

# Elementos de Gravedad Modificada en teorías $f(R)$

Alexander Moreno Sánchez

Centro Colombiano de Cosmología, Astrofísica y Astronáutica (CCCAA)

Bogotá. D. C, Colombia.

amorenosa@unal.edu.co

Recibido 01-12- 2020; Aceptado 24 - 12- 2020; Publicado en línea 24 - 12- 2020

---

## Resumen

Los modelos de gravedad modificada constituyen un nuevo paradigma de la cosmología, estos modelos presentan aproximaciones y nuevos enfoques a problemas y observaciones astrofísicas o cosmológicas que a la fecha no han sido resueltos de forma satisfactoria en el marco de teorías y paradigmas convencionales, como el modelo estándar  $\Lambda$ CDM. Sin embargo surgen nuevas dificultades, y problemas, como la observación de estructuras y geometrías previstas por dichos modelos, modificación de la evolución y dinámica de contenidos energéticos, entre otras; sin embargo dichos modelos permiten plantear soluciones novedosas y hasta cierto punto verificables mediante la observación. El propósito del presente trabajo consiste en mostrar aspectos teóricos en torno a la solución del sistema dinámico para teorías  $f(R)$ , también, se consideran modelos y aproximaciones a este tipo de soluciones.

**PACS:** 97.60.Bw, 26.30.Ef, 07.85.-m, 97.70.Rz

**Palabras Claves:** modelo estándar, gravedad modificada, energía oscura, sistema dinámico.

## Abstract

Modified gravity models constitute a new paradigm of cosmology, these models present approximations and new approaches to astrophysical or cosmological problems and observations that to date have not been satisfactorily solved in the framework of conventional theories and paradigms, such as the  $\Lambda$ CDM standard model. However, new difficulties and problems arise, such as the observation of structures and geometries provided by said models, modification of the evolution and dynamics of energy content, among others; however These models allow proposing novel solutions and to some extent verifiable by means of the observation. The purpose of this work is to show theoretical aspects around the solution of the dynamic system for theories  $f(R)$ , also, models are considered and approaches to this type of solution.

**PACS:** 97.60.Bw, 26.30.Ef, 07.85.-m, 97.70.Rz

**Keywords:** standard model, modified gravity, dark energy, dynamical system..

# 1 Introducción

La cosmología estándar es uno de los paradigmas de la ciencia moderna, nos ofrece una perspectiva global del universo, partiendo de la aceptada teoría del Big-Bang y asumiendo la era Inflacionaria, terminan por constituir el conocido modelo Lambda Materia Oscura Fría ( $\Lambda$ CDM), como el mejor modelo que describe los datos y observaciones realizadas[1]. El Big-Bang original presenta varias dificultades, aún vigentes, actualmente no se cuenta con una comprensión completa, y verificable de varios complejos e intrincados procesos ocurridos en el origen del mismo, como tampoco de la etapa inflacionaria, de la evolución y destino del universo, o de sus contenidos. La inflación, cuyo propósito inicial era resolver algunas dificultades del Big-Bang original [2], la cual se describe mediante la dinámica de un ‘campo escalar’, llamado dilatón o inflatón[3], resuelve varios problemas, sin embargo su origen y dinámica fundamental no se conoce, tampoco hay observaciones primordiales que confirmen su existencia.

En consecuencia, el conocimiento de momento, es que el universo contiene una distribución de materia y energía, más inusual de lo que se consideraba. A la fecha se sabe que contiene 70% de la llamada energía oscura, causante de la expansión acelerada del universo y quizá como origen de la inflación primordial; también se sabe que existe 25 % de materia oscura, que entre otras muchas propiedades, confiere cohesión y estabilidad a las grandes estructuras del universo, y adicionalmente se sabe que el contenido de materia bariónica constituye el 5% . No podemos descartar, desde luego, que observaciones y tecnologías más sofisticadas encuentren otras componentes energéticas o contenidos en el universo. Aún esto es desconocido, pero precisamente esto es el motor que impulsa la investigación científica[1,2,3].

Se han propuesto, las llamadas teorías modificadas de la gravedad, que pueden explicar de forma más exacta y completa, fenómenos naturales como : inflación cósmica, inflación eterna, expansión acelerada, agujeros negros de tipo supermasivos, primordiales, estelares, o de masa intermedia, regimen de campo fuerte, y quizás fenómenos más extremos[4].

Todos estos elementos, ideas, conceptos y teorías emergentes brindan la posibilidad de aproximarnos a un conocimiento más amplio del mundo físico, más profundo, más fundamental, por ello la importancia de mantener en consideración todas estas nuevas concepciones hasta que los experimentos, observaciones y tecnologías determinen que tipo de modelos son los más ajustados a la descripción del universo real. El modelo  $\Lambda$ CDM, que describe el contenido de materia-energía del universo[5] y la formación de estructuras (galaxias, cúmulos, supercúmulos de galaxias, filamentos y vacíos, etc. ), es uno el modelo más exitoso, y el que permite ajustar un gran número de datos observacionales, sin muchos parámetros libres, sin embargo surgen varias dificultades, entre ellas: como se ha mencionado, se desconoce la naturaleza de la EO y de la MO, tanto así, que simulaciones computacionales de algunos modelos predicen una sobre-producción de sub-estructuras galácticas las cuales no se observan[6], igualmente predicen que en el centro de los halos de MO (la MO se condensa formando regiones, en forma de halos esféricos o elípticos, en el centro de los cuales se forman las galaxias a partir de la materia ordinaria visible) son demasiado densos entrando en contradicción con los datos observacionales[7]. Asimismo, la energía oscura y la materia oscura son sustancias o formas de energía que se postulan de forma ad hoc, lo cual genera complicaciones conceptuales, y recientemente nos encontramos con la llamada tensión en la constante cosmológica, fusión de agujeros negros, en fin con muchas observaciones intrigantes y complejas.

Es claro que aún falta mucho por determinar e investigar para tener un modelo completo y coherente del universo que explique toda la vastedad, dinámica y complejidad del mismo, asimismo falta mucho para construir un marco conceptual, teórico y verificable del universo que logre estar libre del mayor número posible de problemas. No obstante, el Modelo Estándar de la Cosmología ( $MS$ - $\Lambda$ CDM) es el que mejor describe globalmente nuestro universo[8], ajusta de forma muy clara y completa muchos resultados observacionales, pero no predice la existencia de otros elementos del universo, tampoco permite conocer detalles de la evolución del mismo, muy a pesar de ello es importante enfatizar que este modelo presenta dificultades y resultados incompletos, por ende cabe la posibilidad de que en el futuro surjan observaciones, avances teóricos, ideas y planteamientos no convencionales que permitan alcanzar un conocimiento mayor de la historia y evolución del universo[9,10].

En consecuencia, se han creado nuevos esquemas teóricos, en particular los llamados modelos cosmológicos de gravedad modificada, los cuales en principio realizan pequeñas modificaciones al marco conceptual suministrado por la Relatividad General. Allí tenemos varias posibilidades: la primera de ellas, es introducir en el background cosmológico estándar, nuevos fluidos o componentes energéticas a través de campos escalares, esto conlleva a

los modelos de quintaesencia, k-esencia y otros similares. Una segunda posibilidad, que dista de la anterior, es considerar modificaciones en la gravedad misma, es decir en la geometría espaciotemporal. Este, es un enorme campo de desarrollo teórico, que se encuentra en construcción, dando origen a los conocidos modelos de gravedad modifica (teorías- $f(R)$ , teorías scalar-tensor, teorías de Horndeski, y otras muchas más). Una tercera posibilidad que se puede dar, y que se ha considerado con alguna seriedad, tiene su origen en las teorías de cuerdas y supercuerdas cuya versión más sofisticada es la teoría-M, conocido como modelos cosmológicos de braneworld, en los cuales el universo se modela como una subespacio inmerso en espaciotiempos de altas dimensiones, y donde las propiedades gravitacionales son inducidas a través de la dinámica gravitacional de dichos espacios. También, en los últimos tiempos ha surgido una inquietante propuesta teórica, conocida como la hipótesis del multiverso, aquí surge otra posibilidad para explicar la expansión acelerada, habida cuenta que los otros universos podrían originar el arrastre gravitacional observado, es decir esa espeluznante expansión del universo. En particular en en este corto recuento nos centraremos en el esquema de teorías  $f(R)$ .

## 2 Elementos de teorías $f(R)$

Se considera gravedad modificada en un universo FRLW, para ello se inicia mediante la construcción de la respectiva acción física, que se expresa de la siguiente manera[11,13,14,15]

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} [f(R) + \mathcal{L}_m] , \quad (1)$$

donde  $f(R)$  es una función arbitraria del escalar de curvatura, y  $\mathcal{L}_m$  es el lagrangiano de materia.

Realizando la variación de la acción anterior, respecto a  $g_{\mu\nu}$ , se obtiene la ecuación de campo, que consiste en una generalización de la ecuación de campo de Einstein, la cual se puede expresar como

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f'(R) = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (2)$$

donde  $f'(R)$  corresponde a la derivada de la función respecto de  $R$ ,  $f'(R) = \frac{df(R)}{dR}$ ,  $\square$  denota el operador D'Alambertiano covariante ( $\square = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu = \nabla_\mu \nabla^\mu$ ). En el caso de  $f(R) = R$ , se tiene  $f'(R) = 1$ , con lo cual se obtiene

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} , \quad (3)$$

correspondiente a la ecuación de campo convencional. La gravedad  $f(R)$  tiene un grado de libertad escalar  $f'(R)$ , cuya dinámica está determinada por la traza de la ecuación de campo generalizada, es decir

$$\square f'(R) = \frac{1}{3}(2f(R) - f'(R)R) + \frac{8\pi G}{3}T , \quad (4)$$

donde  $T$  es la traza del tensor momento-energía  $T_{\mu\nu}$ . Entonces se puede identificar, el grado de libertad escalar con un campo escalar, mediante

$$\phi \equiv \frac{df(R)}{dR} , \quad (5)$$

y además definir un potencial  $V(\phi)$ , dado por

$$V'(\phi) \equiv \frac{dV}{d\phi} = \frac{1}{3}(2f(R) - \phi R) , \quad (6)$$

con lo cual se puede reescribir la ecuación dinámica para el grado de libertad adicional como

$$\square \phi = V'(\phi) + \frac{8\pi G}{3}T . \quad (7)$$

Entonces, bajos el análisis anterior y en consideración de un universo homogéneo e istrópico, es decir un universo tipo FLRW, la evolución y dinámica correspondiente, viene determinada por un sistema dinámico cudridimensional dado por  $\{\phi, \pi, H, a\}$ , donde  $\pi = \dot{\phi}$ , con ecuación de movimiento para  $\pi$  dada por

$$\dot{\pi} = -3H\pi - V'(\phi) + \frac{8\pi G}{3}\rho_m, \quad (8)$$

y la ecuación de movimiento para  $H$ , dada por

$$\dot{H} = \frac{1}{6}R - 2H^2, \quad \dot{a} = Ha, \quad (9)$$

junto con la ecuación de Friedmann, la cual se expresa mediante

$$H^2 + \frac{\pi}{\phi}H + \frac{(f(R) - \phi R)}{6\phi} - \frac{8\pi G}{3\phi}(\rho_m + \rho_r) = 0, \quad (10)$$

donde  $\rho_m, \rho_r$  son las densidades de materia y radiación respectivamente. Por lo tanto, las relaciones anteriores, constituyen una descripción cerrada para el sistema dinámico  $\{\phi, \pi, H, a\}$ . Con el fin de estudiar si la gravedad  $f(R)$  conduce a un incremento de la velocidad cósmica, es conveniente considerar una formulación análoga a la de la relatividad general, mediante la siguiente relación

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi G(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^{eff}), \quad (11)$$

donde el tensor momento-energía efectivo, corresponde a

$$8\pi GT_{\mu\nu}^{eff} = \frac{1}{2}(f(R) - f'(R)R)g_{\mu\nu} + (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square)f'(R) + (1 - f'(R))(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}), \quad (12)$$

lo cual se constituye en el tensor momento-energía para la energía oscura. Igualmente, se puede expresar la densidad de energía y presión efectivas como

$$8\pi G\rho_{eff} = 3H^2 - 8\pi G(\rho_m + \rho_r) = \frac{(f'(R)R - f(R))}{2} - 3H\dot{f}(R) + 3H^2(1 - f'(R)), \quad (13)$$

$$8\pi Gp_{eff} = H^2 - \frac{1}{3}R - 8\pi Gp_r = \ddot{f}(R) + 2H\dot{f}(R) + \frac{(f(R) - f'(R)R)}{2} + (H^2 - \frac{R}{3})(1 - f'(R)), \quad (14)$$

mediante estas relaciones se define el parámetro efectivo de la ecuación de estado de la energía oscura, dado por

$$\omega_{eff} = \frac{\rho_{eff}}{p_{eff}}, \quad (15)$$

para que los modelos de  $f(R)$  conduzcan a un incremento de la velocidad cósmica, o aceleración tardía, se debe tener  $\omega_{eff} < -\frac{1}{3}$ .

### 3 Energía oscura en teorías $f(R)$

La expansión acelerada del universo, ya mencionada repetidas veces, constituye un gran desafío para la cosmología actual. La imagen que emerge que es consistente, con el modelo de concordancia o modelo estándar, se encuentra bastante de acuerdo con la gran cantidad de observaciones que prueban la evolución del fondo del universo, así como sus inhomogeneidades: Observaciones de supernovas  $Ia$ , anisotropías del fondo cósmico de microondas ( $CMB$ ) [4], formación de estructura a gran escala ( $LSS$ ) [5], oscilaciones bariónicas [6], lentes débiles [7], etc, ratifican de manera muy clara el modelo estándar. También, se ha dicho que si se supone hoy día un universo plano con una constante cosmológica  $\Lambda$  y con materia sin presión, las observaciones sugieren los siguientes valores para los parámetros cosmológicos  $\Omega_{\Lambda 0} \approx 0.7$ ,  $\Omega_{m 0} \approx 0.3$  donde en general,  $\Omega_{x 0} = \frac{\rho_{x 0}}{\rho_{cr i 0}}$

para cualquier componente  $x$ , donde el subíndice 0 representa los valores actuales y  $\rho_{crit}$  es la densidad crítica del universo. Desde el comienzo se ha considerado que un término cosmológico constante es la posibilidad más simple de explicar los datos observacionales. De hecho, los datos recientes que son un análisis [8] que combina los datos *SNLS* con *CMB*, *LSS* y el bosque *Lyman- $\alpha$*  muestra que, suponiendo que  $\omega_{DE}$  es constante, conduce a que el parámetro de la ecuación de estado para la Energía Oscura (DE) es  $\omega_{DE} = 1.04 \pm 0.06$  y, por lo tanto, es consistente con una constante cosmológica. Sin embargo, una constante cosmológica en general, como ya se puede notar, tiene el problema de la gran discrepancia de su valor medido con el valor obtenido de la energía del vacío. Esta es una de las razones, por la cual varios trabajos han explorado explicaciones alternativas, es decir, formas dinámicas de energía oscura. En ausencia de cualquier modelo dinámico de energía oscura convincente, una mayor comprensión puede ser obtenida considerando modelos generales con ecuación de estado constante o alguna parametrización diferente. La primera posibilidad alternativa a una constante cosmológica es un campo escalar mínimamente acoplado  $\phi$ , generalmente llamado quintaesencia [12]. En analogía con los escenarios inflacionarios, este campo escalar sería responsable de una etapa de expansión acelerada mientras que en contraste con la inflación, esta etapa ocurre en la evolución tardía del universo. La densidad de energía del campo escalar debería, por lo tanto, dominar sobre otros componentes del universo solo recientemente. Este es el llamado problema de coincidencia cósmica que enfrentan la mayoría de los modelos de energía oscura. Para aliviar este problema, se han considerado varias generalizaciones, como modelos de quintaesencia acoplados [13] en los que la escala de materia y energía oscura evoluciona de la misma manera con el tiempo durante algunas épocas. Sin embargo, todavía es una tarea difícil construir modelos de escala viables que den lugar a una era dominada por la materia seguida de un atractor de escala acelerada [14]. La limitación importante de los modelos de quintaesencia estándar es que no permiten un régimen fantasma con  $\omega_{DE} \ll -1$ . Las observaciones permiten un régimen fantasma e incluso lo favorecen algunos análisis de los datos [15]. Para lograr  $\omega_{DE} \ll -1$ , el campo escalar debe estar dotado de un término cinético generalizado, por ejemplo, uno con un signo opuesto al canónico [16]. Sin embargo, esta posibilidad intrigante está plagada de inestabilidades cuánticas [17]. Una posibilidad adicional e interesante es proporcionada por campos escalares no mínimamente acoplados [18] y cosmología escalar-tensorial [19, 20]. Los modelos DE de scalar-tensor pueden tener un régimen fantasma constante y una tasa de crecimiento modificada de la estructura, véase [18,19,20,] para un estudio sistemático de la estructura de desplazamiento al rojo bajo de tales teorías, incluido un análisis detallado de posibilidad de tener un régimen fantasma y las limitaciones de las pruebas de gravedad locales, y para algunos ejemplos concretos de este escenario. En los modelos DE de scalar-tensor, la gravedad se modifica por un grado dinámico adicional de libertad, el compañero escalar del gravitón. Recientemente ha habido un estallido de actividad que trata con los llamados modelos DE de gravedad modificada (ver Ref. [2] para los últimos revisión y referencias en el mismo). En estas teorías, uno modifica las leyes de la gravedad mediante las cuales para un tiempo tardío se produce, expansión acelerada sin recurrir a un componente DE, hecho que hace que estos modelos sean muy atractivos. Algunos modelos pueden tener además un régimen fantasma, que podría constituir una característica interesante. La familia más simple de modelos DE de gravedad modificada se obtiene reemplazando el escalar  $R$  de Ricci en la densidad lagrangiana de Hilbert Einstein habitual para alguna función  $f(R)$ . En los primeros modelos propuestos en la literatura DE, donde un término  $1/R$  se agrega a  $R$  [15, 16, 17, 18], normalmente se espera que a medida que el universo se expanda, el término de curvatura inversa dominará y producirá la expansión acelerada deseada en tiempos tardíos. Sin embargo, se dió cuenta rápidamente de que las restricciones de gravedad locales harían que estos modelos no fueran viables (ver también Árbito. [20]). De hecho, se demostró que los modelos  $f(R)$  son formalmente equivalentes a los modelos de tensor escalar con una desaparición del parámetro de Brans-Dicke  $\omega_{BD} = 0$ . Claramente, tales modelos no pasan las restricciones de gravedad local (sistema solar), en particular el parámetro post Newtoniano  $\gamma_{PPN}$  satisface  $\gamma_{PPN} = 1/2$  en lugar de estar muy cerca de 1 como lo requieren las observaciones. Sin embargo, la cuestión de si las restricciones de gravedad locales descartan o no los modelos  $f(R)$  no parece ser completamente establecido en la literatura. Varios documentos señalaron que las restricciones de gravedad locales aún no pueden gobernar todas las formas posibles de teorías  $f(R)$ . Por ejemplo, un modelo que contiene una combinación particular de  $1/R$  y  $R^2$  los términos fueron sugeridos y sus autores afirmaron que aprobaron con éxito las restricciones del sistema solar, debido a que se necesita una masa efectiva (infinita) grande para satisfacer las limitaciones del sistema solar y también para producir una aceleración tardía expansión (aunque esta última propiedad no parece haberse demostrado de manera satisfactoria). Recientemente se sugirió un enfoque original con términos de potencias

negativas y positivas donde el término de potencia positiva dominaría para pequeñas escalas mientras que el término de potencia negativa dominará para grandes escalas cósmicas produciendo la expansión acelerada. Para obtener una lista de investigaciones recientes sobre la energía oscura  $f(R)$ , ver referencias. Si los modelos  $f(R)$  no se descartan por restricciones de gravedad locales, es importante comprender su propiedades cosmológicas.

Recientemente, tres de los autores actuales han demostrado que el gran comportamiento al desplazamiento al rojo de los modelos  $f(R) = R + \alpha R^n$  conducen genéricamente a la ley de expansión "equivocada": de hecho, la era de la materia habitual que precede a la etapa acelerada de tiempos tardíos no tiene el comportamiento habitual de  $\propto t^{2/3}$  sino más bien un  $\propto t^{1/2}$  que obviamente haría cosmológicamente estos modelos inaceptable. Esta propiedad intrigante y bastante inesperada de estos modelos  $f(R)$  se pasó por alto en la literatura. La ausencia de la época de la materia estándar está asociada con el hecho de que en el marco de Einstein la materia no relativista está fuertemente acoplado a la gravedad, excepto por las teorías  $f(R)$  que tienen una dependencia lineal de  $R$  (incluido el modelo  $\Lambda$ CDM  $f(R) = R - \Lambda$ ). En el marco de Einstein, los modelos de ley de potencia  $f(R) \propto R^{-n}$  ( $n \neq -1$ ) corresponden a un escenario de quintaesencia acoplado con un potencial exponencial de un campo escalar dinámico. En este caso, la era de materia estándar se reemplaza por una "época dominada por la materia" ( $\phi$ MDE) en la que el factor de escala en el marco de Einstein evoluciona como  $a_E \propto t_E^{3/5}$ . Ahora bien, transformando de nuevo al marco de Jordan (marco teórico diferente al de Einstein), esto corresponde a una evolución no estándar  $a \propto t^{1/2}$ . Deseamos enfatizar aquí que la dinámica cosmológica obtenida en el marco de Jordan no exhibe ninguna diferencia de la obtenida en el marco de Einstein. Por lo tanto, en este documento nos centraremos el análisis en el marco de Jordan sin referirse al marco de Einstein. Este documento está dedicado a explicar en detalle este resultado y, lo que es más importante, extenderlo a todos los  $f(R)$  con lagrangianos que se portaren bien. A pesar de casi treinta años de trabajo en la cosmología de los modelos  $f(R)$ , de hecho, no hay criterios generales en la literatura para medir su validez como modelos cosmológicos alternativos. Encontramos las condiciones generales para que una teoría  $f(R)$  contenga una era de materia estándar seguido de un atractor acelerado en un fondo espacialmente plano, homogéneo e isotrópico. Las únicas condiciones asumimos a lo largo de este trabajo, además de obviamente una función bien comportada  $f(R)$  continua con todas sus derivadas, es que  $df/dR > 0$ , para mantener una constante gravitacional efectiva positiva para que en el límite desaparezca el término de orden superior. Sin embargo, en algunos casos consideramos modelos  $f(R)$  que violan esta condición en algún rango de  $R$ , pero no para trayectorias cosmológicas reales. El principal resultado de este trabajo es que podemos mostrar analíticamente y numéricamente que todos los modelos  $f(R)$  con un atractor global acelerado pertenecen a una de cuatro clases:

1. Clase I: los modelos de esta clase poseen un comportamiento peculiar del factor de escala ( $a \propto t^{1/2}$ ) justo antes de la aceleración.
2. Clase II: los modelos de esta clase tienen una época importante y son asintóticamente equivalentes (y difícilmente distinguibles) del modelo  $\Lambda$ CDM ( $\omega_{eff} = -1$ ).
3. Clase III: los modelos de esta clase pueden poseer una era de materia aproximada, pero este es un estado transitorio que es seguido rápidamente por el atractor final. Técnicamente, los valores propios del punto de silla de la materia divergen y es muy difícil encontrar condiciones iniciales que muestren la época aproximada de la materia.
4. Clase IV: los modelos de esta clase se comportan de manera aceptable. Poseen una época con materia estándar seguida de una aceleración no fantasma ( $\omega_{eff} \gg 1$ ).

Luego podemos resumir estos hallazgos diciendo que los modelos de energía oscura  $f(R)$  son incorrectos (Clase I), o asintóticamente de-Sitter (Clase II), o fuertemente fantasma (Clase III) o, finalmente, DE estándar (Clase IV). El segundo y cuarto de las clases tienen alguna posibilidad de ser cosmológicamente aceptables, pero incluso en estos casos no es tarea fácil de identificar, la cuenca de atracción de las trayectorias aceptables. Se especifica completamente las condiciones bajo las cuales cualquier  $f(R)$  dada pertenece a una de las clases anteriores y se discute analíticamente y numéricamente varios ejemplos que pertenecen a todos clases. Está claro que los modelos de gravedad  $f(R)$  pueden ser perfectamente viables en diferentes contextos, el ejemplo más famoso lo proporciona el modelo de Starobinsky,  $f(R) = R + \alpha R$  [20], que ha sido el primer modelo inflacionario internamente consistente. En este modelo, el término  $R^2$  produce una etapa acelerada en épocas primordiales del universo que precede a las etapas habituales de radiación y materia. Una aceleración tardía en este modelo requiere una constante cosmológica positiva (o alguna otra forma de energía oscura) en cuyo caso el  $R^2$  ya no es responsable de la aceleración tardía.

## 4 Sistema dinámico autónomo

Para, realizar el estudio de la dinámica cosmológica en modelos  $f(R)$ , se construye el sistema dinámico correspondiente, definiendo variables adimensionales, de la siguiente manera y considerando  $\kappa = 1$ , así se tiene [1,2, 3, 8, 9, 10]

$$S_{f(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} f(R) + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_r \right] , \quad (16)$$

la cual conduce a

$$\begin{cases} 3f_R H^2 = \rho_m + \rho_r + \frac{1}{2}(f_R R - f) - 3H \dot{f}_R \\ -2f_R \dot{H} = \rho_m + \frac{4}{3}\rho_r - H \dot{f}_R + \ddot{f}_R \\ \dot{\rho}_m + 3H \rho_m = 0 \\ \dot{\rho}_r + 4H \rho_r = 0 \end{cases} \quad (17)$$

la primera ecuación de Friedmann se puede expresar como

$$1 = \frac{\rho_m}{3f_R H^2} + \frac{\rho_r}{3f_R H^2} + \frac{R}{6H^2} - \frac{f}{6f_R H^2} - \frac{f'_R}{f_R} , \quad (18)$$

con lo cual se definen las siguientes variables adimensionales

$$x_1 = -\frac{f'_R}{f_R} , \quad x_2 = -\frac{f}{6f_R H^2} , \quad x_3 = \frac{R}{6H^2} = 2 + \frac{\dot{H}}{H} , \quad x_4 = \frac{\rho_r}{3f_R H^2} , \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3f_R H^2} , \quad (19)$$

de este modo se tiene que

$$\Omega_m = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 . \quad (20)$$

Derivando cada una de las variables definidas respecto a  $N = \log a$ , como se define convencionalmente, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones autónomo

$$\begin{cases} x'_1 = -1 - x_3 - 3x_2 + x_1^2 - x_1 x_3 + x_4 \\ x'_2 = \frac{x_1 x_3}{m} - x_2(2x_3 - x_1 - 4) \\ x'_3 = -\frac{x_1 x_3}{m} - 2x_3(x_3 - 2) \\ x'_4 = -2x_3 x_4 + x_1 x_4 \end{cases} \quad (21)$$

donde se define

$$m = \frac{R f_{RR}}{f_R} , \quad r = -\frac{R f_R}{f} = \frac{x_3}{x_2} . \quad (22)$$

Derivando  $R$  como función de  $\frac{x_3}{x_2}$  se consigue expresar  $m$  como función de  $\frac{x_3}{x_2}$  y obtener una función  $m = m(r)$ , entonces con el uso de estas expresiones obtenemos

$$\omega_{DE} = \frac{1}{3} \left[ \frac{1 - x_4 y - 2x_3}{1 - y(1 - x_1 - x_2 - x_3)} \right] , \quad (23)$$

$$\omega_{eff} = -\frac{1}{3}(2x_3 - 1) , \quad (24)$$

donde se ha definido  $y = \frac{f_R}{f_{R0}}$ .

## 4.1 Puntos críticos

Si consideramos, corrimientos al rojo pequeños, es decir hacemos despreciable la radiación, para este caso  $x_4 = 0$ , se pueden obtener los puntos críticos del sistema y las condiciones de estabilidad del mismo, dichos puntos se pueden expresar como [1,2,3,4,5]

Los puntos  $P_5$ ,  $P_6$  satisfacen la ecuación  $x_3 = -(m(r) + 1)x_2$ , es decir

$$m(r) = -r - 1. \quad (25)$$

Cuando  $m(r)$  no es una constante, se debe resolver esta ecuación, es decir que para cada raíz  $r_i$  de  $m(r_i)$  se encuentran puntos críticos del tipo  $P_5$  o  $P_6$ . Si  $m(r) = cte$  entonces la condición  $x_3 = -(m(r) + 1)x_2$  se mantiene a partir de las definiciones de  $m$  y  $r$ . Por lo tanto, para  $m(r) = cte$  los puntos  $P_2, P_3, P_5, P_6$ , siempre existen, mientras  $P_1$  y  $P_4$ , estén presentes para  $m = 1$  y  $m = -1$  respectivamente.

La solución que proporciona la ecuación de estado exacta para la era de materia, dada por las condiciones ( $\omega_{eff} = 0$ , es decir  $a \propto t^{2/3}$  o  $x_3 = 1/2$ ), existe sólo para  $m = 0$ , en cuyo caso conduce a

$$P_5(x_1, x_2, x_3) = (0, -1/2, 1/2), \quad (26)$$

también, para  $m = -(5 + \sqrt{73})/12 = -1.1286$  o  $m = -(5 - \sqrt{73})/12 = 0.2953$ , que en consecuencia conducen al punto crítico  $P_6$  el cual toma los respectivos valores

$$P_6(x_1, x_2, x_3) = (-3.41, 6.06, 0.72), \quad (27)$$

$$P_6(x_1, x_2, x_3) = (0.89, -0.34, 1.12). \quad (28)$$

Sin embargo, para este caso siempre se tiene  $\Omega_m = 0$  lo cual no corresponde a una era de materia estándar conformada por un fluido no relativista. Si  $m(r)$  no es constante pueden existir cualquier número de soluciones distintas, unque sólo  $P_1$  y aquellas que se origina en  $P_5$ ,  $P_6$  conducen a aceleración tardía, y únicamente  $P_2$  y  $P_5$  pueden dar origen a eras de materia. Sin embargo,  $P_2$  corresponde a  $\omega_{eff} = 1/3$  y por lo tanto se descarta como una era de materia estándar. Por el contrario  $P_5$  genera una era de materia estándar, pero sólo si  $m$  toma valores cercanos a cero. En consecuencia una cosmología aceptable puede ser dada para cualquier trayectoria que pase cerca de  $P_5$  y que conduzca a un atractor de aceleración tardía.

Es importante puntualizar que la superficie definida por  $x_2, x_3$  para la cual  $m(r) = -r - 1$  es un subespacio del sistema dinámico y por lo tanto no puede ser cruzada. Se puede observar esto mediante la definición de  $m$  y  $r$  para derivar la siguiente relación

$$\frac{dr}{dN} = r(m + r + 1) \frac{\dot{R}}{HR}, \quad (29)$$

lo cual muestra explícitamente que si  $m(r) = -r - 1$  implica  $\frac{dr}{dN} = 0$  mientras  $\frac{\dot{R}}{HR}$  no diverja. Significa que el sistema a lo largo de la línea  $m(r)$  se detiene en las raíces de la ecuación  $m(r) = -r - 1$  hasta que cada trayectoria cosmológica quede atrapada entre sucesivas raíces de la ecuación para  $m(r)$ [8, 9, 10, 11].

$P_1(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = -1$
$P_2(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0)$	$\Omega_m = 2$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_3(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_4(x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_5(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)} \right)$	$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$	$\omega_{eff} = -\frac{m}{1+m}$
$P_6(x_1, x_2, x_3) = \left( \frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)} \right)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{2-5m-6m^2}{3m(1+2m)}$

Table 1: Tabla de puntos críticos para el sistema dinámico



## 4.2 Estabilidad de los puntos críticos

En general se define  $m_i = m(P_i)$  y se asume una forma general de  $m(r)$ [6, 7, 8, 9, 10].

a) Punto de deSitter  $P_1$  :

Este punto está definido mediante  $P_1(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$ , donde  $\omega_{eff} = -1$ , y corresponde a la solución deSitter, donde  $H = 0$ , con los siguientes valores propios

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{25 - \frac{16}{m_1}}}{2}, \quad \lambda_3 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{25 - \frac{16}{m_1}}}{2}, \quad (30)$$

donde  $m_1 = m(r = -2)$ . Entonces este punto es estable cuando  $0 < m_1 \leq 1$ , y es un punto de silla para otras condiciones. Así, la condición de estabilidad para el punto de deSitter, está dada por

$$0 \leq m(r = -2) \leq 1. \quad (31)$$

b) Punto  $\phi MDE$ ,  $P_2$  :

Este punto, definido por  $P_2(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, 0)$ , corresponde a una época cinética en la cual fracciones de energía constante de materia y campo coexisten. Para el cual los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left\{ 7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2}(1+r)r + \sqrt{\left(7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2}(1+r)r\right)^2 - 4\left(12 + \frac{3}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2}(3+4r)r\right)} \right\} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left\{ 7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2}(1+r)r - \sqrt{\left(7 + \frac{1}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2}(1+r)r\right)^2 - 4\left(12 + \frac{3}{m_2} - \frac{m'_2}{m_2}(3+4r)r\right)} \right\} \end{aligned} \quad (32)$$

Entonces,  $P_2$  es un punto estable o un punto de silla. Si  $m(r) = cte$ , los valores propios se reducen a

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 4 + \frac{1}{m_2}, \quad (33)$$

lo que indica que  $P_2$  sería un punto de silla. Pero es un punto estable sobre el subespacio  $x_3 = rx_2$ , pero de  $x'_2$  y  $x'_3$ , se puede concluir que el término  $\frac{x_3}{m_2}$  se hace despreciable. Entonces la condición necesaria y suficiente para que el punto  $P_2$  exista, debe cumplir las siguientes condiciones

$$\lim_{x_2, x_3 \rightarrow 0} \frac{x_3}{m_2} \rightarrow 0, \quad (34)$$

lo cual considera que

$$\frac{f_R}{H^2 f_{RR}} \rightarrow 0, \quad (35)$$

para  $\frac{R}{H^2} \rightarrow 0$  y  $\frac{f_R}{H^2 f_{RR}} \rightarrow 0$ , lo cual permite que varios modelos de teorías  $f(R)$  se comprten bien.

c) Punto puramente cinético  $P_3$  :

Este punto, se expresa como,  $P_3(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 0)$ , que corresponde a una era o época puramente cinética, debido a que en este punto se hace despreciable la fracción de energía correspondiente a la materia, y puede ser considerado como un caso especial del punto  $P_6$  haciendo  $m = 1/4$ . Así, los valores propios para este punto están dados por

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 2 \\
 \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left\{ 9 - \frac{1}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} (1+r)r + \sqrt{\left(9 - \frac{1}{m_3} - \frac{m'_3}{m_3^2} (1+r)r\right)^2 - 4 \left(20 + \frac{5}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} (5+4r)r\right)} \right\} \\
 \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left\{ 9 - \frac{1}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} (1+r)r - \sqrt{\left(9 - \frac{1}{m_3} - \frac{m'_3}{m_3^2} (1+r)r\right)^2 - 4 \left(20 + \frac{5}{m_3} + \frac{m'_3}{m_3^2} (5+4r)r\right)} \right\}
 \end{aligned} \tag{36}$$

esto significa que  $P_3$ , puede ser un punto estable o un punto de silla. Si  $m(r) = cte$ , los valores propios se reducen a

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 1 + \frac{1}{m_3}, \tag{37}$$

para este caso si  $m_3 < 0$  el punto  $P_3$  se hace inestable, y si  $m_3 > 1/4$  el punto  $P_3$  es un punto de silla.

d) Punto  $P_4$  :

Punto definido mediante,  $P_4(x_1, x_2, x_3) = (-4, 5, 0)$ , el cual presenta propiedades similares al punto anterior  $P_3$ , ya que conduce a los mismos  $\Omega_m = 0$ ,  $\omega_{eff} = \frac{1}{3}$  y puede considerarse como un caso especial de  $P_6$  con  $m = -1$ . Para este punto tenemos los valores propios

$$\lambda_1 = -5, \quad \lambda_2 = -3, \quad \lambda_3 = 4 \left(1 + \frac{1}{m_4}\right), \tag{38}$$

el cual es estable para  $-1 < m_4 < 0$ , y fuera de este rango es un punto de silla. Es importante aclarar que  $P_3$  y  $P_4$  no pueden representar eras de dominio de materia, ni de aceleración tardía.

e) Punto de escalado  $P_5$  :

Este punto se expresa mediante,  $P_5(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)}\right)$ , que define una solución de escalado ya que proporciona una razón constante de  $\frac{\Omega_m}{\Omega_{DE}}$ , y cuando  $m_5 \rightarrow 0$  representa a una era de materia estándar, es decir  $a \propto t^{2/3}$  y  $\Omega_m = 1$ . Así, la condición necesaria para que  $P_5$  corresponda a una era de materia estándar, está dada por  $m(r = -1) = 0$ . Los valores propios de este punto estan dados por

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 3(1 + m'_5) \\
 \lambda_2 &= \frac{-3m_5 + \sqrt{m_5(256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5(m_5 + 1)} \\
 \lambda_3 &= \frac{-3m_5 - \sqrt{m_5(256m_5^3 + 160m_5^2 - 31m_5 - 16)}}{4m_5(m_5 + 1)}
 \end{aligned} \tag{39}$$

lo cual para  $-1 \ll m_5 \ll 1$ , los valores propios se reducen a

$$\lambda_1 = 3(1 + m'_5), \quad \lambda_2 = -\frac{3}{4} + \sqrt{-\frac{1}{m_5}}, \quad \lambda_3 = -\frac{3}{4} - \sqrt{-\frac{1}{m_5}}. \tag{40}$$

Tenemos que modelos que conducen a  $m_5 = \frac{Rf_{RR}}{f_R} < 0$  exhiben divergencia de los valores propios para  $m_5 \rightarrow 0$ , en cuyo caso el sistema no puede permanecer por largo tiempo alrededor del punto  $P_5$ . También existe una era de materia aproximada si  $m_5$  es negativo y no cero, pero entonces, los valores propios se hacen grandes y las condiciones iniciales se hacen difíciles de encontrar, para permanecer cerca de  $P_5$ , en general este tipo de modelos no son aceptables.

Si  $0 < m_5 < 0.327$ , los valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$  son complejos con parte real negativa. Por lo tanto, si  $m'_5 > -1$  el punto  $P_5$  es un punto de silla con oscilaciones amortiguadas. De este modo el universo puede evolucionar hacia el el punto  $P_5$  y llegar a una etapa de aceleración tardía. Igualmente, el punto  $P_2$  es en general un punto de silla excepto para algunos casos específicos en los cuales es estable.

Además, de la relación  $m(r) = -r - 1$  para  $m(r) > 0$ , equivale a  $r < -1$ , así el criterio para la existencia de un punto de silla en la época de materia con oscilación amortiguada es dada por

$$m(r \leq -1) > 0, \quad m'(r \leq -1) > -1. \quad (41)$$

f) Punto de dominio de curvatura  $P_6$  :

Corresponde este punto a  $P_6(x_1, x_2, x_3) = (\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)})$ , el cual conduce es un punto de dominio de curvatura cuya ecuación de estado depende de los valores de  $m$ , y satisface la condición de aceleración  $\omega_{eff} < -1/3$  cuando se cumple que

$$m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2, \quad -1/2 < m_6 < 0, \quad m_6 > (\sqrt{3} - 1)/2. \quad (42)$$

Los valores propios para este punto crítico son

$$\lambda_1 = -4 + \frac{1}{m_6}, \quad \lambda_2 = \frac{2 - 3m_6 - 8m_6^2}{m_6(1 + 2m_6)}, \quad \lambda_3 = \frac{2(m_6^2 - 1)(1 + m_6')}{m_6(1 + 2m_6)}, \quad (43)$$

lo cual indica que la estabilidad de este punto depende de  $m_6$  y  $m_6'$ . En el límite  $m_6 \rightarrow \pm\infty$  el punto  $P_6 \rightarrow (-1, 0, 2)$ , con ecuación de estado deSitter  $\omega_{eff} \rightarrow -1$ , y con  $m_6' > -1$ , el punto es estable, y es un punto deSitter con  $m_6 = 1$ , que coincide con  $P_1$  así es marginalmente estable.

Cuando  $r = -2$ , el punto se caracteriza por

$$m(r = -2) \rightarrow 1, \quad (44)$$

observando esto en el marco de Einstein, es decir bajo una transformación conforme, se obtiene un campo escalar con potencial dado por

$$V = \frac{f_R R - f}{|f_R|^2}, \quad (45)$$

relación que muestra que la condición  $m(r = -2) \rightarrow 1$  conduce a  $V_R = 0$ , no es más que la condición para la existencias de un potencial mínimo. Por lo tanto el punto  $P_6$  es estable y acelerado en cuatro rangos distintivos, a saber:

Si  $m_6' > -1$ , el punto crítico  $P_6$  es estable y acelerado, para los siguientes casos:

$m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2$ , allí se produce aceleración, pero no contiene ecuación de estado fantasma, es decir  $\omega_{eff} > -1$ , se puede observar que  $\omega_{eff} \rightarrow -1$  cuando  $m_6 \rightarrow -\infty$ ;  $-1/2 < m_6 < 0$ , en este rango  $P_6$  es fuertemente fantasma con ecuación de estado  $\omega_{eff} < -7.6$ , y  $m_6 \geq 1$ , el punto  $P_6$  es ligeramente fantasma con ecuación de estado  $-1.07 < \omega_{eff} \leq -1$ , cuando  $\omega_{eff} \rightarrow -1$  en los límites  $m_6 \rightarrow +\infty$  y  $m_6 \rightarrow 1$ .

Ahora, si  $m_6' < -1$ , el punto crítico  $P_6$  es estable y acelerado en el intervalo  $(\sqrt{3} - 1)/2 < m_6 < 1$ , y no es un fantasma ya que  $\omega_{eff} > -1$ [11, 12, 13, 14].

### 4.3 Puntos críticos con radiación

Entonces si se considera el sistema dinámico completo, es decir incluyendo radiación  $x_4 \neq 0$ , que en términos físicos quiere decir un universo que evoluciona desde tiempo más atrás, para considerar dominio de radiación. De tal forma que se obtienen los mismos puntos críticos anteriores y se adicionan dos puntos más  $P_7$  y  $P_8$ [11, 12, 13, 14]

Entonces, el punto  $P_7$  corresponde a radiación estándar. Si  $m(r) = cte$ , los valores propios de  $P_7$  están dados por

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 4, \quad \lambda_4 = -1, \quad (46)$$

lo cual significa que  $P_7$  es un punto de silla.

El punto  $P_8$  es una nueva era de radiación, llamada dominio de radiación  $\phi$ , la cual contiene energía oscura no cero. Debido a que la ecuación efectiva de estado está restringida por nucleosíntesis, debe ser cercana a  $1/3$ ,

de este modo  $P_8$  se acepta como época de radiación sólo para  $m_8$  cercana a cero. Los valores propios para este punto están dados por

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1, \quad \lambda_2 = 4(1 + m'_8), \\ \lambda_3 &= \frac{m_8 - 1 + \sqrt{81m_8^2 + 30m_8 - 15}}{2(m_8 + 1)}, \quad \lambda_4 = \frac{m_8 - 1 - \sqrt{81m_8^2 + 30m_8 - 15}}{2(m_8 + 1)},\end{aligned}\quad (47)$$

donde se observa que en el límite de  $m_8 \rightarrow 0$ , los dos últimos valores propios se hacen complejos con parte real negativa, lo cual muestra que  $P_8$  es un punto de silla alrededor del punto de radiación. Así, eventualmente las soluciones se alejan de la era de radiación y son seguidas por uno de los otros puntos fijos. Aunque el punto de materia  $P_5$  no tiene singularidades para los valores propios de  $P_8$  en el límite  $m_8 \rightarrow 0$ . Igualmente, se nota que el punto  $P_8$  está sobre la línea  $m(r) = -r - 1$ , de forma similar al caso  $P_5$  de materia. Si las condiciones para la existencia de punto de materia  $P_5$  se satisfacen, es decir,  $m \approx 0$ , y  $r \approx -1$ , conduce a la existencia de un punto de radiación  $P_8$  en la misma región. Por lo tanto, una trayectoria cosmológica viable inicia alrededor del punto  $P_8$  con  $m \approx 0$  conectándose con un punto de materia  $P_5$  con  $m \approx 0$ , y finalizando con uno u otro de los puntos que conducen a aceleración tardía.

En lo siguiente, se ilustra una gráfica que muestra el comportamiento de  $\omega_{eff}$  en función de  $m$  para el punto crítico  $P_6$ , se aprecian las regiones analizadas anteriormente para este punto.

Para que un modelo cosmológico sea viable bajo el esquema de teorías- $f(R)$ , estos tienen que poseer una época de dominio de materia seguida por una época de expansión acelerada, que debe ser estable (atractor de tiempo tardío), además se necesita que la época de materia sea lo suficientemente larga para permitir la formación de estructura y que la ecuación efectiva de estado sea cercana a cero,  $\omega_{eff} = 0$  con el fin de coincidir con las observaciones de la distancia diametral angular y de los picos acústicos de las anisotropías de CMB, es decir que tiene que expandirse como  $a \sim t^{2/3}$ .

## 5 Transición del punto de materia $P_5$ a un punto acelerado $P_1$ o $P_6$

Como se observó anteriormente, el único punto que permite una era de materia estándar es  $P_5$  cuando  $m(-1) \rightarrow 0$ , desde luego, esta es la primera condición que se debe satisfacer para obtener una teoría aceptable. Si se cumple que  $m(-1) \rightarrow 0$  o en términos generales quiere decir  $|m(-1)| \ll 1$ , así, se puede caracterizar la época de materia mediante[15,16,17,18]

$$a \approx t^{2(1+m)/3}. \quad (48)$$

Entonces, se denota el correspondiente  $P_5$  en el intervalo  $|m_5| \ll 1$ , como  $P_5^0$ , pero en general ya que la ecuación  $m(r) = -r - 1$ , tiene varias raíces, denotadas como  $r_a, r_b, r_c, \dots$ , y por lo tanto da origen a  $m_a, m_b, m_c, \dots$ , y correspondientemente existiran varios puntos  $P_{5(a)}, P_{5(b)}, P_{5(c)}, \dots$ . Como se ha notado anteriormente, la línea  $m(r) = -r - 1$  sobre el plano  $(m, r)$  se llama línea crítica, debido a que los puntos  $P_5$  y  $P_6$  están sobre esta línea.

$P_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, -1, 2, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = -1$
$P_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 0, 0, 0)$	$\Omega_m = 2$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1, 0, 0, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-4, 5, 0, 0)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_5(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{3m}{1+m}, -\frac{1+4m}{2(1+m)^2}, \frac{1+4m}{2(1+m)}, 0)$	$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$	$\omega_{eff} = -\frac{m}{1+m}$
$P_6(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{2(1-m)}{1+2m}, \frac{1-4m}{m(1+2m)}, -\frac{(1-4m)(1+m)}{m(1+2m)}, 0)$	$\Omega_m = 1 - \frac{m(7+10m)}{2(1+m)^2}$	$\omega_{eff} = -\frac{m}{1+m}$
$P_7(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 1)$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1}{3}$
$P_8(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\frac{4m}{1+m}, -\frac{2m}{(1+m)^2}, \frac{2m}{(1+m)}, \frac{1-2m-5m^2}{(1+m)^2})$	$\Omega_m = 0$	$\omega_{eff} = \frac{1-3m}{3+3m}$

Table 2: Tabla de puntos críticos para el sistema dinámico con radiación

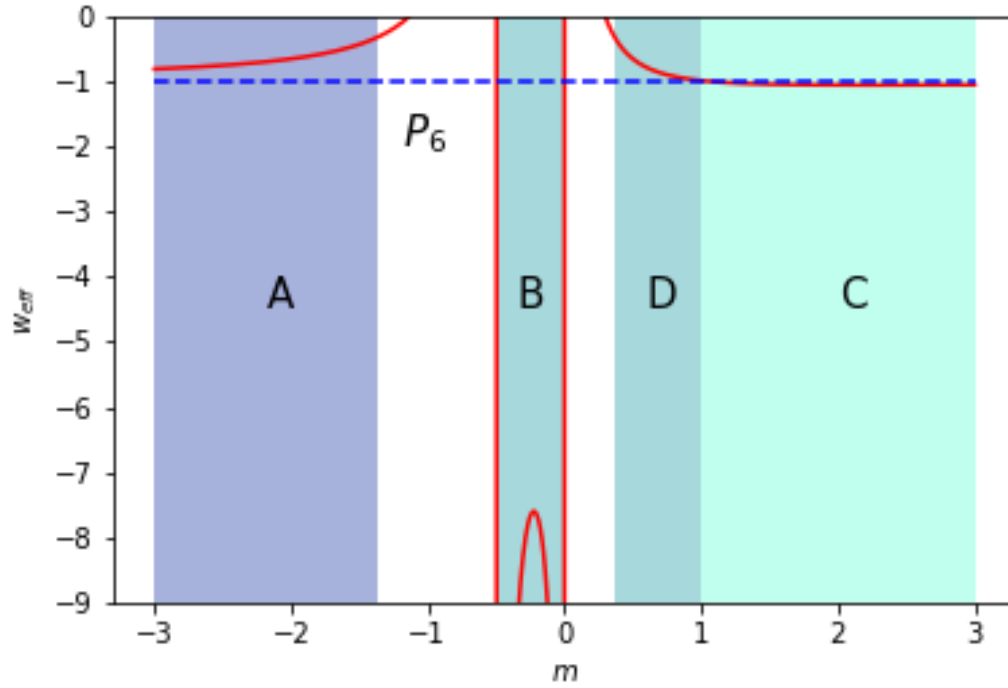


Figure 1: Gráfica para las diferentes regiones de validez del punto crítico  $P_6$ . El punto crítico  $P_6$  es estable y acelerado en las regiones azul ( $A, B, C, D$ ). En la región  $A$ ,  $m < -(\sqrt{3} + 1)/2$ , con  $\omega_{eff} > -1$ , es decir no es un fantasma. En la región  $B$ ,  $-1/2 < m < 0$ , es fuertemente fantasma con  $\omega_{eff} < -7.6$ . En la región  $C$ ,  $m = 1$ , es ligeramente fantasma con  $-1.07 < \omega_{eff} < 1$ , y finalmente en la región  $D$ , corresponde a un no fantasma con  $\omega_{eff} > -1$ .

Desde la época de materia  $P_5^0$  en el plano  $(r, m) = (-1, 0)$ , las trayectorias cosmológicas pueden alcanzar un punto de aceleración tardía como  $P_1$  o  $P_6$ . El punto  $P_1$  es estable y acelera sólo para  $0 < m_1 \leq 1$ , y el punto  $P_5$  corresponde a una solución acelerada para  $m_5 > 1/2$  y  $m_5 < -1$ , es decir no acelera en el intervalo  $(-1, 1/2)$ , pero este punto es inestable o punto de silla en ambas regiones. Por lo tanto sólo es necesario estudiar la transición del punto  $P_5^0$  al punto de aceleración tardía  $P_6$ . Puede decirse en general que un modelo cosmológico en teorías  $f(R)$  es viable si es posible alguna de las transiciones

$$P_5^0 \rightarrow P_6, \quad P_5^0 \rightarrow P_1. \quad (49)$$

Se puede hacer la aproximación a  $(r, m) = (-1, 0)$  por la izquierda o por la derecha de  $m$ . En el caso de hacer la aproximación por la derecha (lado positivo) se obtienen valores propios complejos con parte real negativa, donde las trayectorias se comportan de forma oscilatoria amortiguada alrededor del punto de materia, antes de conducir a la aceleración. En el caso de aproximación por la izquierda (lado negativo), los valores propios son reales y divergen con  $m \rightarrow 0^-$ .

De este modo la era de materia es muy corta y se hace difícil encontrar condiciones iniciales para generar una cosmología aceptable o adecuada. En la discusión del punto  $P_6$  se hizo mención que es un punto estable y conduce a aceleración tardía en cuatro diferentes intervalos, que nuevamente son

$$\begin{aligned} A \text{ (no fantasma)} &: m_6 < -(1 + \sqrt{3})/2 \quad \text{si } m'_6 > -1, \quad \omega_{eff} > -1 \\ B \text{ (fuerte fantasma)} &: 1/2 < m_6 < -0 \quad \text{si } m'_6 > -1, \quad \omega_{eff} < -7.6 \\ C \text{ (ligeramente fantasma)} &: m_6 \geq 1 \quad \text{si } m'_6 > -1, \quad -1.07 < \omega_{eff} \leq -1 \\ D \text{ (no fantasma)} &: (\sqrt{3}-)/2 < m_6 < 1 \quad \text{si } m'_6 < -1, \quad \omega_{eff} > -1 \end{aligned} \quad (50)$$

### 5.1 Evolución de $P_5$ ( $m'_5 > -1$ , $m > 0$ ) a $P_1$ o $P_6$ ( $m'_6 > -1$ )

En la región positiva de  $m$  el punto de materia  $P_5^0$  es un punto de silla para  $m'_5 > -1$ . Entonces acercándose  $m \approx 0^+$  existen tres raíces en las regiones A, B, C, es decir  $m_{6a}$ ,  $m_{6b}$ ,  $m_{6c}$ . En consecuencia para obtener una cosmología aceptable desde el punto de silla  $P_5^0$  a un punto de aceleración tardía estable que son  $P_1, P_{6a}, P_{6b}, P_{6c}$ . De tal modo que la curva  $m(r)$  debe intersectar la línea crítica  $m = -r - 1$  con una de las derivadas  $m'_5 > -1$ ,  $m'_6 > -1$ , si por el contrario la intersección ocurre con una de las derivadas  $m'_5 < -1$ ,  $m'_6 < -1$ , el modelo cosmológico no es aceptable, debido a que la era de materia es estable o porque la época de aceleración no es estable.

Por lo tanto se puede representar en el plano  $(m, r)$  las regiones de dirección prohibidas alrededor del punto crítico, o en otros términos las direcciones para una curva  $m(r)$  que intersectan la línea  $m = -r - 1$  que no pueden ser definidas. Así, que para cualquier modelo  $m(r)$ , se debe de observar la intersección, para decidir si el modelo cumple con las condiciones la transición de materia estándar a aceleración tardía estable. Puede, decirse que si la curva  $m(r)$  conecta la era de materia estándar  $(r, m) = (-1, 0)$ , con alguno de los puntos de aceleración  $P_1, P_6$  sin entrar en las regiones prohibidas, entonces el modelo cosmológico es viable. De otro lado, si no hay conexión o la conexión está en la dirección incorrecta el modelo no es viable cosmológicamente.

Claro está, que cualquier línea  $m(r)$  es posible, sin embargo, si se asume  $f_R > 0$ , se obtiene una función  $r(R)$  que es monótona y por lo tanto  $m(r)$  es de valor simple y no singular. También, se tiene que es imposible conectar puntos cerca de  $m \approx 0^+$  con puntos en las regiones A, B, C, para lograrlo se requeriría entrar en las regiones prohibidas o retornar alrededor de  $m(r)$ , esto es tener una función multivaluada, o con una singularidad de  $m$  para  $r$  finito, o finalmente cruzar la línea crítica. Por lo cual la era de materia con  $m \approx 0^+$  no puede conectar con  $P_6$  en las regiones A, B, C, de este modo el único punto que conduce a aceleración tardía estable es  $P_1$  (es estable solo para  $0 \leq m(r = -2) \leq 1$ , lo cual es válido para cualquier cantidad de raíces en las regiones A, B, C).

No obstante, una conexión con  $P_6$  es posible si  $r \rightarrow \pm\infty$ , con pendiente  $m'_6 = -1$ , lo cual quiere decir que la curva  $m(r)$  es asintóticamente convergente a la línea  $m = -r - 1$ . En este caso la aceleración final es de Sitter con  $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 2)$ , y aunque la curva  $m(r)$  puede tener cualquier número de intersecciones con la línea

crítica, ninguna trayectoria cosmológica puede realmente cruzarla, lo cual es garantizado por  $\frac{dr}{dN} = r(m+r+1)\frac{\dot{R}}{HR}$ , las trayectorias se detienen en las intersecciones de  $m(r)$ , y permanecen atrapadas entre sucesivas raíces[19,20].

## 5.2 Evolución de $P_5$ ( $m_5 < 0$ ) a $P_6$ ( $m'_6 > -1$ )

Se tiene otra opción, que consiste en considerar  $P_5(m_5 < 0)$ , en la región B, entonces cuando  $m$  se acerca a  $m \approx 0^-$  uno de los valores propios  $\lambda_2 = -\frac{3}{4} + \sqrt{-\frac{1}{m_5}}$ ,  $\lambda_3 = -\frac{3}{4} - \sqrt{-\frac{1}{m_5}}$ , es positivo mientras el otro es negativo, por lo tanto el punto  $P_5^0$  es un punto de silla independientemente de  $m'_5$ , mientras el punto  $P_6$  en esta región es estable para  $m'_6 > -1$ .

Entonces, considerando el caso  $m'_5 > -1$ , la curva  $m(r)$  no satisface ambas condiciones  $m'_5 > -1$  y  $m'_6 > -1$  requeridos para la existencia de un punto de aceleración tardía estable  $P_6$  en las regiones A, B, C. Sin embargo, existe una excepción, si la raíz de  $m$  del punto de materia es pequeña y estrictamente negativa y  $m'_5 > -1$ , entonces  $P_6$  para la misma raíz se encuentra en la región B, generando un punto de aceleración tardía. Dicho de otra manera,  $P_5$  y  $P_6$  coinciden en el plano  $(m, r)$  y ambos son congruentes ya que se cumple que  $m'_5 > -1$  y  $m'_6 > -1$ , de hecho, la posibilidad más simple es que  $m = cte \in (-1/2, 0)$ .

Ahora bien, cuando  $m'_5 < -1$ , es posible alcanzar el punto de aceleración tardía  $P_6$  en alguna de las regiones A, B, C con  $m'_6 > -1$ , a pesar de que la época de materia no dure mucho, para este caso, ya que se presenta un valor propio es muy grande. Además, se ha observado que se alcanza un atractor final  $P_6$  en la región B para el mismo  $m$  cuya ecuación efectiva de estado corresponde a un fantasma fuerte  $\omega_{eff} < -7.6$ . Por ende, si el punto de materia  $P_5^0$  existe en la región  $m < 0$ , los modelos son apenas compatibles con las observaciones debido a que la era de materia está prácticamente ausente y debido a que muchas trayectorias caeran en una era de fantasma no aceptable.

## 5.3 Evolución de $P_5$ ( $m'_5 > -1$ , $m > 0$ ) a $P_6$ ( $m'_6 < -1$ )

Ahora tenemos que para el punto  $P_6$ , para que sea estable debe cumplirse que  $m'_6 < -1$ . Por lo tanto es posible salir de la época de la materia  $P_5^0$  ( $m'_5 > -1$ ,  $m > 0$ ) para entrar a la época de aceleración tardía  $P_6$  ( $m'_6 < -1$ ). En consecuencia estos modelos son compatibles con la cosmología estándar, ya que presentan época de materia estándar seguida por una aceleración no fantasma con  $\omega_{eff} > -1$ . Esto se observa en la región D de evolución para el punto  $P_6$ , y además puede advertirse que el punto de silla de la época de materia necesita ser suficientemente larga para que ocurra formación de estructura. Empero, si la línea  $m(r)$  tiene una derivada exactamente  $m' = -1$  en el punto crítico, entonces este punto es marginalmente estable y quiebra el análisis y condiciones anteriores. De presentarse este caso se debe hacer un análisis a segundo orden o reliazar un análisis numérico[1,2,3,4,5].

# 6 Conclusiones

Segun lo anterior podemos concluir lo siguiente: Se resolvió el sistema dinámico que surge en el marco de teorías  $f(R)$ , igualmente se obtuvieron los puntos críticos y de estabilidad del sistema dinámico, y se analizaron las posibles trayectorias que debe seguir la evolución cosmológica para ser consecuente con el modelo estándar.

La complejidad que surge en el marco de teorías  $f(R)$ , conlleva a un esquema en términos de dos cantidades importantes  $(m, r)$ , las cuales determinan las propiedades y dinámica de diferentes modelos de gravedad modificada.

Se encuentra que este tipo de modelos que modifican la gravedad, es decir modelos de curvatura modificada, conducen a esquemas de expansión acelerada, sin involucrar contenidos adicionales de materia-energía.

La solución del sistema dinámico, muestra trayectorias y puntos críticos que son de expansión acelerada, lo que es equivalente a soluciones geométricas de energía oscura. Igualmente, las soluciones obtenidas son coherentes con el modelo estándar.

De forma general, se puede decir que en este marco teórico, tenemos una modificación de la curvatura espacio-temporal, surgida de elementos geométricos como es el escalar de Ricci, en términos de funciones matemáticas

de mayor alcance, conduciendo a soluciones cosmológicas diferentes, pero coherentes y consistentes con las soluciones convencionales.

## References

- [1] V. Sahni and A. A. Starobinsky, *Int. J. Mod. Phys D*, *9*, 373 (2000); S. M. Carroll, *Living Rev*, *4*, 1 (2001); T. Padmanabhan, *Phys Rept*, *380*, 235 (2003); P. J. E. Peebles and B. Ratra, *Rev. Mod. Phys.* *75*, 559 (2003); V. Sahni, *Lect. Notes Phys.* *653*, 141 (2004).
- [2] E. J. Copeland, M. Sami and S. Tsujikawa, *Int. J. Mod. Phys. D* *15*, 1753 (2006).
- [3] S. Perlmutter et al., *Astrophys. J.* *517*, 565 (1999); A. G. Riess et al., *Astron. J.* *116*, 1009 (1998); *Astron. J.* *117*, 707 (1999); J. L. Tonry et al., *Astrophys. J.* *594*, 1 (2003); R. A. Knop et al., *Astrophys. J.* *598*, 102 (2003).
- [4] D. N. Spergel et al., *Astrophys. J. Suppl.* *148*, 175 (2003); D. N. Spergel et al., arXiv:astro-ph/0603449.
- [5] D. J. Eisenstein et al., *Astrophys. J.* *633*, 560 (2005); C. Blake, D. Parkinson, B. Bassett, K. Glazebrook, M. Kunz and R. C. Nichol, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* *365*, 255 (2006).
- [6] B. Jain and A. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* *91*, 141302 (2003).
- [7] V. Sahni and A. A. Starobinsky, arXiv:astro-ph/0610026.
- [8] Y. Fujii, *Phys. Rev. D* *26*, 2580 (1982); L. H. Ford, *Phys. Rev. D* *35*, 2339 (1987); C. Wetterich, *Nucl. Phys B.* *302*, 668 (1988); B. Ratra and J. Peebles, *Phys. Rev D* *37*, 321 (1988); Y. Fujii and T. Nishioka, *Phys. Rev. D* *42*, 361 (1990); E. J. Copeland, A. R. Liddle, and D. Wands, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* *688*, 647 (1993); C. Wetterich, *A&A* *301*, 321 (1995); P. G. Ferreira and M. Joyce, *Phys. Rev. Lett.* *79*, 4740 (1997); *Phys. Rev. D* *58*, 023503 (1998); R. R. Caldwell, R. Dave and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* *80*, 1582 (1998); I. Zlatev, L. M. Wang and P. J. Steinhardt, *Phys. Rev. Lett.* *82*, 896 (1999); P. J. Steinhardt, L. M. Wang and I. Zlatev, *Phys. Rev. D* *59*, 123504 (1999).
- [9] L. Amendola, *Phys. Rev. D* *62*, 043511 (2000); L. Amendola and D. Tocchini-Valentini, *Phys. Rev. D* *64*, 043509 (2001); L. Amendola and C. Quercellini, *Phys. Rev. D* *68*, 023514 (2003).
- [10] L. Amendola, M. Quartin, S. Tsujikawa and I. Waga, *Phys. Rev. D* *74*, 023525 (2006).
- [11] A. Melchiorri, L. Mersini-Houghton, C. J. Odman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* *68*, 043509 (2003); U. Alam, V. Sahni, T. D. Saini and A. A. Starobinsky, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* *354*, 275 (2004); B. A. Bassett, P. S. Corasaniti and M. Kunz, *Astrophys. J.* *617*, L1 (2004).
- [12] R. R. Caldwell, *Phys. Lett. B* *545*, 23-29 (2002); R. R. Caldwell, M. Kamionkowski and N. N. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* *91*, 071301 (2003); S. M. Carroll, M. Hoffman and M. Trodden, *Phys. Rev. D* *68*, 023509 (2003); P. Singh, M. Sami and N. Dadhich, *Phys. Rev. D* *68*, 023522 (2003).
- [13] L. Perivolaropoulos, *JCAP* *0510*, 001 (2005); S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, arXiv:astro-ph/0610092.
- [14] L. Perivolaropoulos, *JCAP* *0510*, 001 (2005); S. Nesseris and L. Perivolaropoulos, arXiv:astro-ph/0610092.
- [15] S. Capozziello, V. F. Cardone, S. Carloni and A. Troisi, *Int. J. Mod. Phys. D* *12*, 1969 (2003).
- [16] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden and M. S. Turner, *Phys. Rev. D* *70*, 043528 (2004).
- [17] S. Capozziello, F. Occhionero and L. Amendola, *Int. J. Mod. Phys. D* *1* (1993) 615.
- [18] L. Amendola, D. Polarski and S. Tsujikawa, arXiv:astro-ph/0603703, *Physical Review Letters* to appear.
- [19] J. Barrow and A. Ottewill, *J. Phys. A* *16*, 2757 (1983).
- [20] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* *91*, 99 (1980).