

Cosmología de membranas bajo datos de SN Ia

Alexander Moreno Sánchez
Universidad Nacional de Colombia
Observatorio Astronómico Nacional
Bogotá D. C, Colombia.
amorenosa@unal.edu.co

Abstract

We study the cosmology on one brane, in the frame the model of Randall-Sundrum, with matter not relativistic over brane, show relations cosmologicals important in particular the relation magnitud-redshift, was developed the method of maximum likelihood for obtain values of the new parameters of model. Show, region of confidence the 68%, and 95% , also, curve the best fit and other curves cosmologicals important.

1 Introducción

La cosmología es una ciencia que hoy día progresa incesantemente, son muchos y variados los descubrimientos tanto desde el punto de vista teórico como desde el punto de vista observacional y más aun el grado de precisión con el que se obtienen datos observacionales, y la amplia capacidad que se tiene hoy día para contrastar modelos teóricos, han conducido a la cosmología a las fronteras mismas del conocimiento. Claro esta que todo ello acompañado de la alta tecnología involucrada en el análisis y observación. Por lo tanto, es así como la cosmología se encuentra en un candente debate para determinar como ha sido, como es y como será el Universo. Contamos con teorías tan firmemente establecidas como son el modelo estándar de partículas elementales, y el modelo estándar de la cosmología, los cuales conducen a una imagen aceptable del origen y evolución del universo, igualmente contamos con observaciones tan completas como la radiación cósmica de fondo, los datos de nucleosíntesis, datos de supernovas Ia, explosiones de rayos gamma, en fin, todo ello

ha configurado una imagen del universo, pero como en muchos otros campos de la física dicha imagen no es completa y en ocasiones contradictoria. Podemos mencionar en el campo de la cosmología problemas o aspectos sin clarificar como el de la constante cosmológica, el problema de la energía y la materia oscura, el origen del Big-Bang, la causa de la inflación, el problema de jerarquías para las interacciones fundamentales, la dificultad para la detección de ondas gravitacionales, o la falta de una teoría de la gravedad cuántica, entre otros, los cuales colocan en aprietos o en verdaderas dificultades las teorías y esquemas conceptuales convencionales.

En los últimos años se ha presenciado el surgimiento de nuevas teorías consideradas exóticas o heréticas: dimensiones adicionales, universos paralelos, multiversos, nuevas y extrañas simetrías, partículas exóticas, principios extraños como el holográfico, entre otros. Estas nuevas ideas si bien presentan muchos problemas conceptuales y observacionales permiten abordar y encastrar las investigaciones de forma alterna para la solución de problemas físicos por lo menos de forma aproximada. Todos estos nuevos elementos, ideas y conceptos emergentes brindan la posibilidad de aproximarnos a un conocimiento más amplio de la realidad, y es por ello que todo esto adquiere valor e importancia por lo menos desde el punto de vista teórico, y en la medida que contemos con nuevos y mejores resultados experimentales así como de nuevos y mejores datos observacionales podremos determinar cuales de estos nuevos elementos encajan en una descripción apropiada de la naturaleza. Entre tanto deben estudiarse como elementos posibles y aun reales en la comprensión de la

naturaleza o mejor aun de la realidad misma. Es claro que todavía falta mucho por hacer y por investigar si se desea tener una imagen completa o por lo menos libre de un buen número de dificultades teóricas y conceptuales donde se involucren el mayor número posible de observaciones del universo físico.

Cabe mencionar ahora que dentro de estos nuevos esquemas teóricos, ha surgido uno llamado cosmología de membranas, cuyo origen se encuentra en la teoría de cuerdas basada en altas dimensiones, en la cual el hecho fundamental es la introducción de una dimensión espacial adicional no compacta, la cual ofrece la posibilidad de ampliar los grados de libertad gravitacionales y donde se puede considerar el universos observable como una membrana o hipersuperficie[1] [2] [3].

Debido a la gran cantidad de observaciones con las que se cuenta en la actualidad, se ha mostrando que muchas de ellas no se ajustan a los esquemas convencionales, por lo cual se hace necesario profundizar e indagar el alcance de los planteamientos existentes, como el de considerar nuevos elementos fundamentales que permitan hacer mejores desarrollos y predicciones sobre la verdadera dinámica y estructura del Universo. El propósito de este trabajo consiste en obtener los valores, regiones de confianza, diagrama de Hubble o gráficas de buen ajuste para datos de SN Ia en particular el conjunto de Riess, todo ello en consideración del modelo de membranas o braneworld y bajo la consideración de la técnica de máxima verosimilitud (*maximum likelihood*)[4].

2 Modelo de Randall-Sundrum

El éxito experimental de la ley inversa del cuadrado y de la Teoría General de la Relatividad, es que parecen implicar cuatro dimensiones espacio-temporales no compactas, de este modo, las dimensiones adicionales sólo pueden ser aceptadas si ellas son compactas y suficientemente pequeñas para ser consistentes con las pruebas gravitacionales corrientes, además bajo este orden de ideas se encuentra que la escala de Planck se relaciona con la escala gravitacional en altas dimensiones, mediante $M_{Pl}^2 = M^{2+n} V_n$, donde M_{Pl} es la masa de Planck y V_n es el volumen del espacio de dimensiones adicionales.

En el modelo de Randall-Sundrum se muestra que

lo establecido anteriormente se basa en las propiedades de una geometría factorizable, esto es, la métrica del subespacio-tiempo (3-brane) en el que vivimos no depende de las coordenadas en las dimensiones extras, ahora bién, si aceptamos una geometría factorizable y dejamos que la métrica general dependa de todas las coordenadas podemos conseguir dimensiones extras no compactas en plena concordancia con los experimentos realizados para la gravedad, también se puede conseguir una nueva relación para la escala de Planck en la que ésta no dependa del tamaño de las dimensiones extras sino de la curvatura de las dimensiones adicionales. De este modo, se muestra que la masa de Planck esta determinada por la curvatura de las altas dimensiones más que por el tamaño de las dimensiones extras.

Para lograr las condiciones anteriores, requerimos constuir una teoría básica con dos 3-brane, planas, una de ellas con tensión positiva, la otra con tensión negativa y juntas sumergidas en un espaciotiempo AdS_5 , para ello se propone la siguiente acción[2] [3]

$$S = S_{bulk} + S_{brane} + S_{brane'} , \quad (1)$$

$$S_{bulk} = \int d^4x \int dy \sqrt{-g_{mn}} [-\Lambda + 2M^3 R] , \quad (2)$$

$$S_{brane} = \int d^4x \sqrt{-g_b} [V_b + \mathcal{L}_b] , \quad (3)$$

$$S_{brane'} = \int d^4x \sqrt{-g_{b'}} [V_{b'} + \mathcal{L}_{b'}] , \quad (4)$$

donde R es el escalar de Ricci 5D, g_{mn} , Λ , V_{brane} son el tensor métrico en cinco-dimensiones, la constante cosmológica en el volumen y la energía del vacío en la brane respectivamente, \mathcal{L}_b describe todos los campos de materia en la brane visible. A fin de obtener una solución de la ecuación de campo, se considera la siguiente métrica

$$ds^2 = e^{-2K|y|} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2 . \quad (5)$$

Considerando el orbifold S^1/Z_2 en el espacio AdS_5 , el cual tiene dos puntos fijos en los cuales ubicamos cada una de las branes, por lo tanto podemos considerar que la coordenada de la dimensión adicional está acotada por $0 \leq y \leq \pi r_c$ donde r_c es esencialmente

un radio de compactificación, que permite modular la distancia interbrane, de tal modo que la solución se mantiene sólo cuando la frontera y los términos cosmológicos volumétricos se relacionan por

$$V_b = -V_{b'} = 24M^3k, \quad \Lambda = -24M^3k^2, \quad (6)$$

esto corresponde con la condición de ajuste fino del modo de Randall-Sundrum. El factor exponencial es llamado factor de curvatura y significa que el volumen del espacio 5D llega a ser pequeño cuando y sea grande. En su primer artículo Randall y Sundrum mostraron que la jerarquía entre la escala fundamental de TeV y la aparente escala de Plank de $10^{19}GeV$, puede ser explicada por el factor de curvatura, aun si el tamaño de la dimensión extra es relativamente pequeña (distancia entre branes). En su segundo artículo mostraron que si no existía una segunda brane, y la dimensión extra se extendía al infinito, la gravedad permanece efectivamente localizada sobre la única brane, ya que el volumen integrado permanece finito cuando $y \rightarrow \infty$, entonces, llevando la métrica anterior a la ecuación de campo, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$6K^2 = -\kappa^2\Lambda, \quad 3K' = \kappa^2\lambda\delta(y), \quad (7)$$

solucionando la primera ecuación se obtiene la solución

$$K(y) = \sqrt[2]{-\frac{\kappa^2\Lambda}{6}}y \equiv k|y|, \quad (8)$$

lo cual nos dice que Λ debe ser negativo, ahora bien, si se integra la segunda ecuación desde $-\varepsilon$ a $+\varepsilon$ y tomando el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ (ε es un parámetro superfluo), en consideración de la simetría Z_2 , encontramos $6K' = \kappa^2\lambda$, lo cual junto a $K(y) = k|y|$ conduce a que $\Lambda = -\frac{\kappa^2\lambda^2}{6}$, que es la expresión del ajuste-fino entre la tensión de la brane y la constante cosmológica volumétrica, y es la condición que mediante un ajuste adecuado permite obtener la solución RS estática. Entonces, se ha obtenido la forma que debe tener el factor de curvatura que tiene como consecuencia que cualquier escala de energía E en una teoría 5D quede localizada sobre la brane de tensión negativa correspondiente a una escala física 4D dada por $aE = e^{-kd}E$, con $d = |y_+ - y_-|$.

En esta parte se muestra un análisis covariante para el modelo RSII, donde se obtiene la ecuación de campo

efectiva sobre una membrana, se asumirá la simetría Z_2 y se confinará el tensor momentum-energía de materia-energía sobre la brane. En el escenario braneworld la 3 -brane $(M, e_{\mu\nu})$ contiene el universo físico observable sumergido en un espaciotiempo de cinco dimensiones *bulk* (V, g_{uv}) , se denota el vector normal unitario a la brane M por n^α , y el vector tangente a curvas contenidas en la 3-brane por $e_\alpha^a = \left(\frac{\partial x^a}{\partial x^\alpha}\right)$, la métrica inducida sobre M por $e_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - n_\mu n_\nu$. Para dar inicio al desarrollo formal del anterior esquema se considera la ecuación de Gauss

$$R_{uvps}e_\alpha^u e_\beta^v e_\gamma^p e_\delta^s = R_{\alpha\beta\gamma\delta} + K_{\alpha\gamma}K_{\beta\delta} - K_{\alpha\delta}K_{\beta\gamma}, \quad (9)$$

y para hacer las consideraciones dinámicas del modelo se hace uso de la ecuación de Codazzi

$$R_{ab}n^b e_\alpha^a = \partial_\nu K_\alpha^\nu - \partial_\alpha K, \quad (10)$$

realizando un proceso algebraico de contracción de índices se obtiene

$$R_{\beta\delta} = R_{vps}^u e_u^p e_\beta^v e_\delta^s + KK_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha}, \quad (11)$$

considerando la métrica inducida, sobre la hipersuperficie, se puede obtener $e_u^p = g_u^p - n^p n_u$, donde se identifica e_u^p como la métrica inducida, para llegar a

$$R_{\beta\delta} = R_{vs}e_\beta^v e_\delta^s - R_{vps}^u n_u n^p e_\beta^v e_\delta^s + KK_{\beta\delta} - K_\delta^\alpha K_{\beta\alpha}. \quad (12)$$

Ahora, si tomamos el tensor de Einstein en cuatro dimensiones

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}e_{\alpha\beta}R, \quad (13)$$

que junto con la ecuación de Gauss contraída, se obtiene el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, obteniéndose la siguiente expresión para el tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= G_{ab}e_\alpha^a e_\beta^b + \frac{e_{\alpha\beta}}{2}R_v^u n_u n^v + \\ &KK_{\alpha\beta} - K_\beta^\delta K_{\alpha\delta} - \\ &\frac{e_{\alpha\beta}}{2}(K^2 - K^{\beta\delta}K_{\beta\delta}) - E'_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (14)$$

donde $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab}$, $E'_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\rho\nu\gamma}n_{\mu}n^{\nu}e_{\alpha}^{\rho}e_{\beta}^{\gamma}$.

Ahora bién, haciendo uso de la ecuación de campo de Einstein en cinco dimensiones

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \kappa^2 T_{ab}, \quad (15)$$

y descomponiendo el tensor de Riemann en el tensor de curvatura de Weyl, el tensor de Ricci y el escalar de curvatura, podemos obtener la siguiente expresión

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \frac{2\kappa^2}{3} \left[T_{ab}e_{\alpha}^a e_{\beta}^b + \left(T_{uv}n^u n^v - \frac{T}{4} \right) e_{\alpha\beta} \right] \\ &+ K K_{\alpha\beta} - K_{\beta}^{\delta} K_{\alpha\delta} - \\ &\frac{e_{\alpha\beta}}{2} (K^2 - K^{\beta\delta} K_{\beta\delta}) - E_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (16)$$

donde $E_{\alpha\beta} = C_{avb}^u n_u n^v e_{\alpha}^a e_{\beta}^b$. Ahora, involucrando la ecuación de Codazzi se encuentra

$$\partial^v K_v^u - \partial^u K = \kappa^2 T_{ab} n^b e_u^a. \quad (17)$$

Hasta el momento no se ha asumido ninguna simetría ni forma particular del tensor momentum-energía. Entonces, asumiendo, el escenario brane-world, tomamos por conveniencia una coordenada y adicional, de tal forma que la hipersuperficie $y = 0$ coincide con la 3-brane y además con la siguiente condición $n_u dx^u = dy$, lo cual implica que $a^u = n^v \partial_v n^u = 0$, que es una condición sobre la coordenada en la dirección de la dimensión extra.

Manteniendo el espíritu del brane-word en mente, tenemos que el tensor momentum-energía 5-dimensional, se puede escribir de la siguiente forma

$$T_{uv} = -\Lambda g_{uv} + (\tau_{uv} - \lambda h_{uv}) \delta(y), \quad (18)$$

donde, Λ es la constante cosmológica del espaciotiempo cinco-dimensional o volumétrico, λ es la energía del vacío de la brane, $\tau_{\mu\nu}$ es el tensor momentum-energía del universo sobre la brane. El parámetro λ se puede asociar con la tensión de la brane en 5-dimensiones.

En el marco del brane-word, el tensor momentum-energía, solamente se manifiesta sobre la brane, por ello su carácter singular, el cual se representa mediante la función delta que aparece en la expresión anterior, en consideración de lo anterior, se encuentra la condición

de frontera sobre la brane, que debe cumplir la métrica inducida y la curvatura extrínseca

$$[h_{\mu\nu}] = \text{Lim}_{y \rightarrow +0} e_{uv} - \text{Lim}_{y \rightarrow -0} e_{uv} = 0, \quad (19)$$

$$[K_{uv}] = -\kappa^2 \left((\tau_{uv} - \lambda e_{uv}) - \frac{1}{3} e_{uv} (\tau - \lambda) \right), \quad (20)$$

Imponiendo la simetría Z_2 , con la brane en un punto fijo, la simetría unicamente determina la curvatura extrínseca de la brane en términos del tensor momentum-energía

$$\begin{aligned} K_{uv}^+ &= -K_{uv}^- = -\frac{1}{2} \kappa^2 [(\tau_{uv} - \lambda e_{uv}) \\ &- \frac{1}{3} e_{uv} (\tau - \lambda)], \end{aligned} \quad (21)$$

sustituyendo esta ecuación en la expresión del tensor de Einstein, se obtiene la ecuación gravitacional 4D sobre la brane, y considerando la simetría Z_2 , la forma particular del tensor momentum-energía y las condiciones de frontera se llega a la ecuación de campo efectiva sobre la brane

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 e_{\alpha\beta} + 8\pi G_N \tau_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}, \quad (22)$$

$$\Pi_{\alpha\beta} = -\frac{1}{4} \tau_{\alpha\gamma} \tau_{\beta}^{\gamma} + \frac{1}{12} \tau \tau_{\alpha\beta} + \frac{1}{8} h_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} \tau^{\gamma\delta} - \frac{1}{24} e_{\alpha\beta} \tau^2, \quad (23)$$

$$\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa^2 \left(\Lambda + \frac{1}{6} \kappa^2 \lambda^2 \right), \quad G_N = \frac{\kappa^4 \lambda}{48\pi}, \quad (24)$$

La ecuación gravitacional de la brane describe la curvatura de ella en términos de su contenido de materia-energía, su energía de vacío, la constante cosmológica 5-dimensional, y de la curvatura extrínseca de la brane en el espacio 5-dimensional, este es el usual modelo de Brane-World Randall-Sundrum, desde el punto de vista covariante de las ecuaciones de campo. La anterior relación se puede reducir a la descripción estándar tomando el límite $\kappa \rightarrow 0$. Es importante notar que el hecho de haber introducido una dimensión adicional, nos conduce a una ecuación de campo modificada, en la cual aparecen dos términos adicionales,

conocidos en la literatura como, el término de energía del vacío y el término de radiación oscura[4].

Para la condición de conservación de la energía tenemos $\partial^\nu T_{uv} = 0$, cuando tengamos campos escalares u otra clase de campos en el volumen, la afirmación anterior en general no es cierta, es decir que T_{uv} no se conserva, produciéndose un intercambio de energía-momentum entre la brane y el volumen. En el caso de que exista sólo una constante cosmológica en el volumen, no se daría tal intercambio de energía, Considerando la anterior expresión, encontramos que la identidad de Bianchi contraída $\partial^\nu G_{uv} = 0$, conduce nuevamente a que la proyección del tensor de Weyl, obedece la restricción $\partial^\nu E_{\mu\nu} = \frac{6\kappa^2}{\lambda} \partial^\nu \Pi_{\mu\nu}$, esto muestra que $E_{\mu\nu}$, se comporta como una fuente del tensor momentum-energía volumétrico.

3 Ecuación de Friedmann modificada

En cosmología las ecuaciones que permiten una interpretación y asociación directa con los parámetros observables, son las ecuaciones de Friedmann, de tal forma que en el marco del brane-world, debe ser posible obtener tales ecuaciones, las cuales nos permitan modelar e interpretar fenómenos y parámetros del universo observable. Tomando en consideración la isotropía y homogeneidad de nuestro universo, requerimos que (M^5, g_{ab}) contenga un subespacio 3-dimensional de máxima simetría $(V, \gamma_{\alpha\beta})$, es decir un espacio esférico, de tal forma que se puedan obtener soluciones cosmológicas, para lo cual se formula el siguiente *ansatz*¹

$$ds_5^2 = -n^2(t, y)dt^2 + a^2(t, y)\gamma_{ij}dx^i dx^j + b^2(t, y)dy^2, \quad (25)$$

donde, se ha dicho anteriormente y es la dimensión extra, sin especificar cuando es compacta o extensa. Además, si nuestro universo es la hipersuperficie en $y = 0$, el factor de escala es dado simplemente por $a(t, y = 0)$, además, como fue mencionado, en el modelo RS esta métrica no es factorizable.

¹Este *ansatz* corresponde al mismo que se consideró en el modelo Randall-Sundrum, y como ya se mencionó anteriormente permite obtener soluciones cosmológicas coherentes con el modelo estándar de la cosmología.

De la ecuación de Einstein 4D, inducida sobre la brane $G_{\alpha\beta} = -\Lambda_4 e_{\alpha\beta} + 8\pi G_N T_{\alpha\beta} + \kappa^4 \Pi_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}$, donde $\Pi_{\alpha\beta}$ se relaciona con el tensor momentum-energía, y $E_{\alpha\beta}$ es la corrección que aparece del tensor de Weyl en el volumen, el cual introduce una densidad de energía no local U , la cual surge del campo gravitacional en el volumen y en consideración del modelo Randall-Sundrum, con una brane localizada en $y = 0$, conduce a un formalismo en el cual se pueden obtener cantidades observables. Para determinar la ecuación de Friedmann se procede según lo anterior y considerando una métrica reparametrizada

$$ds^2 = -e^{2\beta(y,t)}dt^2 + e^{2\alpha(y,t)}dy^2 + e^{2\alpha(y,t)}\gamma_{ij}dx^i dx^j, \quad (26)$$

La métrica sólo depende de t, y y es esférica en el espacio 3D. Por simplicidad también se restringe α, β al caso de funciones pares de y , para esta métrica las componentes no-cero del tensor de Einstein son

$$G_{00} = 3 \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha'' - 2\alpha'^2 + \alpha'\beta' \right], \quad (27)$$

$$G_{ij} = \delta_{ij}e^{2(\alpha-\beta)}[-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 - \ddot{\beta} + 2\alpha'' + 3\alpha'^2 + \beta''], \quad (28)$$

$$G_{44} = 3 \left[-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' \right], \quad (29)$$

$$G_{04} = 3 \left[\beta'\dot{\alpha} + \alpha'\dot{\beta} - \dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' \right]. \quad (30)$$

Assumiendo que α, β son funciones suaves de $|y|, t$, puede considerarse $\alpha(y, t) = \hat{\alpha}(|y|, t)$ y $\beta(y, t) = \hat{\beta}(|y|, t)$, las cuales son funciones suaves en una vecindad de $|y|$, de tal forma que se puede demostrar y obtener los siguientes resultados

$$\alpha_1(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \alpha(y, t)}{\partial y} = \left[\frac{\partial \hat{\alpha}(|y|, t)}{\partial |y|} \right]_{|y|=0}, \quad (31)$$

$$\beta_1(t) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{\partial \beta(y, t)}{\partial y} = \left[\frac{\partial \widehat{\beta}(|y|, t)}{\partial |y|} \right]_{|y|=0}, \quad (32)$$

por lo tanto sustituyendo en $G_{00}, G_{04}, G_{ij}, G_{44}$, e introduciendo adecuadamente el tensor momentum-energía con la siguiente forma

$$T_{\beta}^{\alpha} = \text{diag}[(-\rho, p, p, p, 0)e^{-\beta}\delta(y) + (\Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B, \Lambda_B)], \quad (33)$$

donde ρ y p es la densidad de energía y presión de materia sobre la brane, Λ_B es la constante cosmológica volumétrica.

De tal forma que se puede encontrar una serie de ecuaciones que definen el acople dinámico entre los grados de libertad de la brane y el volumen.

Para $y = 0$, es decir sobre la brane, tenemos

$$\alpha_1 = -\frac{\kappa^2 \rho}{6} e^{\beta(0, t)}, \quad (34)$$

$$\beta_1 = \frac{\kappa^2 (2\rho + 3p)}{6} e^{\beta(0, t)}, \quad (35)$$

En el caso de $y > 0$, es decir en el volumen o espacio 5D, se obtiene el sistema de ecuaciones

$$\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} - \alpha'' - 2\alpha'^2 + \alpha'\beta' = -\frac{\kappa^2}{3}\Lambda_B e^{2\beta}, \quad (36)$$

$$-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 - \ddot{\beta} + 2\alpha'' + 3\alpha'^2 + \beta'' = \kappa^2 \Lambda_B e^{2\beta}, \quad (37)$$

$$-\ddot{\alpha} - 2\dot{\alpha}^2 + \dot{\alpha}\dot{\beta} + \alpha'^2 + \alpha'\beta' = \frac{\kappa^2}{3}\Lambda_B e^{2\beta}, \quad (38)$$

$$\beta'\dot{\alpha} + \alpha'\dot{\beta} - \dot{\alpha}' - \dot{\alpha}\alpha' = 0. \quad (39)$$

Debido a la consideración de suavidad de las funciones α, β , se puede realizar una expansión en serie de potencias de las mismas y haciendo uso del sistema acoplado, se logra determinar, a orden cero, la siguiente ecuación diferencial

$$-\ddot{\alpha}_0 - 2\dot{\alpha}_0^2 + \dot{\alpha}_0\dot{\beta}_0 = \left(\frac{1}{3}\kappa^2 \Lambda_B + \frac{1}{36}\kappa^2 (\rho + 3p)\rho \right) e^{2\beta_0}, \quad (40)$$

definiendo una nueva variable temporal \widehat{t} , dada por $d\widehat{t} = e^{\beta_0} dt$, la cual representa el tiempo propio cosmológico convencional, esto es el tiempo propio medido por observadores comóviles sobre la brane, se obtiene la ecuación

$$-\frac{d^2 \alpha_0}{d\widehat{t}^2} - 2 \left(\frac{d\alpha_0}{d\widehat{t}} \right)^2 = \frac{\kappa^2 \Lambda_B}{3} + \frac{\kappa^4 \rho (\rho + 3p)}{36}, \quad (41)$$

ahora bién, si se asume que la densidad de energía y la presión del universo estan dadas por $\rho = \lambda + \rho_m$, $p = -\lambda + p_m$, donde λ es la energía del vacío o tensión sobre la brane, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} & -\frac{d^2 \alpha_0}{d\widehat{t}^2} - 2 \left(\frac{d\alpha_0}{d\widehat{t}} \right)^2 \\ &= \frac{\kappa^2 \Lambda_B}{3} - \frac{\kappa^4 \lambda^2}{18} + \\ & \quad \frac{\kappa^4 \lambda (3p_m - \rho_m)}{36} + \frac{\kappa^4 \rho_m (\rho_m + 3p_m)}{36}, \end{aligned} \quad (42)$$

con lo cual se puede determinar una ecuación para H^2 , definida por $H^2 = \left(\frac{d\alpha_0}{d\widehat{t}} \right)^2$, por lo tanto se puede encontrar la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} & \frac{d[H^2 e^{4\alpha_0}]}{d\alpha_0} \\ &= e^{4\alpha_0} \left[\frac{\kappa^4 \lambda^2}{9} - \frac{2\kappa^2 \Lambda_B}{3} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\kappa^4 \lambda (\rho_m - 3p_m)}{18} + \frac{\kappa^4 \rho_m (\rho_m + 3p_m)}{18} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

La ecuación anterior representa una ecuación lineal a primer orden para H^2 , si se considera el lado derecho como un término fuente que es una función de α_0 . Para solucionar la ecuación anterior, se reescribe la ecuación de conservación de energía, como $\frac{d\rho_m}{d\alpha_0} + 3(\rho_m + p_m) = 0$, lo cual implica

$p_m = -\rho_m - \frac{1}{3} \frac{d\rho_m}{d\alpha_0}$, sustituyendo este resultado en la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} & \frac{d[H^2 e^{4\alpha_0}]}{d\alpha_0} \\ &= e^{4\alpha_0} \left[\frac{\kappa^4 \lambda^2}{9} - \frac{2\kappa^2 \Lambda_B}{3} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\kappa^2 \lambda}{18} \left(4\rho_m + \frac{d\rho_m}{d\alpha_0} \right) + \frac{\kappa^4}{36} \left(4\rho_m^2 + \frac{d\rho_m^2}{d\alpha_0} \right) \right], \end{aligned} \quad (44)$$

expresión que nos conduce a la ecuación de Friedmann modificada

$$H^2 = \frac{\kappa^4 \lambda^2}{36} - \frac{\kappa^2 \Lambda_B}{6} + \frac{\kappa^4 \lambda \rho_m}{18} + \frac{\kappa^4 \rho_m^2}{36} + K e^{-4\alpha_0}, \quad (45)$$

donde K es una constante de integración que puede ser positiva o negativa. En una brana la ecuación para H^2 tiene una estructura diferente por tres razones. Primero existen dos términos adicionales que resultan de la tensión en la brana y de la constante cosmológica negativa en el volumen. Segundo, en adición al término normal proporcional a ρ_m existe un término proporcional a ρ_m^2 , llegando a ser despreciable si $\rho_m \ll \lambda$. Tercero, el término $K e^{-4\alpha_0}$ que surge solamente de condiciones iniciales, muestra un nuevo hecho cualitativamente distinto del escenario RS, ya que como consecuencia de la reducción de $5D$ a $4D$, la ecuación para H^2 puede determinarse libremente en algún tiempo inicial.

Ahora bien, si se consideran las relaciones entre las constantes físicas involucradas, se obtiene una forma más natural para la ecuación de Friedmann modificada, tales relaciones son $\kappa^2 \lambda^2 = 6\Lambda_B$, $\kappa^2 \lambda = 48\pi G$, $\kappa_4^2 = 8\pi G$, $\Lambda_4 = \frac{1}{2} \kappa^2 (\Lambda_B + \frac{1}{6} \kappa^2 \lambda^2)$, $U = \frac{1}{12} \kappa_4^4 \lambda^3$, con lo cual se puede escribir la siguiente expresión para la ecuación de Friedmann modificada[5]

$$H^2 = \frac{\kappa_4^2}{3} \rho_m + \frac{\kappa_4^2}{6\lambda} \rho_m^2 - \frac{k}{R^2} + \frac{\Lambda_4}{3} + \frac{2U}{\lambda \kappa_4^2}. \quad (46)$$

Se puede observar en esta expresión que si el término cuadrático en la densidad de energía y el término correspondiente a radiación oscura se hacen cero, lo cual se puede hacer en un límite adecuado, se recupera la expresión estándar para la ecuación de Friedmann.

4 Relación magnitud-redshift

En el presente existen dos métodos prácticos de determinar la distancia de un objeto lejano. Si conocemos su luminosidad absoluta, podemos comparar esta con su luminosidad aparente observada; o si conocemos su diámetro verdadero, podemos comparar este al diámetro angular observado; ahora, si el cuerpo se encuentra bastante cerca, su distancia se puede determinar mediante el paralaje astronómico, que consisten en el corrimiento de la posición aparente en el cielo causado por la revolución de la tierra alrededor del sol; o si se conoce su movimiento propio, el corrimiento en la posición aparente en el cielo causada por el movimiento real de objetos relativo al Sol. Las distancias determinadas por estos métodos, son idénticas para objetos cercanos, alrededor de 10^9 yr l , más allá de este rango, las mediciones difieren entre ellos[6].

En el caso de un universo membrana tenemos en consideración de la ecuación de Friedmann modificada, expresiones generales que permiten conocer la relación corrimiento al rojo-magnitud

$$m(z) = 5 \log[D(z)] + \mathbf{M}, \quad (47)$$

donde $D(z) = H_0 D_L(z)$ es la distancia de luminosidad sin dimensiones, $\mathbf{M} = M - 5 \log H_0 + 25$, H_0 constante de Hubble presente, $m(z)$ magnitud aparente. En el caso de universos homogéneos e isotrópicos, se tiene la siguiente expresión

$$D(z) = \frac{(1+z)}{\sqrt[2]{\varkappa}} S_\kappa[\chi(z)], \quad (48)$$

donde la función S_κ queda definida según la curvatura del espaciotiempo

$$S[\chi(z)] = \text{sen} \chi(z) \quad ; \quad \varkappa = -\Omega_{k0}, \quad (49)$$

$$S[\chi(z)] = \chi(z) \quad ; \quad \varkappa = 1, \quad (50)$$

$$S[\chi(z)] = \text{senh} \chi(z); \quad \varkappa = \Omega_{k0}, \quad (51)$$

aquí la función² $\chi(z)$ es la función de distancia coordenada comóvil. La ecuación de Friedmann satisface la métrica FRW, por lo tanto se tiene

²Está función corresponde a la coordenada radial comóvil, sólo que por algunas razones se utiliza esta notación.

$$\chi(z) = \frac{1}{R_0 H_0} \int_0^z [f_\gamma(z)]^{-1/2} dz, \quad (52)$$

con la función $f_\gamma(z)$ definida de la siguiente forma

$$f_\gamma(z) = \{\Omega_{\lambda 0}(1+z)^{6\gamma} + \Omega_{GR0}(1+z)^{3\gamma} + \Omega_{k0}(1+z)^6 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}\}, \quad (53)$$

expresión en la cual se puede introducir la restricción $\Omega_{U0} = 1 - \Omega_{GR0} - \Omega_{\lambda 0} - \Omega_{\Lambda 0} - \Omega_{k0}$ y en la cuál γ es el índice barotrópico el cual permite introducir los diferentes contenidos del universo.

De tal forma que en el caso de una membrana plana $\Omega_{k0} = 0$, con materia no relativista $\gamma = 1$, se obtiene

$$\chi(z) = \frac{1}{R_0 H_0} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz, \quad (54)$$

y la función de distancia de luminosidad adimensional se encuentra que es

$$D(z) = \frac{(1+z)}{R_0 H_0} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz, \quad (55)$$

lo cual permite expresar la relación corrimiento al rojo-magnitud, en el caso de una brane plana

$$m(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{H_0} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz + \mathbf{M}. \quad (56)$$

Para el caso de un universo brane tipo esférico $\Omega_{k0} > 0$, la relación para la magnitud aparente se puede expresar como

$$m(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt[2]{\Omega_{k0}}} \operatorname{senh}[\sqrt[2]{\Omega_{k0}} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz] + \mathbf{M}, \quad (57)$$

y para el caso de un brane tipo hiperbólico $\Omega_{k0} < 0$,

$$m(z) = 5 \log \frac{(1+z)}{\sqrt[2]{\Omega_{k0}}} \operatorname{senh}[\sqrt[2]{\Omega_{k0}} \int_0^z [\Omega_{\lambda 0}(1+z)^6 + \Omega_{GR0}(1+z)^3 + \Omega_{U0}(1+z)^4 + \Omega_{k0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda 0}]^{-1/2} dz] + \mathbf{M}. \quad (58)$$

Con la ayuda de las anteriores relaciones se pueden determinar los diferentes parámetros y curvas cosmológicas relevantes.

5 Restricciones del modelo braneworld bajo Supernovas tipo Ia

En los últimos tiempos las observaciones de Supernovas tipo Ia, han revolucionado los conceptos y modelos cosmológicos, uno de los mayores descubrimientos es el de haber encontrado la expansión acelerada del Universo[11]. El método formal para incorporar datos observacionales a un modelo cosmológico, o de restringir un modelo cosmológico bajo cierto tipo de observaciones, en particular las observaciones de SN Ia, consiste en el desarrollo de la técnica de máxima verosimilitud[4] [8], en la cual se implementa el estadístico chi-cuadrado para construir la función de verosimilitud, y mediante un proceso de minimización y de obtención de los contornos de nivel de este estadístico se obtiene, el valor óptimo de los parámetros del modelo, los niveles o regiones de confianza para cada parámetro y la curva de mejor ajuste o diagrama de Hubble para los datos observacionales, entre otros. Por lo tanto, la función central a estudiar es

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[\frac{m_{obs}(z_i) - m_{teo}(z_i)}{\sigma_i(z_i)} \right]^2, \quad (59)$$

donde m_{obs} es la magnitud aparente observada, m_{teo} es la magnitud aparente teórica o esperada, σ_i es la desviación estándar de las observaciones y en la cual la suma se realiza hasta el total de datos disponibles. La magnitud aparente teórica corresponde a la obtenida anteriormente, y el conjunto de datos que se consideró corresponde a la muestra de 157 SN Ia reunidas por A. G. Riess[11], los valores óptimos de los parámetros que

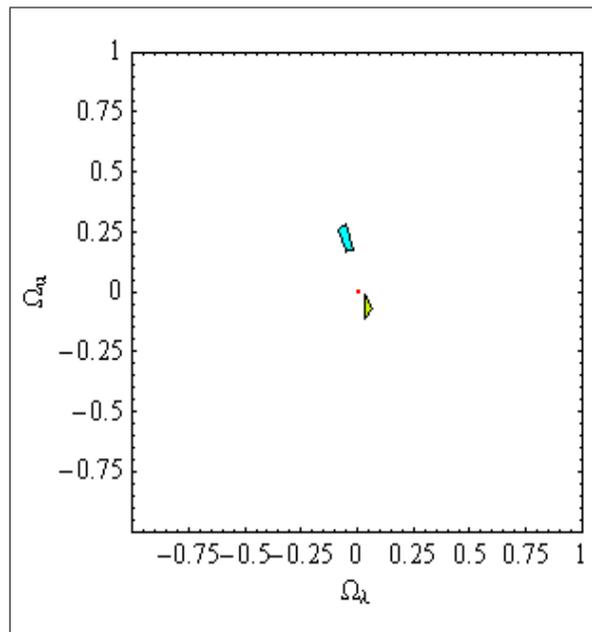
minimizan la función anterior, se pueden encontrar con ayuda de la función *FinMinimum* del software *Mathematica*, igualmente para construir los contornos de esta función, basta con considerar el valor mínimo de la función más un valor apropiado obtenido de la distribución chi-cuadrado, para la probabilidad o nivel de confianza que se desee, esto se puede hacer porque la función considerada es aleatoria en el sentido que depende de un conjunto de datos aleatorios, lo cual permite obtener las regiones de confianza con el nivel que se quiera, por ejemplo 68% que indica que este porcentaje de los datos esta contemplado en la región de confianza, o en algunos casos se prefiere el 95% de los datos contemplados en la región de confianza[4]. Es importante mencionar que las medidas de las supernovas vienen con errores Gaussianos no correlacionados y en este caso la función de verosimilitud \mathcal{L} puede ser determinada del estadístico chi-cuadrado mediante $\mathcal{L} \propto \exp(-\chi^2/2)$. En el desarrollo de este trabajo se ha escrito un programa en mathematica V4.0.

6 Resultados

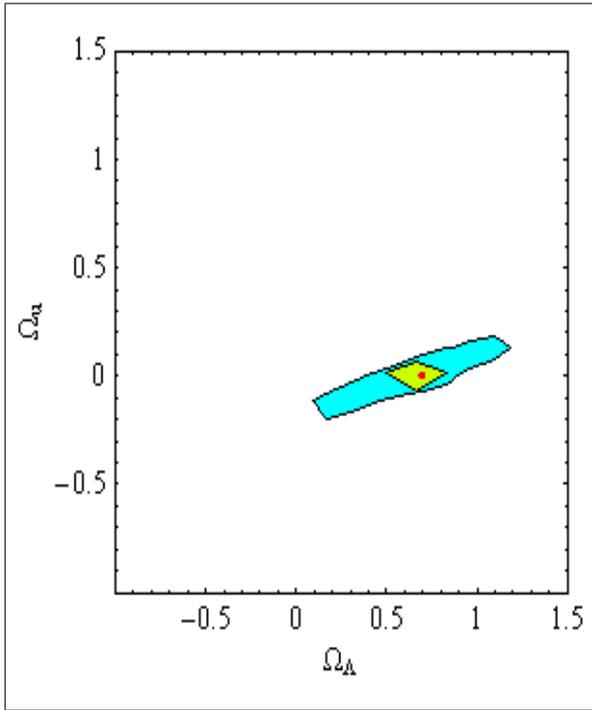
Aplicando la técnica de máxima verosimilitud y los datos de supornovas Ia correspondientes al conjunto de datos de Riess, se determinan los valores posibles para los párametros del modelo, encontrando para el modelo brane world con materia no relativista (es decir se hace $\gamma = 1$) los siguientes valores para los parámetros, sus regiones de confianza las cuales indican los posibles valores que puede tomar un parámetro o un par de ellos y además se muestra la gráfica de mejor ajuste y la curva para el párametro de desaceleración[10]

χ^2	Ω_m	Ω_Λ	Ω_λ	Ω_U	Ω_k
182.531	0.275	0.700	0.010	0.001	-0.028

Table 1: Tabla con los respectivos valores obtenidos de la rutina de máxima verosimilitud, se ha obtenido un valor de chi-cuadrado pequeño que muestra la bondad del ajuste, como también los respectivos valores mínimos de los parámetros del modelo.

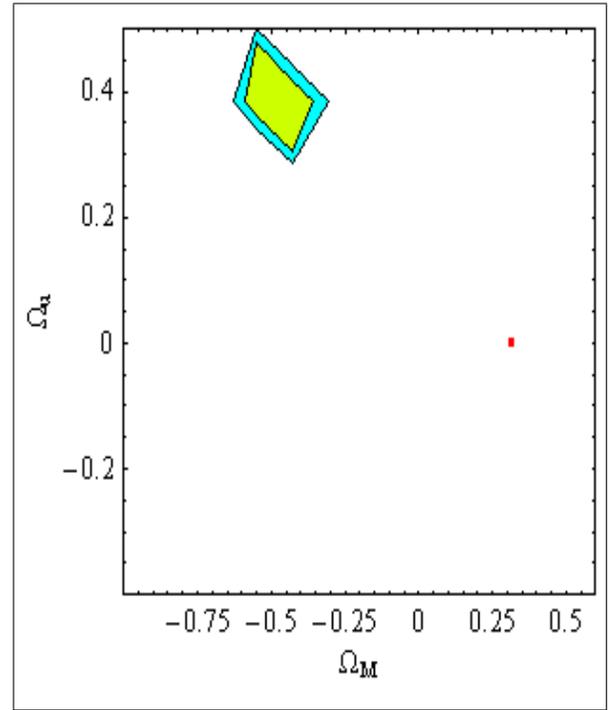


Contornos de nivel para los parámetros de radiación oscura vs tensión de la membrana, el contorno color verde corresponde a un nivel de 68% y el contorno color cian corresponde a un nivel de 95% de confianza, no se observa superposición de ellos, ya que la función es bastante irregular en este par de parámetros, el punto rojo indica el valor mínimo para estos parámetros, y no necesariamente los contornos se ubican justo encima del valor mínimo de la función.

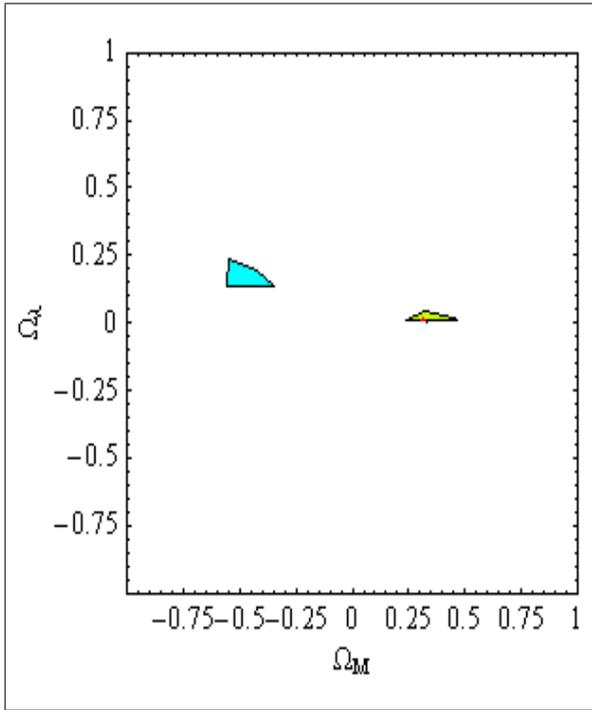


Regiones de confianza del 68% región pequeña y del 95% región mayor para los parámetros de densidad de radiación oscura y densidad de constante cosmológica.

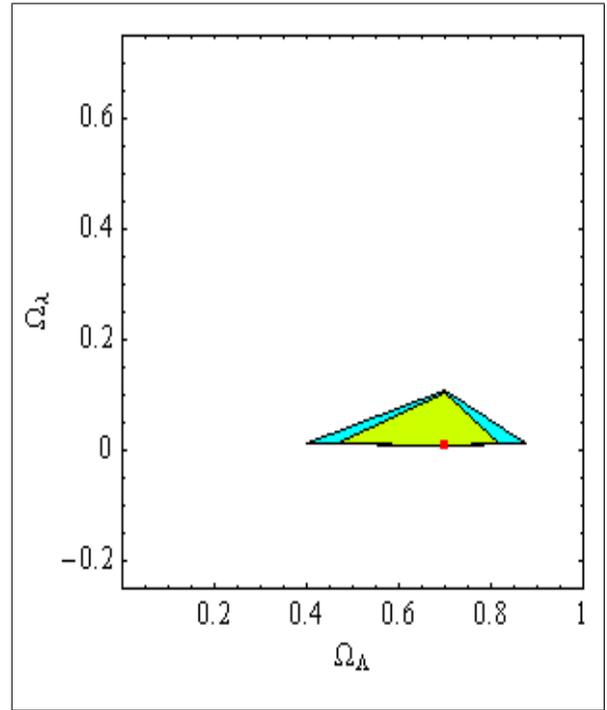
Se observa claramente las regiones de confianza, permite determinar los posibles valores de los parámetros en consideración. En este caso el valor mínimo para los parámetros queda dentro de la región de confianza. Quiere decir esto que la función de verosimilitud o directamente la función chi-cuadrado es bastante regular en este conjunto de parámetros.



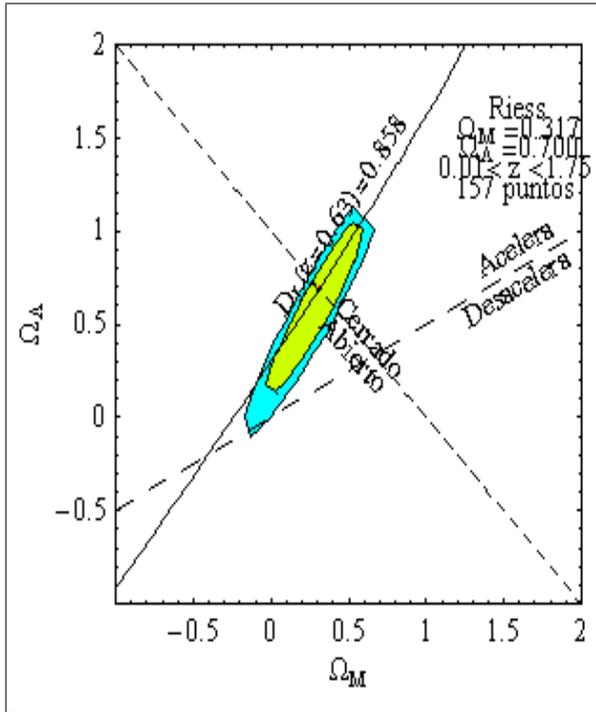
Regiones de confianza del 68% y 95% para los parámetros de densidad de radiación oscura y densidad de tensión. Los contornos pequeños corresponde al 68% de confianza y los mayores al 95% de confianza. Los contornos de confianza permiten observar los posibles valores, es decir el rango de valores, de los parámetros adicionales con cierto grado de probabilidad. Aquí, se observa que el valor mínimo no queda incluido dentro de la región de confianza, puede entenderse esto debido que se está obteniendo los contornos de nivel de una función que no necesariamente van a ubicarse sobre el punto o valor mínimo de la función.



Regiones de confianza del 68% y 95% para los parámetros de densidad de densidad de tensión y densidad de materia. Las regiones de confianza aparecen divididas, ello es explicable debido a que la función que se está considerando es multivariada. Se observan contornos muy especiales e irregulares, esto hace pensar que la función chi-cuadrado multidimensional es muy irregular, pero se conserva el significado de región de confianza.

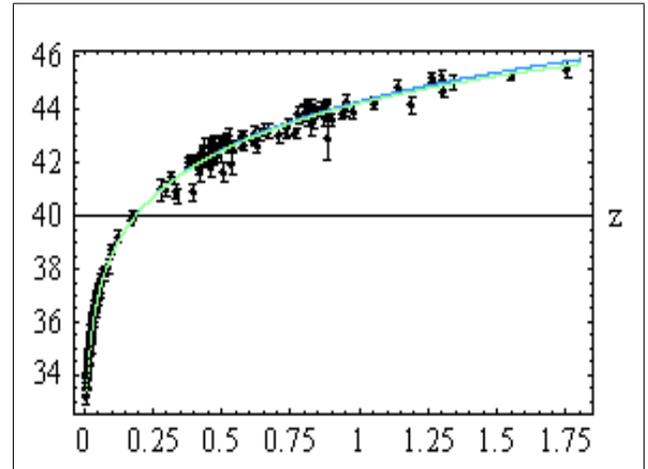


Regiones de confianza del 68% y 95% para los parámetros de densidad densidad de tensión y densidad de constante cosmológica. Igualmente se presentan regiones de confianza superpuestas lo que muestra esto es que la función chi-cuadrado presenta mayor regularidad, por lo cual cuando se obtienen las regiones de confianza parecen mejor definidas y con el valor mínimo de la función dentro de ellas. Igualmente se puede considerar como la mejor región de confianza la correspondiente a la región donde aparece el punto con los valores deducidos del proceso de minimización.

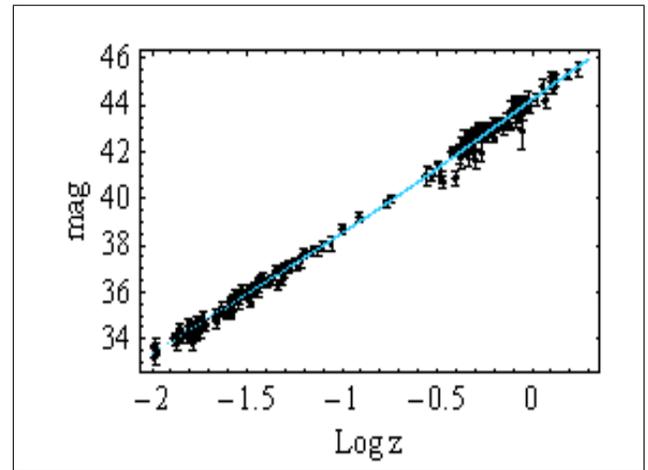


Esta gráfica corresponde al plano estándar, es decir son las regiones de confianza para los parámetros involucrados en el modelo estándar. Se predice un universo acelerado y plano. Igualmente se ha colocado la curva de distancia de luminosidad constante y los respectivos valores de los parámetros involucrados. La curva de luminosidad constante muestra los posibles valores de los parámetros que hacen que esta curva sea constante. En este caso la función es más regular y por ello se obtienen contornos más definidos.

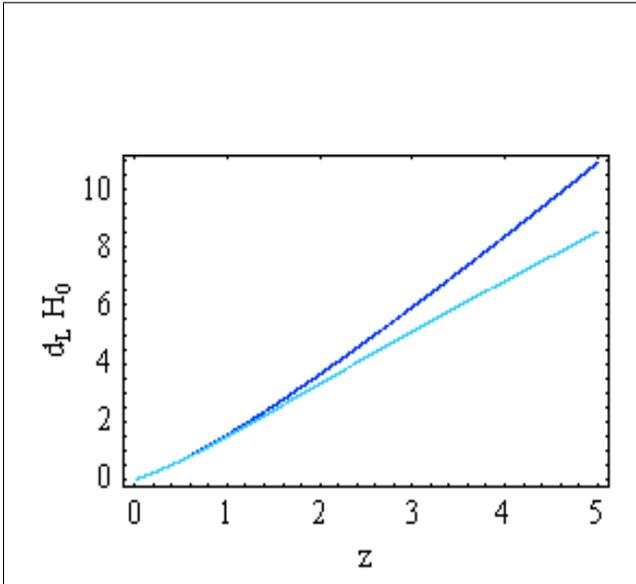
Una de las curvas que mejor muestra el comportamiento del modelo frente a los datos observacionales, es la curva de mejor ajuste o diagrama de Hubble para los datos observacionales de las supernovas bajo estudio. En esta curva se muestran los datos observacionales junto con las barras de error para cada dato, permite visualizar el ajuste de la curva teórica.



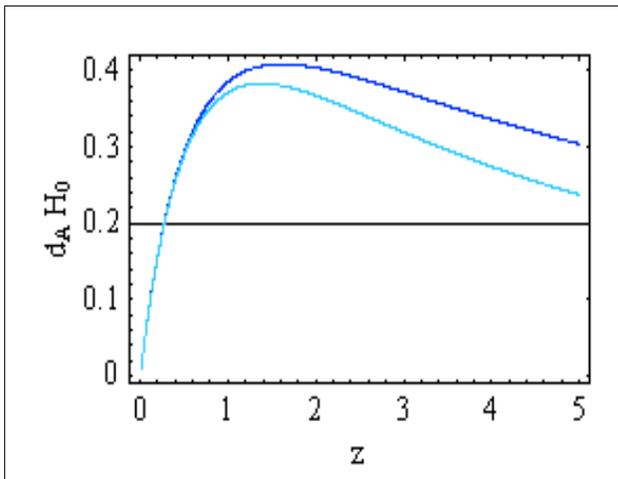
Gráfica magnitud-corrimiento al rojo. Se tienen los 157 datos del conjunto de SN Ia de Riess, junto con el ajuste teórico, obtenido mediante máxima verosimilitud, la curva azul para el modelo estándar y la curva verde para el modelo braneworld. Se observa que la curva para el modelo braneworld ajusta mejor el último dato, en tanto que la curva estándar queda sobre el margen de error.



Gráfica magnitud-log del corrimiento al rojo, para el modelo braneworld. La ligera curva hacia arriba en la zona de grandes distancias o grandes corrimientos al rojo indica que la expansión se está acelerando, esto está en acuerdo con los resultados del modelo estándar. Quiere decir esto que el modelo braneworld predice un universo plano y en expansión acelerada.



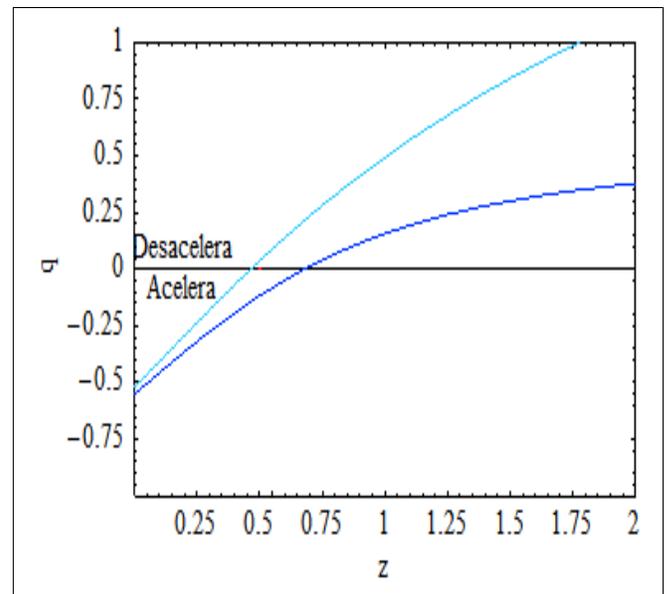
Gráfica distancia de luminosidad-corrimiento al rojo, se compara la curva obtenida para el modelo estándar azul y la curva obtenida para el modelo braneworld cian. Se ha considerado un margen mayor para el corrimiento al rojo $z=5$. Puede observarse que la predicción para el modelo braneworld conduce a distancias menores en un universo temprano.



Gráfica distancia diametral angular-corrimiento al rojo, se compara la curva obtenida para el modelo estándar azul y la curva obtenida para el modelo braneworld cian. Igual que en el caso anterior se ha

extendido el corrimiento al rojo $z=5$. Puede observarse que la predicción para el modelo braneworld conduce a distancias menores para un universo temprano.

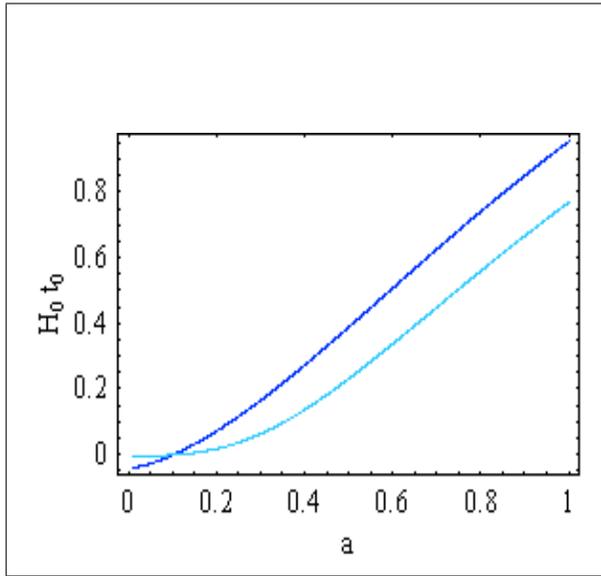
Se presenta además la gráfica para el parámetro de desaceleración en función del corrimiento al rojo, de ella puede determinarse el valor de desaceleración presente para el modelo estándar y el modelo braneworld, puede observarse que es bastante similar el valor que predicen



Gráficas comparativas del parámetro de desaceleración, la curva superior corresponde al modelo braneworld en tanto la otra corresponde al modelo estándar. Observe el valor predicho, en cada caso, para el cambio de fase desacelerada a acelerada.

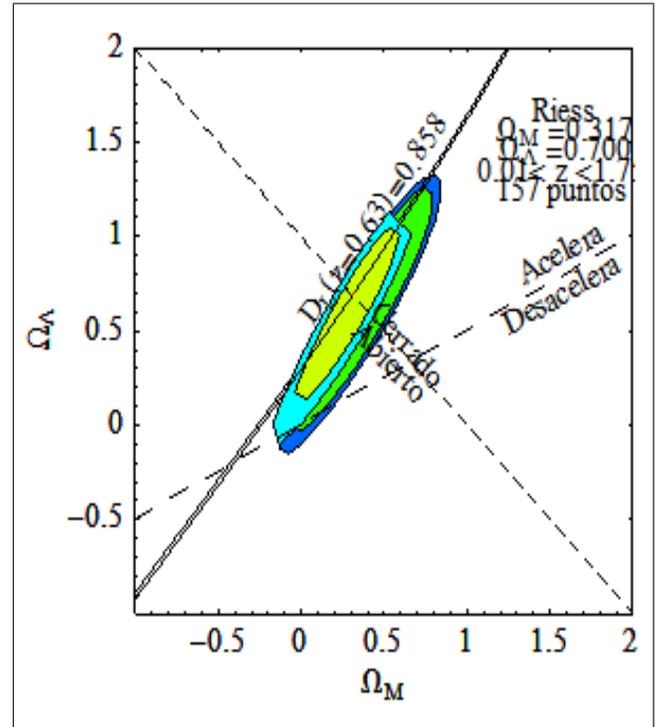
El punto rojo indica el valor aceptado observacionalmente[9].

Igualmente se puede obtener la edad del universo en el marco del modelo braneworld, encontrando que la edad predicha por este modelo es un poco menor que lo predicho por el modelo estándar, la grafica comparativa es la siguiente



Estas gráficas muestran la edad del universo, la gráfica superior corresponde al modelo estándar, y la inferior al modelo braneworld. Se observa que la edad predicha por el modelo braneworld es un poco menor que la encontrada por el modelo estándar.

Finalmente, como ya se ha dicho el plano $\Omega_M - \Omega_\Lambda$ es gran interés en la cosmología, la siguiente gráfica muestra la superposición de los contornos obtenidos para el modelo estándar y para el modelo braneworld.



Contornos de nivel obtenidos para el modelo estándar de la cosmología y el modelo braneworld. Se tienen contornos del 68% y del 98% de confianza. Los contornos azul y verde corresponden al modelo estándar y los contornos cian y amarillo corresponde al modelo braneworld. Se advierte que los contornos para el modelo braneworld son más pequeños que los del modelo estándar. Igualmente, se pueden apreciar las curvas de luminosidad constante, $z=0.63$ y su amplia coincidencia para los dos modelos, es decir que para pequeños corrimientos al rojo son bastante coincidentes los modelos.

7 Conclusiones

Según los resultados obtenidos anteriormente se pueden mencionar las siguientes conclusiones:

1. El modelo braneworld reproduce el modelo estándar, es decir el modelo braneworld desde este punto de vista no presenta contradicción con el modelo estándar, es decir, el modelo braneworld es reducible al modelo estándar.
2. Los valores obtenidos para los parámetros corres-

ponden con los valores de los parámetros estándar, al igual que como con los valores reportados para los nuevos parámetros del braneworld. Se han obtenido valores concordantes con el modelo estándar y se predice unos valores pequeños para los parámetros adicionales, es precisamente los valores de los nuevos parámetros los que podrían dar explicación de la fenomenología observada recientemente para el universo.

3. El diagrama de Hubble o curva de buen ajuste permite visualizar el ajuste obtenido con el modelo braneworld. Se observa que la curva ajusta dentro de los márgenes o barras de error de los datos observacionales. Igualmente, puede advertirse que la curva obtenida para el braneworld ajusta un poco mejor el dato para $z=1.75$, se tendría que corroborar con datos adicionales de mayor corrimiento al rojo.

4. Puede observarse que la gráfica correspondiente a la magnitud-log redshif, conduce a la expansión acelerada del universo, se observa que la curva se desvía ligeramente hacia arriba.

5. Se predice el valor de corrimiento al rojo para el cual se produjo el cambio de fase, de desacelerado a acelerado, observada en el universo. Este valor puede contrastarse con los valores obtenidos en otros modelos. Adicionalmente, se muestra que la curva de desaceleración para el modelo braneworld se acerca al valor aceptado observacionalmente un poco mejor que la predicción hecha por el modelo estándar.

6. El modelo braneworld predice o conduce a un universo acelerado y plano, según se observa en las gráficas. Nuevamente esto corresponde con la observación reciente y con los resultados obtenidos aquí para el plano $\Omega_M - \Omega_\Lambda$, como se muestra en la gráfica correspondiente.

7. El modelo braneworld predice una menor distancia de luminosidad para corrimientos al rojo cercanos a uno. Ello implica modificar la escala de distancias en el universo, pero se debe revisar esto bajo un mayor conjunto de datos con corrimiento al rojo mayor de uno.

8. Como se mencionó anteriormente, el modelo braneworld predice un universo más joven, ello es debido en principio a la dinámica diferente para el universo temprano. Este es uno de los inconvenientes que presenta el modelo, pero ello debe revisarse a la luz de la dinámica del universo temprano.

References

- [1] Martens, R., “Brane-World Gravity”, *Living Reviews in Relativity*, gr-qc/0101059
- [2] Randall, L., and Sundrum, R., “An Alternative to Compactification”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 4690-4693, (1999)
- [3] Randall, L., and Sundrum, R., “Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension”, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3370-3373, (1999).
- [4] Herman. J. Mosquera, Habit Dumet, Cristina Furlaneto, *Instituto de Cosmologia, Relatividade e Astrofísica (ICRA-BR)*, RJ Brazil, JCAP07(2008)004.
- [5] Maeda, K., Mizumo., and Torii, T ., “Effective Gravitational equations on a brane world with indeced gravity”, *Phys. Rev. D*, **68**, 024033-1-8, (2003)
- [6] Éanna, É., S. H. Henry, Tye., and Ira Wasserman, “Cosmological expansion in the Randall-Sundrum brane world scenari”, *Phys. Rev. D*, **62**, 044039, (2000)
- [7] Malcolm S. Longair, “Galaxie Formation”, Springer 1998
- [8] T. Padmanabhan, T. Roy Choudhury, *Ganeshkhind, Pune, India*, astro-ph/0212573v2, 2003.
- [9] T. Padmanabhan, *Dark Energy and Gravity*, IUCAA, Post Bag 4, Ganeshkhind, Pune - 411 007, India, 2007.
- [10] M. Szydlowski, M. P. Dabrowski, W. Godlowski, Astro-ph/0212100v2.
- [11] A. G. Riess et al., Ap. J. **560** (2001), 49; Ap. J. **577** (2002), 11.