón se pueden expresar como

$$\psi_0(z) = \frac{1}{k(|z| + \frac{1}{k})^{3/2}}, \quad (27)$$

donde la coordenada z se relaciona con y por la expresión

$$z = \frac{1}{k} \text{sgn}(y)(e^{k|y|} - 1), \quad (28)$$

para la brana de TeV con $z = z_0 \sim 1TeV^{-1}$. Igualmente para los modos continuos tenemos

$$\psi_m \sim N_m(|z| + \frac{1}{k})^{1/2} \left[Y_2(m(|z| + \frac{1}{k})) + \frac{4k^2}{\pi m^2} J_2(m(|z| + \frac{1}{k})) \right], \quad (29)$$

donde m es la masa de los modos, Y_2, J_2 son funciones de Bessel para mz grande, los modos se comportan asintóticamente como ondas planas cuyas formas asintóticas de las funciones de Bessel son

$$\sqrt{z} J_2(mz) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \cos(mz - \frac{5}{4}\pi), \quad (30)$$

$$\sqrt{z} Y_2(mz) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi m}} \sin(mz - \frac{5}{4}\pi), \quad (31)$$

donde la constante de normalización está determinada por el comportamiento de ondas planas con

$$N_m = \frac{\pi m^{5/4}}{4k^2}, \quad (32)$$

es importante considerar que esto corresponde a un acople en situaciones límites.

Se puede encontrar un potencial entre dos masas m_1, m_2 dado por

$$V = G_N \frac{m_1 m_2}{r} + \int_0^\infty \frac{dm}{k} G_N \frac{m}{k} e^{-mr} \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (33)$$

el cual conduce a

$$V \sim G_N \frac{m_1 m_2}{r} (1 + \frac{e^{3ky_0}}{kr}). \quad (34)$$

Así, la forma arbitraria de la función de Bessel para mz pequeño es

$$\sqrt{z} J_2(mz) \sim \frac{1}{8} m^2 z^{5/2}, \quad (35)$$

$$\sqrt{z} Y_2(mz) \sim -\frac{4}{\pi m^2 z^{3/2}} - \frac{z^{1/2}}{\pi}. \quad (36)$$

De este modo emerge una imagen convincente, en la cual el mundo es cincodimensional, y la coordenada y se extiende hasta el infinito. Sin embargo para algun observador localizado en y_0 , los modos de masa mayor a $M_{Pl} e^{-k|y_0|}$ están fuertemente acoplados. La amplitud de los modos "livianos" sobre la brana en y_0 son

suprimidos. Los modos "pesados" son también suprimidos por la ley exponencial ya que la métrica debe ser plana. Así que el observador confinado a la brane observará la gravedad como esencialmente cuatridimensional, nada notable donde está localizada la brane. Podemos vivir con una dimensión extra infinita y simplemente no la conoceremos. Este nuevo lugar de encuentro ofrece nuevos caminos para tratar importantes problemas en cosmología y gravedad. No hay efecto medible directo de una dimensión infinita, pero tampoco se descarta su existencia[19][20][21][22].

6 Conclusiones

El escenario descrito anteriormente es bastante tentativo. Una vez más con dimensiones infinitas, se espera que en la teoría gravitacional exista una correspondencia con la teoría gauge y con el límite ultravioleta de teoría de campos. Se ha dicho que en este modelo existe una correspondencia entre la localización y de la brane y la escala de masa determinada por la forma del modo cero del gravitón. Además se muestra que la excitación KK no interfiere con la imagen suministrada aquí, por el contrario contribuyen con pequeñas correcciones a la teoría de la gravedad, como también a energía suficientemente baja. En este nuevo punto de convergencia de diferentes teorías se proporciona un nuevo camino para considerar importantes problemas en cosmología y gravedad.

Este es un marco teórico bastante sugestivo, pero al tiempo plagado de suposiciones, claro está que son coherentes y lógicas desde el punto de vista de teorías fundamentales, es de esperar que en el futuro se decante todo este esquema teórico conduciendo a dos cosas, o bien la naturaleza es absolutamente simple y no requiere estas suposiciones, o bien puede ser mucho más compleja de lo que muestran estos escuetos análisis teóricos.

Como elemento general podemos destacar que este tipo de modelos, aunque hipotéticos, permiten reproducir sin mayores modificaciones lo conocido de la física estándar, esto sólo es coherencia en el sistema y consistencia, pero no quiere decir que la naturaleza sea así, en el futuro con resultados concretos, experimentos especiales y observaciones detalladas y metódicas, se descartarán estos modelos o deberán tomarse verdaderamente en serio.

Finalmente se comenta, que no existe en el presente una prueba observacional directa o experimental que permita considerar los modelos brane como reales o ciertos, pero no pueden descartarse tampoco, ya que son consecuencia de un análisis lógico y coherente de las teorías y marcos conceptuales de la física actual.

References

- [1] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v2.
- [2] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v3.
- [3] L Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 3370.
- [4] L Randall, R. Sundrum, Phys. Rev. Lett., **83** (1999), 4690.
- [5] J. Garriga, T. Tanaka, hep-th/9911055v4
- [6] D. Langlois, qr-qc/0207047v1
- [7] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000).
- [8] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Univ. Guelph, 2002.
- [9] Maartens. R, *Geometry and dynamics of the Brane World*, gr-qc/0101059v2.
- [10] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, Phys. Rev. D **62**, 024028 (2000).
- [11] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v2.
- [12] Collins. P. D. B, Martin. A. D, Squires. E. J, *Particles Physics and Cosmology*, John Wiley and Sons, 1989.

- [13] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000).
- [14] Poisson. E, *An advanced course in general relativity*, Univ. Guelph, 2002.
- [15] Maartens. R, *Geometry and dynamics of the Brane World*, gr-qc/0101059v2.
- [16] Maartens. R, *Brane-World Gravity*, Inst. Cosmology and Gravitation, Univ. Portsmouth. U.K, 2004.
- [17] E. Flanagan, S. H. Henry, I. Wasserman, Phys. Rev. D **62**, 044039 (2000).
- [18] P. Binetruy, C. Defayet, U. Ellwanger, D. Langlois, hep-th/9910219
- [19] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v2.
- [20] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v3.
- [21] P. Horava, E. Witten, Nucl. Phys. B**460** (1996), 506, *ibid* B**475**, 94.
- [22] J. Garriga, T. Tanaka, hep-th/9911055v4
- [23] R. Caldwell, D. Langlois, gr-qc/0103070v1
- [24] S. Mukohyama, T. Shiromizu, K. Maeda, Phys. Rev. D **62**, 024028 (2000).
- [25] C. Barceló, M. Visser, hep-th/0004056v2.
- [26] J. Lykken, L. Randall, *The Shape of Gravity*, hep-th/9908076V1.