RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 189 (091220)

Hallar la curvatura de las curvas planas siguientes en los puntos que se indican

a) $y = x^4 - 4x^3 + 18x^2 \quad \text{en} \quad (0,0)$

b) $x^2 + xy + y^2 = 3 \quad \text{en} \quad (1,1)$

RESOLUCIÓN:

a) $y = x^4 - 4x^3 + 18x^2$,

$y' = 4x^3 - 12x^2 + 36x$,

$y'' = 12x^2 - 24x + 36$

en $(0,0)$: $y'(0) = 0$, $y''(0) = +36$

curvatura:

$$K = \frac{y''}{\left(1 + y'^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{+36}{\left(1+0\right)^{\frac{3}{2}}} = +36$$

b) $x^2 + xy + y^2 = 3$,

$2x + y + xy' + 2yy' = 0$

en $(1,1)$: $2 + 1 + y' + 2y' = 0 \rightarrow y' = -\dfrac{2}{3}$

$2 + y' + y' + xy'' + 2y'^2 + 2yy'' = 0$

en $(1,1)$: $2 + 2y' + y'' + 2y'^2 + 2y'' = 0 \rightarrow 2 + 2\left(-\dfrac{2}{3}\right) + y'' + 2\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + 2y'' = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 - \dfrac{4}{3} + \dfrac{8}{9} + 3y'' = 0 \rightarrow y'' = -\dfrac{14}{27}$

curvatura:

$$K = \frac{y''}{\left(1 + \left(-2/3\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-14/27}{\left(13/9\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{14}{27\dfrac{13}{9}\sqrt{13/9}} = -\frac{14}{39\sqrt{13/9}}$$

PROBLEMA 188 (111120)

Sea E un espacio vectorial sobre R, de dimensión 3, y sea B={u1,u2,u3} una base de E. Si f es un endomorfismo de E que está representado en la base B por la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1- Hallar las ecuaciones paramétricas del núcleo de f y una base del mismo.

2- Hallar la relación que deben cumplir X, Y, Z, para que el vector Xu1+Yu2+Zu3 pertenezca a f(E).

RESOLUCIÓN:

1-: $\forall r \in \ker(f),\ r = xu1 + yu2 + zu3 \to f(r) = 0 \to a.r = 0$:

$$A.r=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=0 \to \begin{cases} x+2y-z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \\ x+9y-z=0 \end{cases}$$

Los rangos de la matriz de los coeficientes, A, y ampliada, D, son ambos igual a 2, por lo que el sistema es compatible indeterminado (Teorema de Rouché-Fröbenius). Suprimimos la tercer ecuación, pues es suma de la segunda mas tres veces la primera. El sistema queda así:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ -2x+3y+2z=0 \end{cases} \to \begin{matrix} x+2y=z \\ -2x+3y=-2z \end{matrix}$$

tomando la z como parámetro, se tiene:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \quad \text{(ecuaciones del núcleo)} \\ z=\lambda \end{cases}$$

El núcleo es, por tanto, una línea recta, por lo que $\dim \ker(f) = 1$. La base tiene, por tanto, un único vector. Haciendo $\lambda = 1$:

Base del núcleo: $\{(1,0,1)\}$

2-: Si $R = Xu1 + Yu2 + Zu3 \in f(E) \to \exists r = xu1 + yu2 + zu3 \in E \,/\, f(r) = R$:

Es decir:

$$A.r=R \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & 9 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

que da las ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y-z=X \\ -2x+3y+2z=Y \\ x+9y-z=Z \end{cases}$$

Si llamamos A a la matriz de los coeficientes y D a la matriz ampliada, se tiene que rango(A)=2, por lo que, para que tenga solución ha de ser rango(D)=2 también. Por lo que ha de ser nulo el determinante de cualquier caja de tercer orden de la matriz D. Si hacemos

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & X \\ 3 & 2 & Y \\ 9 & -1 & Z \end{vmatrix} = 0$$

que nos da la relación pedida entre las componentes X,Y,Z: $3X+Y-Z=0$

PROBLEMA 187 (141020)

a) Considérese la siguiente topología de **X={a,b,c,d,e}:**

W={X, Φ, {a}, {a,b}, {a,c,d}, {a,b,c,d}, {a,b,e}}

escribir los entornos del punto **e** y del punto **c**.

b) Determinar si los conjuntos siguientes son entornos del punto **0** en el espacio topológico **(R,Ta)**, donde **Ta** es la topología usual:

(-1/2,1/2], (-1,0], [0,1/2) y (0,1]

RESOLUCIÓN:

a) Un entorno *E(p)* del punto p es todo subconjunto de X tal que $p \in \operatorname{int} E(p)$, es decir, $p \in U$ (abiertos contenidos en E). Todos los abiertos de X a los que pertenece e son: {a,b,c,d,e} y {a,b,e}. Por tanto, serán entornos de e:

{a,b,c,d,e}, {a,b,e}, {a,b,c,e} y {a,b,d,e}

b) Se tiene:
(-1/2,1/2] es entorno de 0 porque existe al menos un abierto contenido en (-1/2,1/2] al cual pertenece 0:

$$0 \in \left(-1/2, 1/2\right) \subset \left(-1/2, 1/2\right]$$

por razón análoga:

$$0 \notin (-1,0) \subset \left(-1,0\right],\ 0 \notin (0,1/4) \subset \left[0,1/2\right),\ 0 \notin (0,1) \subset \left(0,1\right]$$

por tanto:

$\left(-1/2, 1/2\right]$ si es entorno

$\left(-1,0\right]$ no es entorno

$\left[0,1/2\right)$ no es entorno

$\left(0,1\right]$ no es entorno

PROBLEMA 186 (160920)

Dada la matriz cuadrada

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- ¿Cuál es la matriz inversa de A para x=0?
- ¿Para qué valor o valores de x la matriz A no es inversible?

RESOLUCIÓN:

- Para x=0:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, A' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, (A')^{+} = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 12 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16, A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & -4 & 1 \\ 1 & 12 & -3 \\ -2 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

- La matriz no es inversible sii $|A| = 0$:

- $$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ x & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 4x = 0 \rightarrow x = 4$$

PROBLEMA 185 (190820)

Sea m un entero positivo fijo cualquiera y sea S={0,1,2,…,m-1}. Se define en S una operación binaria, $\circ$, de la siguiente manera:

$$\forall a,b\in S, a\circ b=\begin{cases} a+b, \ si\ a+b<m \\ r, \ si\ a+b=m+r \quad 0\le r<m \end{cases}$$

Demostrar que (S,$\circ$) es un grupo de orden m.

RESOLUCIÓN:

Para probar que es un grupo hemos de ver que la operación definida es interna, con elemento neutro, asociativa y con elemento simétrico.

a) Es ley de composición interna:

Si $a+b<m\rightarrow a\circ b=a+b<m\rightarrow a\circ b\in S$

Si $a+b\ge m\rightarrow a\circ b=a+b-m\in S\rightarrow a\circ b\in S$

Luego, $\forall a,b\in S, a\circ b\in S$

b) Existe elemento neutro:

$\forall a\in S, a+0=0+a<m\rightarrow a+0=0+a=a\in S$

O sea: $\forall a\in S, a\circ 0=0\circ a=a\in S$

Luego 0 es elemento neutro para la ley interna.

c) Es asociativa:

En realidad la operación binaria indicada en el enunciado puede expresarse por $a\circ b=a+b-\delta.m,\ \delta\in\{0,1\}$, siendo $\delta=0$ si $a+b<m$ y $\delta=1$ caso contrario.

se tiene:

$$a\circ(b\circ c)=a\circ(b+c-\delta_2.m)=a+b+c-\delta_2 m-\delta_1.m=a+b+c-(\delta_2+\delta_1).m$$

$$(a\circ b)\circ c)=(a+b-\delta_1'.m)\circ c=a+b+c-\delta_1' m-\delta_2'.m=a+b+c-(\delta_1'+\delta_2').m$$

o sea:

$$a\circ(b\circ c)=a+b+c-\varphi.m,\ \varphi\in\{0,1,2\}$$

$$(a\circ b)\circ c=a+b+c-\varphi'.m,\ \varphi'\in\{0,1,2\}$$

para probar la igualdad de ambas expresiones hemos de probar que $\varphi=\varphi'$.

De la definición de la operación binaria, se tiene que

$$0\le a\circ(b\circ c)<m$$

$$0\le(a\circ b)\circ c<m$$

Actuamos por reducción al absurdo:

Si $\varphi>\varphi'\rightarrow\varphi\ge\varphi'+1\rightarrow a\circ(b\circ c)=a+b+c-\varphi.m\le a+b+c-(\varphi'+1).m=$

$=a+b+c-\varphi'.m-m=(a\circ b)\circ c-m\le 0$, lo que es contradictorio

Análogamente, si $\varphi'>\varphi$ llegamos también a la contradicción de que sería $(a\circ b)\circ c\le a\circ(b\circ c)-m\le 0$

Por tanto solo puede ser $\varphi=\varphi'$, que prueba la asociatividad

d) Todo elemento tiene un simétrico en el conjunto S:

Siendo $a+m-a=m$ será, por definición de la operación binaria: $a\circ(m-a)=0$

Análogamente, de ser $(m-a)+a=m$ se deduce que $(m-a)\circ a=0$
Luego, $m-a$ es el simétrico de $a, \forall a\in S$

PROBLEMA 184 (220720)

Establecer la manera de obtener la diferencial segunda de una aplicación de R^n en R^m (R: cuerpo de los números reales)

$$\vec{f}: R^n \to R^m$$

determinando las correspondientes matrices (matrices hessianas).
Aplicar el procedimiento a las aplicaciones:

a) $\vec{f}: R^2 \to R, \ \ \forall(x,y)\in R^2, f(x,y)=x^3+3xy^2-2y^3\in R$

b) $\vec{f}: R^2 \to R^2, \ \ \forall(x,y)\in R^2, f(x,y)=(x^2-xy, 3xy+y^2)\in R^2$

RESOLUCIÓN:

$$\forall(x_1,...,x_n)\in R^n, \vec{f}(x_1,...,x_n)=(f_1,...,f_m)\in R^m$$

$$d\vec{f}=(df_1,...,df_m)=\sum_{k=1}^m df_k\vec{e}_k$$

$$d^2\vec{f}=(d^2f_1,...,d^2f_m)=\sum_{k=1}^m d^2f_k\vec{e}_k$$

siendo:

$$df_k=\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial x_i}dx_i, k=1,...,m, \qquad d^2f_k=\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j, k=1,...,m$$

por tanto, será:

$$d^2\vec{f}=(d^2f_1,...,d^2f_m)=\sum_{k=1}^m d^2f_k\vec{e}_k=\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j\vec{e}_k=\sum_{k=1}^m\sum_{i=1}^n H_k^{ij}dx_i dx_j\vec{e}_k$$

Matrices hessianas:

$$H_k=\begin{pmatrix} H_k^{11} & H_k^{12} & ..... & H_k^{1n} \\ .... & .... & ..... & .... \\ .... & .... & ..... & .... \\ H_k^{n1} & H_k^{n2} & ..... & H_k^{nn}\end{pmatrix}, \quad k=1,...,m$$

por tanto, n indica la dimensión de las matrices hessianas de la aplicación y m el número de tales matrices hessianas.

a) La aplicación $\vec{f}: R^2 \to R, \ \ \forall(x,y)\in R^2, f(x,y)=x^3+3xy^2-2y^3\in R$ se describe mediante una sola matriz hessiana de dimensión 2:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^{11} & H_1^{12} \\ H_1^{21} & H_1^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x - 12y \end{pmatrix}$$

por tanto:

$$d^2 f = (dx, dy) \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x - 12y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

b) La aplicación $\vec{f} : R^2 \to R^2,\ \ \forall (x,y) \in R^2,\ f(x,y) = (x^2 - xy, 3xy + y^2) \in R^2$ se describe mediante dos matrices hessianas de dimensión 2:
$f(x,y) = (f_1, f_2)$, siendo $f_1 = x^2 - xy,\ \ f_2 = 3xy + y^2$, por tanto:

$$H_1 = \begin{pmatrix} H_1^{11} & H_1^{12} \\ H_1^{21} & H_1^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} H_2^{11} & H_2^{12} \\ H_2^{21} & H_2^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f_2}{\partial y \partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d^2 f_1 = (dx, dy) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},\ \ d^2 f_2 = (dx, dy) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

Finalmente:

$$d^2 f = (d^2 f_1, d^2 f_2) = \left((dx, dy) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}, (dx, dy) \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \right)$$

PROBLEMA 183 (240620)

Sea $f: X \to Y$ una función de un conjunto no vacío X en un espacio topológico (Y,μ). Si es Γ la clase de las imágenes recíprocas de los abiertos de Y :

$$\Gamma = \left\{ f^{-1}(g) / g \in \mu \right\}$$

se pide demostrar que Γ es una topología en X.

RESOLUCIÓN:

Para que (X,Γ) sea un espacio topológico deben cumplirse las condiciones que definen Γ como topología en X :

1) $X \in \Gamma, \phi \in \Gamma$

2) $\forall a_i \in \Gamma, i = 1,2,... \to \bigcup a_i \in \Gamma$

3) $\forall a_i, a_j \in \Gamma \to a_i \bigcap a_j \in \Gamma$

Lo comprobamos a continuación:

1) $X = f^{-1}(Y), \phi = f^{-1}(\phi) \to X, \phi \in \Gamma$

2) $\forall a_i \in \Gamma, i = 1,2,... \to \exists g_i \in \mu, i = 1,2,... / a_i = f^{-1}(g_i) \to \bigcup a_i = \bigcup f^{-1}(g_i) =$

$= f^{-1}(\bigcup g_i) \to \bigcup a_i \in \Gamma$

3) $\forall a_i, a_j \in \Gamma \to \exists g_1, g_2 \in \mu, / a_1 = f^{-1}(g_1) \wedge a_2 = f^{-1}(g_2) \to a_i \bigcap a_j =$

$= f^{-1}(g_1) \bigcap f^{-1}(g_2) = f^{-1}(g_1 \bigcap g_2) \to a_i \bigcap a_j \in \Gamma$

PROBLEMA 182 (270520)

Determinar la convergencia de las series de números reales

1) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{2.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$

2) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^n}+\ldots$

empleando el criterio que se considere adecuado.

RESOLUCIÓN:

1) Empleamos el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{1/(n+1)(n+2)}{1/n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+2}=2$$

por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=2>1\to \text{la serie es convergente}$$

2) Empleamos el criterio logarítmico:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{1/n^n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log n^n}{\log n}=\lim_{n\to\infty} n=\infty$$

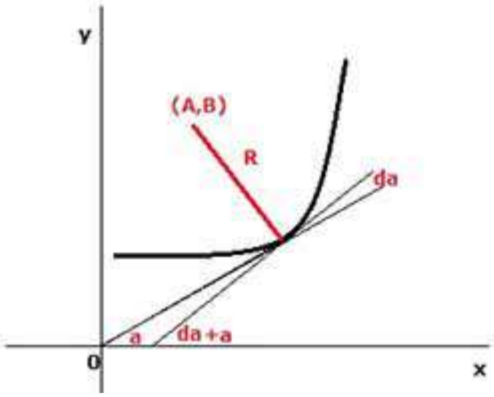
por tanto:

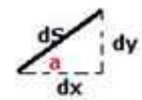
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n}=\infty>1\to \text{la serie es convergente}$$

PROBLEMA 181 (290420)

Dedúzcase, para una curva plana, la curvatura, el radio de curvatura, el centro de curvatura y la ecuación de la evoluta.

RESOLUCIÓN:





- Curvatura:

$$K = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta S} = \frac{da}{dS}, \qquad sena = dy/dS, \quad \cos a = dx/dS, \quad tga = dy/dx$$

$$a = arctg\left(dy/dx\right) = arctgy' \to da/dx = \frac{y''}{1+y'^2}$$

$$dS^2 = dx^2 + dy^2 \to \left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + y'^2 \to \frac{dS}{dx} = \left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$K = \frac{da}{dS} = \frac{da/dx}{dS/dx} = \frac{y''}{1+y'^2} \Big/ \left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

- Radio de curvatura:

$$R = \frac{1}{K} = \frac{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

- Centro de curvatura:

$$\left.\begin{array}{l} A = x - Rsena \\ B = x + R\cos a \end{array}\right\}, \quad sena = dy/dS = \frac{dy/dx}{dS/dx} = \frac{y'}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}, \ \cos a = dx/dS = \frac{1}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Sustituyendo el radio de curvatura y ambas razones trigonométricas:

$$A = x - \frac{y'}{y''}\left(1+y'^2\right), \qquad B = y + \frac{1+y'^2}{y''} \to \left(A,B\right) = \left(x - \frac{y'}{y''}\left(1+y'^2\right),\ y + \frac{1+y'^2}{y''}\right)$$

- Ecuación de la evoluta de y=f(x):

$$\begin{cases} x = x_0 - \dfrac{y'}{y''}\left(1 + y'^2\right) \\ y = y + \dfrac{1 + y'^2}{y''} \end{cases} \quad (\textit{parámetro} \;\; x_0)$$

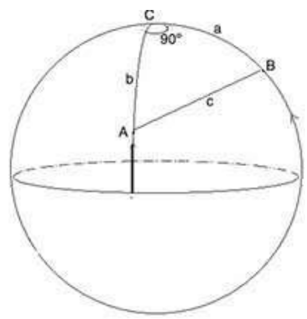
PROBLEMA 180 (010420)

Desde dos puntos del Ecuador terrestre cuyas longitudes difieren en 90º parten simultáneamente hacia el polo norte dos móviles, A y B, siguiendo sus meridianos respectivos, con velocidades 2000/3 kms/h y 1000 kms/h, respectivamente. Calcúlese:

1) La distancia que separa a estos dos móviles a las 5 horas, medida sobre el arco de círculo máximo que los une.
2) Los ángulos que este círculo máximo forma con los meridianos de A y B.
3) Área de los husos definidos por los ángulos A y B.
Nota: Suponer, por simplicidad, que la longitud del círculo máximo sobre la superficie terrestre es de 40.000 kms, esto es, que la longitud del radio terrestre es de 6.366'1977 kms

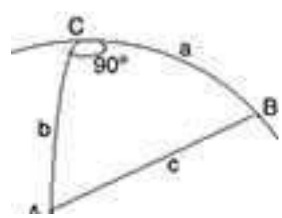
RESOLUCIÓN:

Usamos las fórmulas de la trigonometría esférica. Para documentación, consultar el artículo "Fórmulas de la trigonometría esférica", en http://casanchi.com/mat/formulaesferica.htm (*)



Velocidades de ambos móviles:
$v_A = 2000/3$ kms/h $v_B = 1000$ kms/h
Espacios recorridos a las 5 horas:
$e_A = (2000/3).5 = 10000/3$ kms
$e_B = 1000.5 = 5000$ kms
Latitud de ambos móviles a las 5 horas:
$L(A) = 30^o, \quad L(B) = 45^o$

Se forma el triángulo esférico:



donde a las 5 horas es: C=90º, b=60º, a=45º

1) Cálculo de la distancia d entre ambos móviles:

Usando las fórmulas de los cosenos para el coseno de C (ver pág 9 de (*)):

$\cos c = \cos a.\cos b + sena.senb.\cos C$, y siendo $\cos C = \cos 90^o = 0$, será:

$$\cos c = \cos a.\cos b = \cos 45.\cos 60 = \sqrt{2}/4 \rightarrow c = \arccos\left(\sqrt{2}/4\right) = 69'29518895 \cong 69^o 17' 42''$$

y mediante regla de tres:

$$d = \frac{c}{360^o}.40000 = 7.699'46 \text{ kms}$$

2) Cálculo de los ángulos A y B:

Usando la fórmula de las contangentes para el coseno de A (ver pág 11 de (*)):

$senb.ctgc = senA.ctgC + \cos b.\cos A$, y siendo $ctgC = ctg90^{\circ} = 0$, será:

$$senb.ctgc = \cos b.\cos A \rightarrow \cos A = tgb.ctgc = tg60^{\circ}.ctg69'29518895 = 0'6546536707 \rightarrow$$

$$\rightarrow A = \arccos\left(0'6546536707\right) = 49^{\circ}6'23''$$

Usando ahora la fórmula de los senos para el seno de B (ver pág 7 de (*)):

$$senB = \frac{senb}{senc}.senC = \frac{senb}{senc} = \frac{sen60}{sen69'29518895} = 0'9258200998 \rightarrow$$

$$\rightarrow B = arcsen(0'9258200998) = 67^{\circ}47'33''$$

En definitiva:

$$A = 49^{\circ}6'23'', \quad B = 67^{\circ}47'33''$$

3) Área de los husos definidos por los ángulos A y B:

Bastará una regla de tres en cada caso.

Área S_A del huso definido por el ángulo A:

$$S_A = \frac{A}{360}4\pi r^2 = \frac{49'10660535}{360}4\pi(6366'1977)^2 = 69.471.634'86\ kms^2$$

Área S_B del huso definido por el ángulo B:

$$S_B = \frac{B}{360}4\pi r^2 = \frac{67'79234571}{360}4\pi(6366'1977)^2 = 95906549'72\ kms^2$$

PROBLEMA 179 (040320)

Integrar la ecuación diferenclia

$$y' = (x+y)^2$$

RESOLUCIÓN:

Hacemos el cambio:

$$x + y = u \to 1 + y' = u' \to y' = u' - 1$$

con lo cual:

$$y' = (x+y)^2 \to u' - 1 = u^2 \to u' = 1 + u^2$$

o sea:

$$\frac{du}{dx} = 1 + u^2 \to dx = \frac{du}{1+u^2} \to \int dx = \int \frac{du}{1+u^2} \to x + c = arctgu \to$$
$$\to x + c = arctg(x+y) \to x + y = tg(x+c) \to y = -x + tg(x+c)$$

resulta:

$$y = -x + tg(x+c),\ \ c\ const$$

PROBLEMA 178 (050220)

Exprese la manera de determinar la tangente y la normal a una curva plana en un punto (x_0,y_0), cuando la curva viene dada en cualquiera las formas implícita, paramétrica o explícita.

Aplicar el procedimiento que se describa al caso de la curva C siguiente que viene descrita en las formas:

a) implíci.: $y-x^2+2x-1=0$, b) paramét.: $\{x=u+1, \ y=u^2\}$, c) explíci.: $Y=x^2-2x+1$

RESOLUCIÓN:

- Si está en forma impícita $F(x,y)=0$:

$$F_x dx + F_y dy = 0 \to dy/dx = -F_x/F_y \, , dx/dy = -F_y/F_x$$

Tangente: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F_x}{F_y} \to y - y_0 = -\left(\dfrac{F_X}{F_Y}\right)_{x=x_0} (x-x_0)$

Normal: $\dfrac{y-y_0}{x-x_0} = -\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{F_y}{F_x} \to y - y_0 = \left(\dfrac{F_y}{F_x}\right)_{x=x_0} (x-x_0)$

- Si está en forma paramétrica $\vec{r} \equiv \left\{x = x(u), \, y = y(u)\right\}$:

Sea $u = u_0 \, / \, x(u_0) = x_0, \, y(u_0) = y_0$. Se tiene:

Tangente: $\vec{t}_0 = (t_{01}, t_{02}) = \left.\dfrac{d\vec{r}}{du} \middle/ \left|\dfrac{d\vec{r}}{du}\right|\right|_{u=u_0}$, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{t}_0 \to (x-x_0, y-y_0) = \lambda(t_{01}, t_{02})$

$$\frac{x-x_0}{t_{01}} = \frac{y-y_0}{t_{02}}$$

Normal: $\vec{n}_0 = (n_{01}, n_{02}) = \left.\dfrac{d\vec{t}}{du} \middle/ \left|\dfrac{d\vec{t}}{du}\right|\right|_{u=u_0}$, $\vec{r} - \vec{r}_0 = \lambda \vec{n}_0 \to (x-x_0, y-y_0) = \lambda(n_{01}, n_{02})$

$$\frac{x-x_0}{n_{01}} = \frac{y-y_0}{n_{02}}$$

- Si está en forma explícita $y = f(x)$:

$$y_0' = \left(df/dx\right)_{x=x_0} = f'(x_0)$$

Tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x-x_0)$, Normal: $y - y_0 = -\left[f'(x_0)\right]^{-1}(x-x_0)$

Aplicación del procedimiento:

a) En forma impícita:

$$y - x^2 + 2x - 1 = 0 \to \; F_x = -2x + 2, F_y = 1 \to F_{x_0} = -2, F_y = 1$$

$$tangente: y - 1 = -\frac{-2}{1}(x-2) \to y = 2x - 3$$

$$normal: \; y - 1 = +\frac{1}{-2}(x-2) \to y = -\frac{1}{2}x + 2$$

b) En forma paramétrica:

$$x = u + 1, \; y = u^2: \; (x_0, y_0) = (2,1) \to u = 1$$

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{du}\bigg/\left|\frac{d\vec{r}}{du}\right| = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4u^2}}, \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}\right) \to \vec{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$\tan gente: \frac{x - x_0}{t_{01}} = \frac{y - y_0}{t_{02}} \to \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} \to y = 2x - 3$$

$$\vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)$$

$$normal: \frac{x - x_0}{n_{01}} = \frac{y - y_0}{n_{02}} \to \frac{x-2}{-2} = \frac{y-1}{1} \to y = -\frac{1}{2}x + 2$$

c) En forma explícita:

$$y = x^2 - 2x + 1 \to f'(x_0) = y_0' = 2x_0 - 2 = 2$$

$$\tan gente: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \to y - 1 = 2(x-2) \to y = 2x - 3$$

$$normal: \; y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \to y - 1 = -\frac{1}{2}(x-2) \to y = -\frac{1}{2}x + 2$$

PROBLEMA 177 (080120)

Deducir la fórmula que permite obtener las soluciones de la ecuación cúbica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

(Fórmula de Cardano)

RESOLUCIÓN:

Hacemos en principio un cambio de variables que permita escribir la ecuación en una versión incompleta:

$$x = y - a/3$$

con lo cual: $x^2 = y^2 + a^2/9 - 2ay/3$, $\quad x^3 = y^3 - a^3/27 - 3y^2 a/3 + 3ya^2/9$

Sustituimos:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \to (y^3 - a^3/27 - 3y^2 a/3 + 3ya^2/9) + a(y^2 + a^2/9 - 2ay/3) + b(y - a/3) + c = 0$$

simplificamos y ordenamos:

$$y^3 + (-a + a)y^2 + \frac{3b - a^2}{3}y + \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27} = 0$$

con lo que obtenemos la ecuación cúbica incompleta:

$$y^3 + py + q = 0$$

donde se ha hecho:

$$p = \frac{3b - a^2}{3}, \quad q = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{27}$$

Si hacemos ahora el nuevo cambio $y = u + v$ se tiene:

$$y^3 + py + q = 0 \to u^3 + v^3 + 3u^2 v + 3uv^2 + pu + pv + q = 0$$

o bien:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

que, para que tenga solución, ha de cumplirse que

$$\left.\begin{array}{l} u^3 + v^3 = -q \\ u.v = -p/3 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{c} u^3 + v^3 = -q \\ u^3.v^3 = -p^3/27 \end{array}\right\}$$

es decir, los cubos u^3 y v^3 han de ser soluciones de una ecuación de segundo grado en la forma $z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0$, que resolvemos:

$$z=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+4\frac{p^3}{27}}}{2}=\frac{-q\pm\sqrt{4\frac{q^2}{4}+4\frac{p^3}{27}}}{2}=\frac{-q\pm 2\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}{2}$$

Y ambas soluciones son:

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3} \qquad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

$$y=u+v=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x=\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^{\frac{1}{3}}-\frac{a}{3}$$