RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 163 (121218)

Calcular el centro, ejes y vértice de la cónica

$$x_1^2 - x_2^2 + 6x_1 - 4 = 0$$

RESOLUCIÓN:

Ecuación matricial de la cónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Ecuaciones del centro (b_1,b_2):

$$\begin{cases} a_{10} + b_1 a_{11} + b_2 a_{12} = 0 \\ a_{20} + b_1 a_{21} + b_2 a_{22} = 0 \end{cases} \text{ o sea: } \begin{cases} 3 + b_1 - b_2 0 = 0 \\ 0 + b_1 0 + b_2(-1) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} b_1 = -3 \\ b_2 = 0 \end{matrix} \quad \text{Centro: } (-3,0)$$

Ejes (diámetros conjugados perpendiculares):

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12}(m+m') + a_{22}.m.m' = 0 \\ m.m' = -1 \end{cases} \rightarrow a_{12}.m + (a_{11} - a_{22}).m - a_{12} = 0 \rightarrow$$

$\rightarrow 0.m^2 + 2m - 0 = 0 \rightarrow m = 0 \rightarrow m' = \infty$, por tanto:

$$\begin{cases} x_2 = mx_1 + b \rightarrow x_2 = 0.(-3) + 0 = 0 \\ x_2 = m'x_1 + b' \rightarrow x_1 = b' \rightarrow x_1 = -3 \end{cases} \quad \text{Ejes: } x_1 = -3,\ x_2 = 0$$

Vértices (puntos de corte con los ejes):

$x_1 = -3 \rightarrow (-3)^2 - x_2^2 + 6(-3) - 4 = 0 \rightarrow -x_2^2 - 13 = 0 \rightarrow x_2 = \pm\sqrt{-13}$ (imaginarios)

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1^2 + 6x_1 - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 + \sqrt{13} \\ x_1 = -3 - \sqrt{13} \end{cases} \quad \text{Vértices: } \left(-3+\sqrt{13},0\right),\ \left(-3-\sqrt{13},0\right)$$

PROBLEMA 162 (141118)
Dados los tres puntos

$$P\left(3,0,-1\right),\ Q\left(5,-1,0\right),\ R\left(0,0,0\right)$$

se pide determinar el ángulo z que forman los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

RESOLUCIÓN:
Utilizando

$$\cos z=\frac{\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{PR}}{\left|\overrightarrow{PQ}\right|.\left|\overrightarrow{PR}\right|}$$

siendo:

$$\vec{PQ}=\left(2,-1,1\right),\ \vec{PR}=\left(-3,0,1\right)$$

se tiene:

$$\cos z=\frac{(5-3,-1-0,0-(-1)).(0-3,0-0,0-(-1))}{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}.\sqrt{(-3)^2+0^2+1^2}}=\frac{(2,-1,1).(-3,0,1)}{\sqrt{6}.\sqrt{10}}=\frac{-5}{\sqrt{60}}=-\frac{\sqrt{60}}{12}=$$

$$=-1.645497\rightarrow z=\arccos(-1.645497)=130,2^{\circ}$$

PROBLEMA 161 (171018)

Demostrar que

$$H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 \text{ es divisible por } 60, \forall n \in N$$

siendo

$$f(n) = \begin{cases} 60k, & con\ k \in N,\ si\ n\ es\ par \\ 60k+24, & con\ k \in N,\ si\ n\ es\ impar \end{cases}$$

RESOLUCIÓN:

Utilizando inducción completa:

1) n=0: $H(0) = 3^3 + f(0) - 27 = 27 + 60k - 27 = 60k,\ k \in N \rightarrow H(0) = \dot{60}$

2) n=1: $H(1) = 3^{2+3} + f(1) - 27 = 243 + 60k + 24 - 27 = 60(4+k),\ 4+k \in N \rightarrow H(1) = \dot{60}$

3) Sea válida para $n = \dot{2}$: $H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 = 3^{2n+3} + 60k - 27 = \dot{60}$

y comprobemos entonces su validéz para n+1:

$$H(n+1) = 3^{2(n+1)+3} + f(n+1) - 27 = 3^{2n+3}.3^2 + f(n+1) - 27 =$$

$$= 3^{2n+3} + 8.3^{2n+3} - 27 + f(n+1) = 3^{2n+3} - 27 + 8.3^{2n+3} + f(n+1) =$$

$$= \left(3^{2n+3} - 27\right) + 8\left(\dot{60} + 27\right) + f(n+1) = \dot{60} + 8.\dot{60} + 216 + f(n+1) =$$

$$= \dot{60} + 216 + 60k + 24 = \dot{60} + 240 = \dot{60}$$

4) Sea válida para $n \neq \dot{2}$: $H(n) = 3^{2n+3} + f(n) - 27 = 3^{2n+3} + 60k + 24 - 27 = \dot{60}$

y comprobemos entonces su validéz para n+1:

$$H(n+1) = 3^{2(n+1)+3} + f(n+1) - 27 = 3^{2n+3}.3^2 + f(n+1) - 27 =$$

$$= 3^{2n+3} + 8.3^{2n+3} - 27 + f(n+1) = 3^{2n+3} - 27 + 8.3^{2n+3} + f(n+1) =$$

$$= 3^{2n+3} + 8.3^{2n+3} - 27 + 24 + 60k = \left(3^{2n+3} - 27\right) + 8\left(3^{2n+3} + 3\right) + 60k =$$

$$= \left(3^{2n+3} - 27\right) + 8\left(3^{2n+3} - 27 + 27 + 3\right) + 60k = \left(3^{2n+3} - 27\right) + 8\left(3^{2n+3} - 27\right) + 8.30 + 60k =$$

$$= \dot{60} + 8.\dot{60} + + \dot{60} + 60k = \dot{60}$$

PROBLEMA 160 (190918)

Hállese la expresión del versor tangente a la curva definida por las ecuaciones:

$$x = \frac{u^4}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{2}u^3}{3}, \quad z = \frac{u^2}{2}$$

en un punto cualquiera de la misma.

RESOLUCIÓN:

Sea el vector de posición de un punto cualquiera de la curva

$$\vec{r}(u)=x(u).\vec{i}+y(u).\vec{j}+z(u).\vec{k}=\frac{u^4}{4}.\vec{i}+\frac{\sqrt{2}u^3}{3}.\vec{j}+\frac{u^2}{2}.\vec{k}$$

se tiene:

$$\frac{d\vec{r}}{du}=u^3.\vec{i}+\sqrt{2}u^2.\vec{j}+u.\vec{k}$$

Por tanto:

$$ds^2=d\vec{r}.d\vec{r}=\left(u^6+2.u^4+u^2\right).du^2=u^2(u^4+2u^2+1).du^2=u^2(u^2+1)^2.du^2$$

de lo cual:

$$ds=u.(u^2+1).du$$

En definitiva:

$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}/du}{ds/du}=\frac{u^3.\vec{i}+\sqrt{2}u^2.\vec{j}+u.\vec{k}}{u.(u^2+1)}=\frac{u^2}{(u^2+1)}.\vec{i}+\frac{\sqrt{2}u}{(u^2+1)}.\vec{j}+\frac{1}{(u^2+1)}.\vec{k}$$

PROBLEMA 159 (220818)

Sean 5 segmentos de longitudes a_1, a_2, a_3, a_4 y a_5 tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo. Demuestre que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

RESOLUCIÓN:

Dado un triángulo cualquiera de lados a, b y c, se tiene que:

- si es rectángulo (por ejemplo en a,b): $a^2+b^2=c^2$
- si es acutángulo (todos los ángulos agudos): $a^2+b^2>c^2$
- si es obtusángulo (angulo a,b obtuso): $a^2+b^2<c^2$

Es decir, si el triángulo no es acutánguo (si no tiene todos sus ángulos agudos), ha de ser $a^2+b^2\le c^2$. O sea, la suma de los cuadrados de dos cualesquiera de sus lados es menor o igual que el cuadrado del tercer lado.

En nuestro caso, supongamos que el orden de longitud de los segmentos dados sea:

$$a_1\le a_2\le a_3\le a_4\le a_5$$

y veamos que si suponemos que ninguno de los triángulos que se puedan formar es acutángulo se llegaría a una contradicción con el orden de longitud dado para los 5 segmentos.

Se tendría:

$$a_1^2+a_2^2\le a_3^2 \quad (1)$$
$$a_2^2+a_3^2\le a_4^2 \quad (2)$$
$$a_3^2+a_4^2\le a_5^2 \quad (3)$$

Pero, por la desigualdad triangular:

$$a_5<a_1+a_2, \text{ luego } a_5^2<a_1^2+a_2^2+2a_1a_2 \quad (4)$$

Sumando las desiguadades (1), (2), (3) y (4):

$$a_1^2+2a_2^2+2a_3^2+a_4^2+a_5^2<a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_1^2+a_2^2+2a_1a_2$$

es decir,

$$a_2^2+a_3^2<2a_1a_2$$

Como $a_2\le a_3$, resulta $2a_2^2\le a_2^2+a_3^2<2a_1a_2$, y por tanto $a_2<a_1$, en contradicción con la ordenación inicial.

PROBLEMA 158 (250718)

Sean las ecuaciones paramétricas de dos curvas alabeadas:

$$a)\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ z = z_0 + \vartheta t \end{cases} \qquad b)\begin{cases} x = a.\cos u \\ y = a.senu \\ z = k.u \end{cases}$$

1) Hállese la ecuación continua de cada curva.
2) ¿Qué tipo de curva es en cada caso?

RESOLUCIÓN:

1) Ecuación continua de cada curva:

a) $t = \dfrac{x - x_0}{\lambda} = \dfrac{y - y_0}{\mu} = \dfrac{z - z_0}{\vartheta}$

b) $x^2 + y^2 = a^2; \ z = k.arctg\dfrac{y}{x}$

2) Tipo de curva:

a) Es una recta de V_3, intersección de dos planos.

b) Es una hélice circular de V_3, intersección del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ con el elicoide $z = k.arctg\dfrac{y}{x}$.

PROBLEMA 157 (270618)

Sea *x* un elemento nilpotente de un anillo *A* ($x^n=0$ para algún número natural *n*). Probar que *1+x* es una unidad de *A* (un elemento inversible en *A*). Deducir que la suma de un elemento nilpotente y una unidad es también una unidad en *A*.

RESOLUCIÓN:

$$x \in A \text{ nilpotente en } A \to \exists n \in N - \{0\} / x^n = 0$$

$$u \in A \text{ unidad en } A \to \exists u^{-1} \in A / u.u^{-1} = u^{-1}.u = 1$$

a)

$$u = 1 + x \to x = u - 1 \to \exists n \in N - \{0\} / x^n = (u-1)^n = 0 \to$$

$$\to (u-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^{n-k} = 0 \to \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} + 1 = 0 \to$$

$$\to \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} = -1 \to -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k} = 1 \to u\left[-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k-1}\right] = 1 \to$$

$$\to \left[-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^{n-k-1}\right] = u^{-1} \to u \text{ inversible } \to u = 1 + x \text{ es unidad en A.}$$

b)

$$w = u + x \to x = w - u \to \exists n \in N - \{0\} / x^n = (w-u)^n = 0 \to$$

$$\to \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u^k w^{n-k} = 0 \to \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k} + 1 = 0 \to -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k} = 1 \to$$

$$\to w\left[-\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k-1}\right] = 1 \to w^{-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k u^k w^{n-k-1} \to w = u + x \text{ inversible}$$

por tanto, $w = u + x$ es unidad en A

PROBLEMA 156 (300518)

Determinar la tangente, normal principal y binormal a la curva

$$\begin{cases} x = 2t^2 - 1 \\ y = 1 - t \\ z = t^2 \end{cases}$$

en el punto (1,0,1)

RESOLUCIÓN:

Vectores:

tangente: $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right|$,   normal: $\vec{n} = \dfrac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left|\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\right|$,   binormal: $\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n}$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt} = (4t, -1, 2t)$, $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (4,0,2)$, $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{16t^2 + 1 + 4t^2}$, $\left|\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \sqrt{4^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{20}$

en el punto (1,0,1) es t=1, con lo cual $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{16t^2 + 1 + 4t^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$

por tanto:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{21}}(4,-1,2) = \left(\frac{4\sqrt{21}}{21}, -\frac{\sqrt{21}}{21}, \frac{2\sqrt{21}}{21}\right),$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \Big/ \left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{1}{\sqrt{20}}(4,0,2) = \left(\frac{\sqrt{20}}{5}, 0, \frac{\sqrt{20}}{10}\right)$$

$$\vec{b} = \vec{\tau} \wedge \vec{n} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{4\sqrt{21}}{21} & -\frac{\sqrt{21}}{21} & \frac{2\sqrt{21}}{21} \\ \frac{\sqrt{20}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{20}}{10} \end{vmatrix} = \left(-\frac{\sqrt{410}}{210}, 0, \frac{\sqrt{410}}{105}\right)$$

Recta tangente: $\dfrac{x-1}{\frac{4\sqrt{21}}{21}} = \dfrac{y-0}{-\frac{\sqrt{21}}{21}} = \dfrac{z-1}{\frac{2\sqrt{21}}{21}}$,

Recta normal: $\dfrac{x-1}{\frac{\sqrt{20}}{5}} = \dfrac{z-1}{\frac{\sqrt{20}}{10}}$

Recta binormal: $\dfrac{x-1}{-\frac{\sqrt{410}}{210}} = \dfrac{z-1}{\frac{\sqrt{410}}{105}}$

Simplificando:

Recta tangente $\rightarrow \frac{x-1}{4} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$

Recta normal principal $\rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{z-1}{1}$

Recta binormal $\rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$

PROBLEMA 155 (020518)

Se representa por Z el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones

$$f: Z \to Z$$

tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x + f(y)) = f(x) - y$$

Olimpiada Matemática Española. Fase Nacional 2004 (Ciudad Real). Primera sesión

RESOLUCIÓN:

Por inducción podemos comprobar que $\forall n \in Z,\ f(x+n.f(y)) = f(x) - n.y$, ya que

1) $f(x+0.f(y)) = f(x) + 0.y$

2) $f(x+1.f(y)) = f(x) - 1.y$

3) Si suponemos la fórmula cierta para $n = k \geq 0$,

$\forall n \in Z,\ f(x+k.f(y)) = f(x) - k.y$, vemos que entonces ha de ser cierta para $k+1$:

$$f(x+(k+1).f(y)) = f(x+k.f(y)+f(y)) = f(x+k.f(y)) - y =$$
$$= f(x) - k.y - y = f(x) - (k+1).y$$

Para $n = k \leq -1$ se comprueba igual.

Ahora bien, vemos que llamando $A = 1 + f(1).f(1) = 1 + f(1)^2 > 0$

es $f(A) = f(1 + f(1).f(1)) = f(1) - f(1).1 = 0$

Pero entonces:

$$f(x) = f(x + f(A)) = f(x) - A \to A = 0$$

lo que implica contradicción ($A > 0$ y $A = 0$).

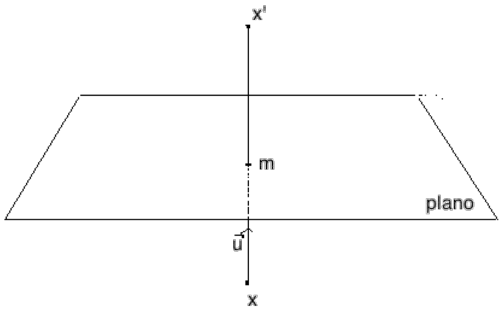
Es decir, no existen las funciones que puedan satisfacer la condición pedida.

PROBLEMA 154 (030418)

a) Obténgase la fórmula vectorial de una simetría especular en el espacio E_3.

b) Hállese el punto especularmente simétrico del punto (3,1,0) respecto al plano *4x - 4y + 2z – 1 = 0*.

RESOLUCIÓN:



Plano: 4x-4y+2z-1=0

$\vec{u}$: vector unitario normal al plano.

$\vec{m}$: vector de posición de un punto cualquiera del plano.

Ecuación vectorial del plano:

$$\vec{m}.\vec{u}+\varepsilon=0$$

a) Se tiene:

$$\vec{m}=\frac{\vec{x}+\vec{x}'}{2}\in plano \qquad \vec{x}'=\vec{x}+\lambda\vec{u},\ \lambda\in R$$

sustituyendo en la ecuación vectorial del plano:

$$\frac{\vec{x}+\vec{x}'}{2}.\vec{u}+\varepsilon=0\rightarrow\left(\vec{x}+\vec{x}'\right).\vec{u}+2\varepsilon=0\rightarrow\left(\vec{x}+\vec{x}+\lambda\vec{u}\right).\vec{u}+2\varepsilon=0\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(2\vec{x}+\lambda\vec{u}\right).\vec{u}+2\varepsilon=0\rightarrow 2\vec{x}\vec{u}+\lambda+2\varepsilon=0\rightarrow\lambda=-2\left(\vec{x}\vec{u}+\varepsilon\right)$$

$$\boxed{\vec{x}'=\vec{x}-2\left(\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon\right).\vec{u}}$$

b) Aplicaremos la fórmula obtenida para la simetría especular. Se tiene:

$$\vec{x}=(3,1,0)\,,\ 4x-4y+2z-1=0\rightarrow(4,-4,2)(x,y,z)-1=0\rightarrow\vec{m}=(x,y,z)\,,$$

$$\vec{u}=\frac{(4,-4,2)}{\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}=\left(\frac{4}{6},-\frac{4}{6},\frac{2}{6}\right)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\ \varepsilon=-\frac{1}{6}$$

$$\vec{x}.\vec{u}=(3,1,0).\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

$$\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon=\frac{4}{3}-\frac{1}{6}=\frac{7}{6}\,,\ 2\left(\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon\right)\vec{u}=2\frac{7}{6}\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{14}{9},-\frac{14}{9},\frac{7}{9}\right)$$

$$\vec{x}'=\vec{x}-2\left(\vec{x}.\vec{u}+\varepsilon\right).\vec{u}=(3,1,0)-\left(\frac{14}{9},-\frac{14}{9},\frac{7}{9}\right)=\left(\frac{13}{9},\frac{23}{9},-\frac{7}{9}\right)$$

PROBLEMA 153 (070318)

Prueba que la gráfica del polinomio P(x) es simétrica respecto del punto $A(a,b)$ sí y sólo sí existe un polinomio Q tal que: $p(x)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$ para todo $x\in R$

(Olimpiada Matemática Española, 2001. Murcia. Primera sesión)

RESOLUCIÓN:

Supongamos primero que exista el polinomio P que cumple las condiciones requeridas.

Sea $x=a-h$ ó $x=a+h$ Entonces:

$$\begin{cases} P(a-h)=b-hQ(h^2) \\ P(a+h)=b+hQ(h^2) \end{cases} \text{ y } \frac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b, \text{ para todo } h\in R.$$

Lo que significa que la gráfica de P es simétrica respecto del punto $A(a,b)$.

Sea $P(x)=P(a+h)=R(h)$

La condición $\dfrac{P(a-h)+P(a+h)}{2}=b$ es equivalente a $R(-h)+R(h)=2b$ porque $P(a-h)=R(-h)$.

Para $R(h)=a_0+a_1h+...+a_nh^n$ la condición anterior se escribe de la forma:

$$a_0+a_1h+...+a_nh^n+a_0-a_1h+a_2h^2-...+(-1)^n a_nh^n=2b$$

es decir $a_0+a_2h^2+...+a_mh^m=b$ para cada $h\in R,\ m=n, n\ par,\ m=n-1, n\ impar$

Se deduce que $a_2=a_4=...=a_m=0,\ a_0=b$

Por tanto ahora se tiene que

$R(h)=b+a_1h+a_3h^3+...=b+h(a_1+a_3h^2+a_5h^4+...)=b+h.Q(h^2)$

y así existe un polinomio Q tal que

$$R(h)=b+hQ\left(h^2\right)$$

Por último, como es $x=a+h\to h=x-a$:

$$p(x)=R(h)=b+(x-a)Q((x-a)^2)$$

PROBLEMA 152 (070218)

a) Demostrar que la propiedad de ser un espacio de Hausdorff es hereditaria, es decir, que todo subespacio de un espacio de Hausdorff es también espacio de Hausdorff.

b) Sea ***T_R*** la topología de la recta real ***R*** generada por los intervalos abiertos-cerrados ***(a,b]***. Demostrar que ***(R,T_R)*** es un espacio de Hausdorff.

RESOLUCIÓN:

a) La definición de Espacio de Hausdorff es:

$$\left(H,T_H\right)\,Esp.\,Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b\in H,\exists A,B\in T_H\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi$$

Sea $\left(X,T_X\right)$ subespacio topológico de $\left(H,T_H\right)$, y sean $a,b\in X\subseteq H$. La topología relativa en X se obtiene como intersección de X con los abiertos de $\left(H,T_H\right)$:

$$T_X=\left\{X\cap A\,/\,A\in T_H\right\}$$

Por tanto:

$$\left(H,T_H\right)\,Esp.\,Hausdorff \leftrightarrow \forall a,b\in X\subseteq H,\exists A,B\in T_H\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi\rightarrow$$

$$\rightarrow a\in X\cap A,b\in X\cap B\wedge\left(X\cap A\right)\cap\left(X\cap B\right)=X\cap(A\cap B)=X\cap\phi=\phi\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(X,T_X\right)\,Esp.\,Hausdorff$$

b) La topología considerada en R es $T_R=\left\{(a,b]\,/\,a,b\in R\right\}$

Veamos que $\forall a,b\in R,\exists A,B\in T_R\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi$:

Sea, por ejemplo, $a<b$. Basta elegir los abiertos $A=\left(a-1,a\right],B=\left(a,b\right]$, pues obviamente, $(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi$. Si fuera $b<a$ sería igual, intercambiando ambos elementos, $A=\left(b,a\right],B=\left(b-1,b\right]$. Luego

$$\forall a,b\in R,\exists A,B\in T_R\,/\,(a\in A,b\in B)\wedge A\cap B=\phi\rightarrow\left(R,T_R\right)\,Esp.\,Hausdorff$$

PROBLEMA 151 (100118)

Resuélvase la integral triple

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$$

RESOLUCIÓN:

$$\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}} = 2(z+(x+y+1))^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})$$

$$\int_0^1 2(\sqrt{x+y+2}-\sqrt{x+y+1})dy = 2.\frac{2}{3}(y+(x+2))^{\frac{3}{2}} - 2.\frac{2}{3}(y+(x+1))^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} - (x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}\left[(x+3)^{\frac{3}{2}} - 2(x+2)^{\frac{3}{2}} + (x+1)^{\frac{3}{2}}\right]dx = \frac{8}{15}\left[(x+3)^{\frac{5}{2}} - 2(x+2)^{\frac{5}{2}} + (x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 =$$

$$= \frac{8}{15}\left[(4^{\frac{5}{2}} - 2.3^{\frac{5}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}) - (3^{\frac{5}{2}} - 2.2^{\frac{5}{2}} + 1)\right] = \frac{8}{15}\left[2^5 - 3^3.3^{\frac{1}{2}} + 3.2^2.2^{\frac{1}{2}} - 1\right] =$$

$$= \frac{8}{15}\left[31 - 27.\sqrt{3} + 12\sqrt{2}\right]$$