Dos ecuaciones para la expansión del espacio tiempo

Estudio mediante aproximación newtoniana

1. Introducción

Las ecuaciones que describen la expansión del espacio-tiempo desde el big bang se obtienen desde las ecuaciones de campo de la relatividad general, sin embargo, podemos, mediante una sencilla aproximación a la dinámica de Newton, obtener algunos de los resultados clave, como la ecuación de Friedmann o la ecuación de estado que liga la presión con la densidad de masa del universo.

Es necesario suponer la validez del principio cosmológico en todo espacio-tiempo, por lo que tendremos en cuenta tanto el que las leyes de la física son las mismas en toda localización, como que, a gran escala, el universo presenta la suficiente homogeneidad e isotropía. Hoy día las observaciones sobre la distribución de galaxias dan por hecho que se pueden considerar isótropas y homogéneas zonas de, al menos, 500 Megaparsecs de diámetro.

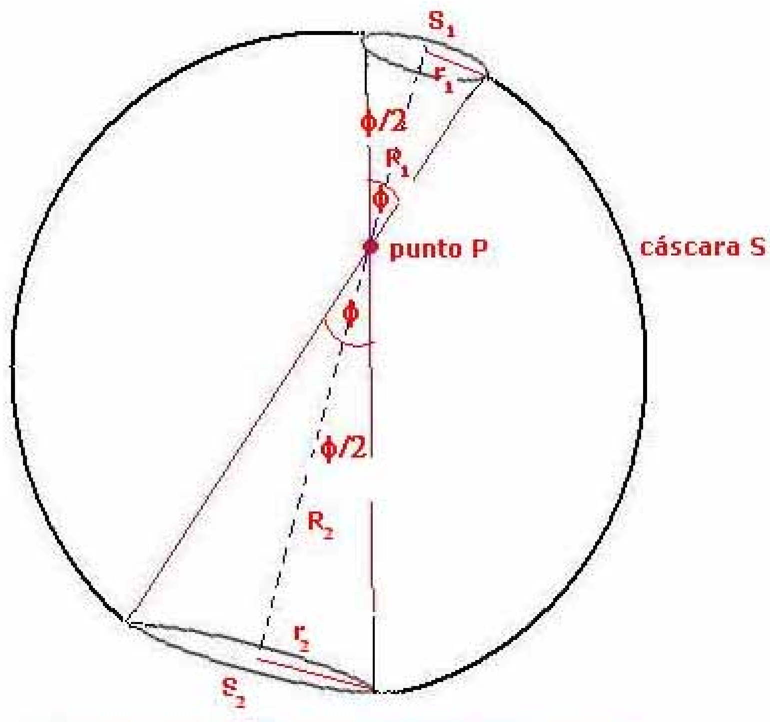
En estas condiciones podemos analizar el proceso, mediante nociones de la física clásica de Galileo y Newton, de cómo se expandiría en el espacio-tiempo una esfera de radio R lo suficientemente amplia, con masa M y densidad homogénea ρ a velocidad v y sin transferencia de calor desde o hacia el exterior de la región esférica, es decir, adiabáticamente.

Para poder hacer el estudio de una forma concisa es necesario entender que en la expansión de una región esférica de esta magnitud, las únicas fuerzas que tenderían a frenar gravitacionalmente la expansión serian las producidas por la existencia de la masa M del interior de la esfera. Es decir, no intervendrían gravitatoriamente los efectos de las distribuciones de masa exteriores a la región esférica considerada.

2. ¿Porqué la masa existente en el interior de una región esférica es la única que actúa gravitacionalmente sobre la expansión?

Se acostumbra a ofrecer un argumento teórico para justificar esta afirmación, que consiste en suponer una capa superficial esférica de materia, de grosor infinitesimal, envolviendo nuestra esfera, y considerar un sector de vértice en la esfera que definirá dos superficies aproximadamente circulares en la superficie envolvente, tal como mostramos en la figura 1, superficies que hemos llamado S_1 y S_2, las cuales ejercerían sobre la masa esférica que consideramos, una fuerza gravitacional nula en conjunto, pues cada una de las dos superficies atraerían a la esfera con la misma fuerza gravitatoria y con sentidos opuestos, tal como se deduce a continuación.

Veamos que en cada punto P de la zona esférica que envuelve la "cascara" superficial S la gravedad originada por ésta tiene efecto total nulo.



La "cáscara" superficial de masa S no afecta gravitacionalmente a un punto P de su interior

$$S_1 = \pi . r_2^2 ,\ \ S_2 = \pi . r_1^2$$

$$r_2 = R_2 .tg(\phi / 2)$$
$$r_1 = R_1 .tg(\phi / 2)$$

Fuerza ejercida sobre el punto P por la zona S_1:

$$f_1 = G\frac{M_p .M_{s_1}}{R_1^2} = G\frac{M_p .S_1 .\rho_s}{R_1^2} = G\frac{M_p .\pi .r_1^2 .\rho_s}{R_1^2} = G\frac{M_p .\pi .r_1^2 .\rho_s}{r_1^2 \big/ tg^2(\phi/2)} = GM_p \pi \rho_s tg^2(\phi/2)$$

Fuerza ejercida sobre el punto P por la zona S_2:

$$f_2 = G\frac{M_p .M_{s_2}}{R_2^2} = G\frac{M_p .S_2 .\rho_s}{R_2^2} = G\frac{M_p .\pi .r_2^2 .\rho_s}{R_2^2} = G\frac{M_p .\pi .r_2^2 .\rho_s}{r_2^2 \big/ tg^2(\phi/2)} = GM_p \pi \rho_s tg^2(\phi/2)$$

El balance total, por tanto, es nulo, por tratarse de fuerzas de contrario sentido:

$$\vec{f}_1 - \vec{f}_2 = 0$$

Si extendemos el razonamiento para sectores en todas las direcciones del espacio, queda claro que el balance de toda la "cáscara" infinitesimal es de gravitación nula en el punto P. Si extendemos el razonamiento a una superficie S de grosor finito, integrable como suma de infinitas capas superficiales de grosor infinitesimal, el argumento señala, en consecuencia, que la gravitación en cada punto interior es nula.

Por consiguiente, si, volviendo a la descripción del problema, tenemos una región esférica que se expande, la gravitación que tiende a frenar la expansión de la misma no es la originada por la masa de ninguna "cascara" exterior, por muy gruesa que sea, sino solamente la masa interior de la zona esférica que estamos estudiando.

3. El factor de escala y la constante de Hubble

3.1. El factor de escala:

Nos permite medir el grado de la expansión. Si consideramos una esfera de radio R_i dado en el instante ti, es obvio que el radio esférico va aumentando a medida que transcurre el tiempo. Se tiene, por tanto:

$$t_i < t_0 < t_1 < t_2 < .... < t < .... \Rightarrow R_i < R_0 < R_1 < R_2 < ... < R < ...$$

Debido, pues, a la expansión del espacio_tiempo podemos considerar que una esfera de radio R_i conocido en el instante t_i se expande de modo que su radio sea R_0 en el instante t_0 posterior. Llamaremos *factor de escala en t_0 referido a t_i* al cociente de dividir ambos radios:

Factor de escala en t_0 referido a t_i: $f_{0i} = \frac{R_0}{R_i}$

Asimismo, si llamamos t al instante actual, podemos considerar el factor de escala respecto al instante t_i:

Factor de escala actual con respecto a t_i: $f_i = \frac{R}{R_i}$

Haciendo una elemental sustitución, podemos referir el radio de la esfera en el instante actual al radio de la esfera en el instante t_0:

$$f_i = \frac{R}{R_i} = \frac{R}{R_0 / f_{0i}} = f_{0i} \frac{R}{R_0} \Rightarrow R = \frac{f_i}{f_{0i}} R_0$$

Es decir, el radio de la esfera en expansión en el instante actual t puede ser referida al radio de la esfera en un instante t_0 anterior multiplicándolo por el cociente de sus factores de escala con respecto a un origen común.

Si elegimos el radio R_0 de modo que su factor de escala con respecto al origen dado sea 1 $(f_{0i} = 1)$, a fin de simplificar las expresiones, se tendrá

$$R = f_i . R_0$$

que representaremos, por sencillez, en la forma $R = f . R_0$

3.2. La constante de Hubble:

Es la constante de proporcionalidad entre la velocidad de la expansión y el radio de la esfera que se expande. Esta constante, que se puede medir en kilómetros por segundo y megaparsecs, se expresaría de la forma siguiente para el instante actual:

$$H = \frac{v}{R}$$

que podemos expresar en función del factor de escala de la expansión haciendo la sustitución oportuna:

$$H = \frac{v}{R} = \frac{1}{R}\left(\frac{dR}{dt}\right) = \frac{1}{f.R_0}\left(\frac{R_0 df}{dt}\right) = \frac{1}{f}\left(\frac{df}{dt}\right)$$

La anterior relación velocidad-distancia como una constante nos indica, pues, que la velocidad de expansión es proporcional al radio de la zona esférica que se expande, o, dicho de otro modo, que las zonas más alejadas de nosotros se alejan con mayor velocidad. Se expresa, por tanto, como la variación relativa del factor de escala.

Este aumento de la velocidad con la distancia tiene un horizonte cosmológico, que será aquel radio para el cual la velocidad de la expansión llegara a ser la de la luz, velocidad máxima de propagación de las interacciones. Esta distancia se acostumbra a llamar *radio de Hubble*.

$$v = c \rightarrow H = \frac{c}{R_h} \Rightarrow R_h = \frac{c}{H}$$

Por otra parte, de la definición de la constante de Hubble, se deduce que el tiempo durante el cual se ha desarrollado la expansión del espacio tiempo, o dicho de otro modo, la edad del universo, coincide con la inversa de la constante:

$$velocidad = \frac{espacio}{tiempo} \Rightarrow tiempo = \frac{espacio}{velocidad} \rightarrow t_h = \frac{R}{v} = H^{-1}$$

Este tiempo, *tiempo de Hubble*, que indica la edad del universo, puede calcularse, pues, mediante el inverso de la constante de Hubble.

Para $H=73\ km.s^{-1}.Mp^{-1}$ se obtienen estos valores:

- Radio de Hubble: 4110 Megaparcecs
- Tiempo de Hubble: $13400.\ 10^6$ años.

4. Ecuaciones que se deducen desde el principio de conservación de la energía:

4.1. La ecuación de Friedmann

Si expresamos matemáticamente, de forma elemental, el principio de conservación de la energía mecánica, escribiremos:

$$G\frac{M}{R}-\frac{1}{2}v^2 = constante \qquad [4.1]$$

(La energía gravitacional que tiende a frenar la expansión más la energía cinética de la expansión es igual a la energía total en la región esférica)

donde la constante tiene dimensiones del cuadrado de una velocidad. Para que la constante k que se introduzca se adimensional, podemos hacerla igual al producto por el cuadrado de una velocidad, por ejemplo, de la velocidad de la luz: $k.c^2$. Escribiremos, por consiguiente:

$$G\frac{M}{R}-\frac{1}{2}v^2 = k.c^2$$

Sustituimos los valores

$$M=\frac{4}{3}\pi R^3.\rho=\frac{4}{3}\pi R_0^3.f^3.\rho\,, \qquad v=\frac{dR}{dt}=R_0\frac{df}{dt}=R_0.f.H$$

y resulta:

$$G.\frac{\frac{4}{3}\pi R_0^3 f^3\rho}{f.R_0}-\frac{1}{2}R_0^2.f^2H^2=k.c^2 \qquad [4.2]$$

y simplificamos:

$$\frac{8}{3}G\pi.R_0^2.f^2\rho-R_0^2f^2H^2=2k.c^2 \Rightarrow H^2=\frac{8}{3}\pi G\rho-2k\left(\frac{c}{R_0f}\right)^2=\frac{8}{3}\pi G\rho-\frac{2k}{R_0^2}\left(\frac{c}{f}\right)^2$$

y se obtiene, en definitiva, la ecuación de Friedmann, que la dedujo directamente desde las ecuaciones de campo de la relatividad general. Aquí se obtiene desde una aproximación newtoniana

$$\boxed{H^2=\frac{8}{3}\pi G\rho-\frac{2k}{R_0^2}\left(\frac{c}{f}\right)^2}$$

4.2. Una ecuación de estado

La expansión de una región esférica sin que haya transvase energético con el exterior, es decir, cuando se trata de una expansión de tipo adiabático, el primer principio de la termodinámica, en realidad una expresión del principio de conservación de la energía, afirma que toda la energía que se desarrolla en la expansión es la misma que la variación de la energía interna total de la región esférica. Podemos expresarlo, pues, de este modo

$$\frac{dE}{dt} = -P.\frac{d\vartheta}{dt}$$

Calculamos por separado los dos miembros

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(M.c^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho.c^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi f^3 R_0^3 \rho.c^2\right) = \frac{4}{3}\pi R_0^3 c^2 \frac{d}{dt}\left(f^3 \rho\right) =$$
$$= \frac{4}{3}\pi R_0^3 c^2 \left(3 f^2 \rho \frac{df}{dt} + f^3 \frac{d\rho}{dt}\right) = 4\pi R_0^3 c^2 f^2 \rho \frac{df}{dt} + \frac{4}{3}\pi R_0^3 c^2 f^3 \frac{d\rho}{dt} =$$
$$= 4\pi R_0^3 c^2 f^3 \rho H + \frac{4}{3}\pi R_0^3 c^2 f^3 \frac{d\rho}{dt}$$

$$-P.\frac{d\vartheta}{dt} = -P\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right) = -4\pi P R_0^3 f^2 \frac{df}{dt} = -4\pi P R_0^3 f^3 H$$

Igualando:

$$4\pi R_0^3 c^2 f^3 \rho H + \frac{4}{3}\pi R_0^3 c^2 f^3 \frac{d\rho}{dt} = -4\pi P R_0^3 f^3 H$$

por tanto:

$$\frac{4}{3}\pi R_0^3 c^2 f^3 \frac{d\rho}{dt} = -4\pi P R_0^3 f^3 H - 4\pi R_0^3 c^2 f^3 \rho H = -4\pi P R_0^3 f^3 H (P + \rho.c^2)$$

finalmente:

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} = -3H\left(\frac{P}{c^2} + \rho\right)}$$

Ecuación de estado que relaciona la presión con la densidad de masa y que también resulta ser deducible de las ecuaciones de la relatividad general.

5. Densidad crítica

El valor de la densidad de masa en la región esférica tal que equilibre el proceso de la expansión, esto es, de forma que en la ecuación [4.1] la energía gravitacional iguale en valor absoluto a la energía de la expansión, y por tanto, la constante sea nula, es lo que se denomina densidad crítica ρ_c. Es la densidad de masa tal que frene definitivamente la expansión del espacio tiempo. Tendrá que ser, por consiguiente, K=0 en [4.2], o sea, haciendo cero esta constante adimensional en la ecuación de Friedman, tendremos que

$$H^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho_c$$

O bien

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}$$

Si tomamos, por ejemplo, el valor para la constante H de Hubble, $H = 75\ Km.s^{-1}.M_p^{-1}$ podemos, mediante un pequeño cálculo, determinar el valor de la densidad crítica:

$$\rho_c = 1{,}0576.10^{-29}\ gr.cm^{-3}$$

El valor de G utilizado es $G = 6{,}6720.10^{-11}\ N.m^2.Kg^{-2}$

Es necesario indicar que, según los cosmólogos actuales, si sumamos la masa de las galaxias y sistemas estelares contenidos en el volumen actualmente observable del universo, la densidad sería algo así como la centésima parte de la densidad crítica necesaria para detener la expansión, y que si sumamos también la masa correspondiente a la no detectada materia oscura necesaria pare explicar todos los movimientos estelares en los sistemas galácticos, la densidad total no pasaría del 10% de la densidad crítica.

Por lo cual es lógico esperar que pueda llegar a detectarse más materia de la que actualmente sospechamos que existe, o alguna energía atractiva por ahora desconocida, o bien, hemos de pensar que la expansión nunca se detendrá.

6. Documentación

6.1. http://astronomia.net/cosmologia/cosmolog.htm

6.2. http://articles.adsabs.harvard.edu/cgi-bin/nph-iarticle_query?1996MNRAS.282..206T&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf

6.3. http://cdsads.u-strasbg.fr/cgi-bin/nph-iarticle_query?1995ApJ...446...63H&data_type=PDF_HIGH&whole_paper=YES&type=PRINTER&filetype=.pdf