RESOLVIENDO PROBLEMAS DE MATEMÁTICA

RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 98 (211213)

Dados los puntos P(0,1,-1) y Q(1,2,0), se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas y continuas de la línea recta que contiene a ambos puntos P y Q.
b) Obtenganse las ecuaciones paramétricas y continuas de la línea recta que pasando por el punto P es paralela a la recta de ecuaciones contínuas:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \end{aligned}$$

RESOLUCION:

a) Sea un vector director de la recta: $\vec{d} = \overrightarrow{PQ} = (1-0)\vec{u}_1 + (2-1)\vec{u}_2 + (0-(-1)\vec{u}_3 \rightarrow$ $\vec{d} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = 0 + t \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = -1 + t \end{cases}$$

Ecuaciones continuas:

$$t = x_1 = x_2 - 1 = x_3 + 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 1 = 0 \\ x_1 - x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

c) Obtencion del vector director de la recta dada $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, desde sus ecuaciones paramétricas (hacemos $x_3 = t$):

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -t \\ x_1 + x_2 = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 3t \\ x_3 = t \end{cases} \rightarrow \vec{d} = -2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + \vec{u}_3$$

ecuaciones paramétricas de la recta paralela por el punto P:

$$\begin{cases} x_1 = -2t \\ x_2 = 1 + 3t \\ x_3 = -1 + t \end{cases}$$

y sus ecuaciones continuas:

$$t = \frac{x_1}{-2} = \frac{x_2 - 1}{3} = x_3 + 1 \rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 + 2 = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 97 (231113)

Demostrar que si los tres lados de un triángulo están en progresión geométrica, la razón está comprendida entre $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

RESOLUCION: (enviada por Jerónimo Basa, 20 noviembre 2013)

Consideremos un triángulo donde sus lados están en progresión geométrica. Definamos los lados como a, ar y ar^2. Sabemos que en todo triángulo se cumple que un lado es menor que la suma de los otros dos, por desigualdad triangular. Esto, aplicado a nuestro problema, nos da que

$$0 < a < ar + ar^2$$
$$0 < ar < a + ar^2$$
$$0 < ar^2 < a + ar$$

De la primera inecuación se ve que $a > 0$, por lo tanto podemos dividir entre a toda la expresión y obtenemos que

$$0 < 1 < r + r^2 \qquad (1)$$

Dividiendo entre a la segunda inecuación, se concluye que $0 < r$. Usando la tercer inecuación y dividiendo entre a se obtiene

$$0 < r^2 < 1 + r \qquad (2)$$

Por lo tanto, de (1) y (2) se obtiene el sistema

$$r^2 + r - 1 > 0 \qquad (3)$$
$$r^2 - r - 1 < 0 \qquad (4)$$

Aplicando la resolvente de segundo orden a (3) se obtiene

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Pero como $r > 0$, sólo se considera la raíz positiva, es decir $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Al resolver (4) con el mismo método se obtiene

$$\frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Nuevamente, como $r > 0$, sólo se toma la raíz positiva, es decir $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

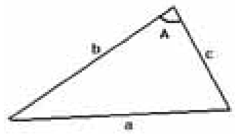
Con los últimos resultados, y por (3) y (4)

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < r < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Como se quería demostrar.

RESOLUCIÓN: (de casanchi)

Sean $a, b, c,$ los tres lados de un triángulo de modo que $b = a.r$ y $c = a.r^2$.



Del teorema del coseno para el lado a: $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos A$

Como $-1 \leq \cos A \leq 1$ se verifica que $b^2 + c^2 - 2.b.c \leq a^2 \leq b^2 + c^2 + 2.b.c$
O sea:

$$(b-c)^2 \leq a^2 \leq (b+c)^2$$

De lo cual, al sustituir la relaciones de probresión geométrica entre los tres lados, se tiene:

$$(a.r - a.r^2)^2 \leq a^2 \leq (a.r + a.r^2)^2$$

que al simplificar:

$$r^2(1-r)^2 \leq 1 \leq r^2(1+r)^2$$

quedando en definitiva:

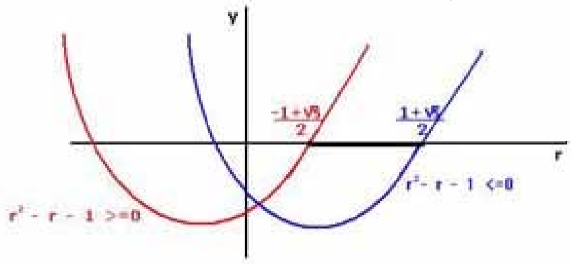
$$\left.\begin{matrix} r^2.(r-1)^2 \leq 1 \\ r^2.(r+1)^2 \geq 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} r.(r-1) \leq 1 \\ r.(r+1) \geq 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left.\begin{matrix} r^2 - r - 1 \leq 0 \\ r^2 + r - 1 \geq 0 \end{matrix}\right\}$$

si representamos gráficamente las dos parábolas:

$$y = r^2 - r - 1$$

$$y = r^2 + r - 1$$

encontramos los puntos de corte con el eje horizontal (eje r):



Los valores de r que estamos buscando son aquellos en donde la primera parábola es negativa y la segunda positiva, lo que al observar el gráfico vemos que ha de ser:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leq r \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

PROBLEMA 96 (261013)

Hallar el valor de la integral:

$$I = \int_C \frac{sh5z}{\left(1+z^2\right).z^2}.dz$$

siendo $|z| = 3/2$

RESOLUCIÓN:

Singularidades:

$$(1+z^2).z^2 = 0 \rightarrow \begin{cases} z = 0\ (doble) \\ z = i\ (simple) \\ z = -i\ (simple) \end{cases}$$

Singularidades en el interior de C: $z = 0,\ z = i,\ z = -i$.

Descomposición de $\dfrac{sh5z}{(1+z^2).z^2}$ en fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+z^2).z^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z+i} + \frac{D}{z-i} \rightarrow 1 = Az.(1+z^2) + B(1+z^2) + Cz^2(z-i) + Dz^2(z+i)$$

al identificar, resulta: $A = 0,\ B = 1,\ C = -i/2,\ D = i/2$

Por tanto, $\dfrac{sh5z}{(1+z^2).z^2} = A\dfrac{sh5z}{z} + B\dfrac{sh5z}{z^2} + C\dfrac{sh5z}{z+i} + D\dfrac{sh5z}{z-i}$, y se tiene que

$$I = A\int_C \frac{sh5z}{z}dz + B\int_C \frac{sh5z}{z^2}dz + C\int_C \frac{sh5z}{z+i}dz + D\int_C \frac{sh5z}{z-i}dz =$$

$$= 2\pi i(A.sh(0) + 5Bch(0) + Csh(-5i) + Dsh(5i)) = 2\pi i(A.sh(0) + 5.1.1 - \frac{i}{2}sh(5i) + \frac{i}{2}sh(5i)) = 10\pi i$$

En definitiva:

$$I = \int_C \frac{sh5z}{\left(1+z^2\right).z^2}.dz = 10\pi i$$

PROBLEMA 95 (280913)

Dada la cónica:

$$x^2 + y^2 - 2xy + 4x - 6y + 8 = 0$$

Determinar la recta polar del punto *(3,2)*, el polo de la recta *2x+3y=-7* y su centro, si existe.

RESOLUCIÓN: (enviada por Jerónimo Basa, 10 octubre 2013)

Se define como cónica al lugar geométrico de puntos en el plano cartesiano (x, y) que cumplen la siguiente ecuación general
Esta ecuación puede escribirse de forma matricial de la siguiente manera

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Ex + Fy + H = 0.$$

$$(1\ x\ y)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0 \qquad (1)$$

Donde

$a_{00} = H,\ a_{11} = A,\quad a_{22} = B,\quad a_{12} = a_{21} = D/_2,\ a_{10} = a_{01} = E/_2,\quad a_{02} = a_{20} = F/_2.$

Escribimos ahora la matriz de nuestra cónica

$$M = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Y también las matrices adjuntas

$$M_{00} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_{11} = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, M_{22} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos el test de los determinantes para clasificar nuestra cónica

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Como $\det M \neq 0$ y $\det M_{00} = 0$ nuestra cónica (que ahora se llamará Y) es una parábola.

Dado un punto **P** del plano con coordenadas (x_0, y_0) definimos una recta polar de **P** respecto de la cónica Y a la recta de ecuación matricial

$$(1\ x_0\ y_0)M\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

En el punto $(3{,}2)$ la recta polar a Y resulta

$$(1\ 3\ 2)\begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 3x - 4y + 8.$$

Sea **L** una recta. Entonces un punto **Q** del plano es un polo de **L** a una cónica si **L** es la polar de **Q** respecto de la cónica. Sea ahora **L** la recta $2x + 3y + 7 = 0.$ Para calcular su polo, se puede trabajar bajo coordenadas proyectivas, es decir, a un punto del plano (x_0, y_0) se lo representa mediante una terna de componentes (x, y, z) bajo la transformación

$$x_0 = \frac{y}{x}, y_0 = \frac{z}{x}.$$

Usando el punto (x_0, y_0) y la matriz M en (1), tenemos

$$(1\ x_0\ y_0)\begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Que se transforma en el siguiente sistema lineal

$a = 2 + x_0 - y_0$
$b = -3 - x_0 + y_0$
$c = 8 + 2x_0 - 3y_0$

Donde a, b, c son las componentes de la recta polar $ax + by + c = 0.$ Como **L** es nuestra recta polar a estudiar, podemos reemplazar $a = 2, b = 3, c = 7$ y usar las coordenadas proyectivas de (x_0, y_0). El anterior sistema lineal se transforma entonces en

$2 = 2x + y - z$
$3 = -3x - y + z$
$7 = 8x + 2y - 3z$

Al resolverlo se obtiene $x = -5, y = -11, z = -23.$ Como $x_0 = {}^{y}/_{x}, y_0 = {}^{z}/_{x}$ se obtiene que el polo **Q** de **L** a Υ es $\left({}^{11}/_{5}, {}^{23}/_{5}\right)$.

Si un punto no posee recta polar a una cónica, entonces este punto se llama *centro*. Las coordenadas de dicho punto (x_0, y_0) que no tienen recta polar, verifican que para el sistema

$a_{01} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = 0$
$a_{02} + a_{12}x_0 + a_{22}y_0 = 0$

los coeficientes de x e y de la recta polar son nulos, por lo que la recta no existe. Para saber si dicho sistema tiene solución para nuestro caso, se debe verificar que

$$rango\ M_{00} = rango\begin{pmatrix} 8 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ya vimos que $detM_{00} = 0$ por lo tanto el sistema no presenta solución, y resulta que todos los puntos tienen polar a Υ . Por lo tanto, nuestra parábola no tiene centro.

PROBLEMA 94 (310813)

Sea el conjunto **X={1,2,3,4,5}**. Considérense las funciones **f** y **g** definidas de **X** en **X**:

f={<1,3>,<2,5>,<3,3>,<4,1>,<5,2>}

g={<1,4>,<2,1>,<3,1>,<4,2>,<5,3>}

y hállense las funciones compuestas **gof** y **fog**.

RESOLUCIÓN: (enviada por Jerónimo Basa, 4 septiembre 2013)

a)

elementos imágenes de f: {3,5,1,2}

elementos imágenes de g: {4,1,2,3}

b)

(gof)(1)=g[f(1)]=g(3)=1; (fog)(1)=f[g(1)]=f(4)=1
(gof)(2)=g[f(2)]=g(5)=3; (fog)(2)=f[g(2)]=f(1)=3
(gof)(3)=g[f(3)]=g(3)=1; (fog)(3)=f[g(3)]=f(1)=3
(gof)(4)=g[f(4)]=g(1)=4; (fog)(4)=f[g(4)]=f(2)=5
(gof)(5)=g[f(5)]=g(2)=1; (fog)(5)=f[g(5)]=f(3)=3

Por tanto:

gof={<1,1>,<2,3>,<3,1>,<4,4>,<5,1>}

fog={<1,1>,<2,3>,<3,3>,<4,5>,<5,3>}

PROBLEMA 93 (030813)

Determínese algún procedimiento de cálculo para el centro de una cónica.
Determinar las coordenadas del centro de la cónica

$$13x^2+5y^2+4xy-26x-22y+23=0$$

RESOLUCIÓN:

Por definición el centro B(r,q) de una cónica es el conjugado de cualquiera de los puntos (0,m,n) de la recta del infinito. O sea:

$$(0,m,n)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ r \\ q \end{pmatrix}=0$$

de donde

$$m(a_{10}+a_{11}r+a_{12}q)+n(a_{20}+a_{21}r+a_{22}q)=0$$

y teniendo en cuenta que m y n son arbitrarias:

$$\begin{aligned} a_{10}+a_{11}r+a_{12}q=0 \\ a_{20}+a_{21}r+a_{22}q=0 \end{aligned}$$

sistema lineal, que para que sea compatible y determinado debe ser:

$$A_{00}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

(son las cónicas de tipo elíptico o hiperbólico)

En el ejemplo del enunciado es:

$$13x^2+5y^2+4xy-26x-22y+23=0$$

por lo que:

$$a_{11}=13,\ a_{12}=a_{21}=2,\ a_{10}=-13,\ a_{22}=5,\ a_{20}=-11$$

$$A_{00}=\begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=65-4=61\neq 0 \to \textit{existe centro}$$

Resolvemos el sistema:

$$\begin{aligned} -13+13r+2q=0 \\ -11+2r+5q=0 \end{aligned} \to \begin{aligned} r=43/61 \\ q=117/61 \end{aligned}$$

Centro:

$$B(43/61, 117/61)$$

PROBLEMA 92 (060713)

Utilizar el procedimiento de decisión llamado “método de reducción al absurdo” para comprobar si es verdadera la proposición

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

RESOLUCIÓN:

El método de reducción al absurdo afirma que el teorema

$$[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

será cierto si es cierto el teorema contrarrecíproco

$$[p \rightarrow (q \rightarrow r)]' \rightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]'$$

(contrario de la tesis del teorema implica el contrario de la hipótesis)

Simplificando esta última expresión mediante expresiones equivalentes:

$$[p' \vee (q \rightarrow r)]' \rightarrow [(p \wedge q)' \vee r]'$$

o bien:

$$p \wedge (q \rightarrow r)' \rightarrow (p \wedge q) \wedge r'$$

o sea:

$$p \wedge (q' \vee r)' \rightarrow (p \wedge q) \wedge r'$$

de donde:

$$p \wedge (q \wedge r') \rightarrow (p \wedge q) \wedge r'$$

o sea:

$$p \wedge (q \wedge r') \rightarrow p \wedge (q \wedge r')$$

y esta última expresión es cierta obviamente (ley de identidad). Por tanto es cierto el teorema dado $[(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$.

PROBLEMA 91 (080613)

Hallar las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal a la superficie representada por

$$\vec{X} = \left(u, v, u^2 - v^2\right)$$

en el punto correspondiente a $u=1,\ v=1$.

RESOLUCIÓN:

Determinación de la recta normal:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{X}_u = (1,0,2) \\ \vec{X}_v = (0,1,-2)\end{array}\right\} \to \vec{N} = \frac{\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v}{\left|\vec{X}_u \wedge \vec{X}_v\right|} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Ec. Vectorial:

$$\vec{X} - \vec{X}(1,1) = \lambda.\vec{N} \to \left(x-1, y-1, z-1\right) = \lambda.\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Ecuaciones continuas:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

Ecuación del plano tangente en $\vec{x}(1,1)$:

$$\left[\vec{X} - \vec{X}(1,1)\right].\vec{N} = 0$$

$$\left(x-1, y-1, z\right).\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0 \to -\frac{2}{3}(x-1) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{1}{3}z = 0$$

Ecuación del plano tangente:

2x-2y-z=0

PROBLEMA 90 (110513)

Dado un número positivo, **n**, hallar la suma de todos los números positivos inferiores a **10.n**, que no sean múltiplos de **2** ni de **5**.

RESOLUCIÓN:

- Total de números inferiores a $10.n$: $T = \{1,2,3,...,10n\}$.
- Total de múltiplos de 2 contenidos en T: $M2 = \{2,4,6,...,10n\}$
- Total de múltiplos de 5 contenidos en T: $M5 = \{5,10,15,...10.n\}$
- Total de múltiplos de 2 y de 5 contenidos en T: $M10 = \{10,20,...10.n\}$

Las sucesiones T, $M2$, $M5$ y $M10$ son progresiones aritméticas cuyas diferencias respectivas son 1, 2, 5 y 10. El conjunto T tiene 10n términos, el conjunto M2 tiene 5n términos, el conjunto M5 tiene 2n términos y el conjunto M10 tiene n términos

Sabemos que la suma de los n términos de una progresión aritmética de primer término a_1 y de último término a_n pueda darse por la expresión $S_n = \frac{n.(a_1 + a_n)}{2}$. En los tres casos anteriores sería:

Suma de los términos de T: $S_n(T) = \frac{10n(1+10n)}{2} = 5n(10n+1)$

(quedan incluidos todos los números: los que son múltiplos de 2, los que son múltiplos de 5, los que son múltiplos de 2 y de 5 simultáneamente, y los que no son múltiplos ni de 2 ni de 5)

Suma de los términos de M2: $S_n(M2) = \frac{5n(2+10n)}{2} = 5n(5n+1)$

(quedan incluidos tanto múltiplos de 2 solamente como múltiplos de 2 y de 5 simultáneamente)

Suma de los términos de M5: $S_n(M5) = \frac{2n(5+10n)}{2} = 5n(2n+1)$

(quedan incluidos tanto múltiplos de 5 solamente como múltiplos de 2 y de 5 simultáneamente)

Suma de los términos de M10: $S_n(M10) = \frac{n(10+10n)}{2} = 5n(n+1)$

(esta suma está incluida tanto en Sn(M5) como en Sn(M2))

La suma buscada para los números que no son múltiplos de 2 ni de 5 es:

$$S_x = S_n(T) - S_n(M2) - S_n(M5) + S_n(M10) = 5n(10n+1) - 5n(5n+1) - 5n(2n+1) + 5n(n+1) =$$
$$= 20n^2$$

PROBLEMA 89 (130413)

Calcular:

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2-2x}.dx$$

a) Usando el significado geométrico de la integral definida.
b) Mediante un cambio de variables.

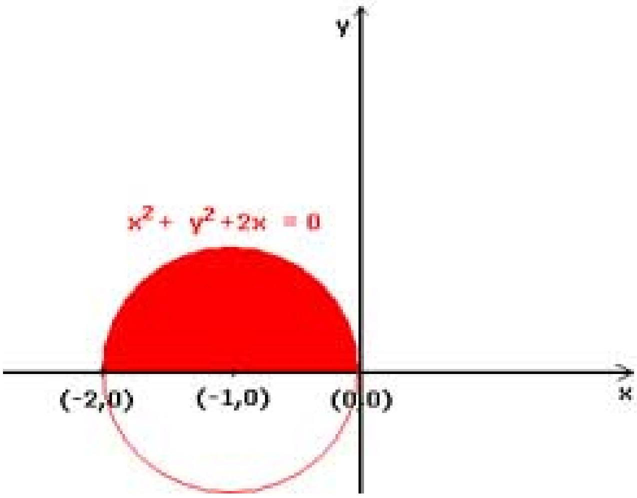
RESOLUCIÓN:

a) Resolución por el significado geométrico:

Llamando $y=+\sqrt{-x^2-2x}$, se tiene que la integral es $\int_{-2}^{0} y.dx$, que representa el área barrida sobre el intervalo cerrado $[-2,0]$ por la curva $y=+\sqrt{-x^2-2x}$. Tal curva es, elevando al cuadrado:

$$x^2+y^2+2x=0, \text{ con } y>0$$

es decir, se trata de una semicircunferencia centrada en (-1,0) y con radio unidad.



El área que barre la semi-circunferencia sobre el intervalo $[-2,0]$ es, por tanto:

$$\frac{1}{2}\pi r^2=\frac{1}{2}\pi$$

En definitiva:

$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2-2x}.dx=\frac{1}{2}\pi$$

b) Resolución mediante un cambio de variables:

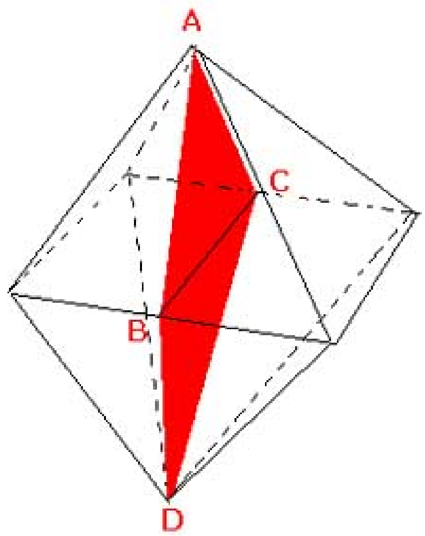
$$\int_{-2}^{0} \sqrt{-x^2-2x}.dx=\int_{-2}^{0} \sqrt{1-(x+1)^2}.dx=\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}.dt=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-sen^2\theta}.\cos\theta.d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta.\cos\theta.d\theta=$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta.d\theta=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta).d\theta=\left(\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}sen 2\theta\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)+\frac{1}{4}(sen\pi-sen(-\pi))=\pi/2$$

PROBLEMA 88 (160313)

Se considera un octaedro regular de arista 1 cm. Determinar las dimensiones del cilindro de revolución de volumen máximo inscrito en dicho octaedro cuyo eje esté sobre la diagonal.

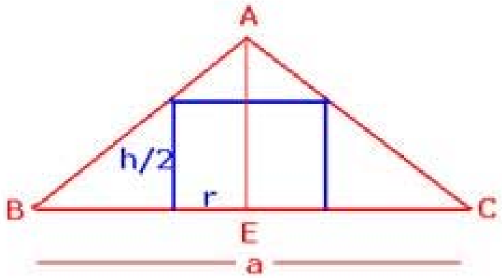
RESOLUCIÓN:



Seccionamos simétricamente el octaedro.

Sea ABCD el plano de sección del octaedro y determinemos la distancia AB y AE en función de la arista a:

$$AB = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$



$$AE = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{A}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Por tanto, se tiene:

$$\frac{AE}{a/2} = \frac{h/2}{a/2 - r} \to \frac{\frac{a}{2}\sqrt{2}}{a/2} = \frac{h/2}{a/2 - r} \to \sqrt{2} = \frac{h}{a - 2r} \to h = a\sqrt{2} - 2\sqrt{2}r$$

Como es $a=1$, será $h = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}r$, con lo que el volumen del cilindro en función de r es

$$V(r) = \pi r^2 h = \pi\sqrt{2}r^2 - 2\pi\sqrt{2}r^3$$

y sus dos primeras derivadas:

$$V'(r) = 2\pi\sqrt{2}r - 6\pi\sqrt{2}r^2, \qquad V''(r) = 2\pi\sqrt{2} - 12\pi\sqrt{2}r$$

para que se anule la primera derivada:

$$V'(r) = 2\pi\sqrt{2}r - 6\pi\sqrt{2}r^2 = 0 \to \begin{cases} r = 0 \\ r = 1/3 \end{cases}$$

si $r = 0 \to V''(0) = 2\pi\sqrt{2} > 0 \to volumen\ \min imo$

si $r = 1/3 \to V''(1/3) = 2\pi\sqrt{2} - 4\pi\sqrt{2} = -2\pi\sqrt{2} < 0 \to volumen\ \max imo$, por tanto, las dimensiones pedidas son:

$$r = 1/3,\ \ h = \sqrt{2} - 2/3\sqrt{2} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

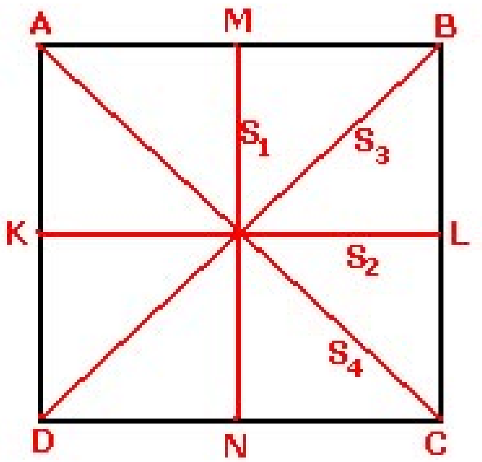
PROBLEMA 87 (160213)

1. Dado un conjunto G, con estructura de grupo respecto a una ley interna, *, demostrar que el conjunto H de los elementos de G que permutan con cualquier otro elemento de G, constituyen un grupo, llamado *centro del grupo G, con respecto a la misma ley interna *.*
2. En el grupo de los movimientos de igualdad que dejan invariante a un cuadrado, encontrar el centro H de dicho grupo.

RESOLUCIÓN:

1. Veamos que el centro H es un grupo, comprobando que se verifican las condiciones de definición de un grupo:
   - * es ley interna en H:
     $\forall x, y \in H, \forall a \in G, (x.y).a = x.(y.a) = x.(a.y) = (x.a).y = (a.x).y = a.(x.y) \Rightarrow$
     $\Rightarrow (x.y)\ es\ permutable \Rightarrow (x.y) \in H$
   - * es asociativa en H:
     Trivialmente, pues H es parte de G y la operación * es asociativa en G.
   - El elemento neutro en H es el mismo elemento neutro, 1, de G:
     Tal elemento es el mismo elemento neutro del grupo G, pues:
     $\forall a \in G, 1.a = a.1 \Rightarrow 1 \in H$
   - Todo elemento de H tienen un simétrico respecto a *:
     $\forall x \in H, \forall a \in G, a.x = x.a \Rightarrow x^{-1}(a.x) = x^{-1}(x.a) \Rightarrow x^{-1}(a.x).x^{-1} =$
     $= x^{-1}(x.a).x^{-1} \Rightarrow x^{-1}.a.(x.x^{-1}) = (x^{-1}.x).a.x^{-1} \Rightarrow x^{-1}.a = a.x^{-1} \Rightarrow$
     $\Rightarrow x^{-1} \in H$

2. En este caso, el grupo está constituido por cuatro giros y cuatro simetrías axiales:



Los cuatro giros:
G0: de 0º (o 360º)
G1: de 90º
G2: de 180º
G3: de 270º

Las cuatro simetrías axiales:
S1: alrededor del eje MN
S2: alrededor del eje KL
S3: alrededor del eje BD
S4: alrededor del eje AC

La tabla de las operaciones será la siguiente:

	G0	G1	G2	G3	S1	S2	S3	S4
G0	G0	G1	G2	G3	S1	S2	S3	S4
G1	G1	G2	G3	G0	S3	S4	S2	S1
G2	G2	G3	G0	G1	S2	S1	S4	S3
G3	G3	G0	G1	G2	S4	S3	S1	S2
S1	S1	S4	S2	S3	G0	G2	G3	G1
S2	S2	S3	S1	S4	G2	G0	G1	G3
S3	S3	S1	S4	S2	G1	G3	G0	G2
S4	S4	S2	S3	S1	G3	G1	G2	G0

Como se observa, las únicas operaciones que permutan son las de G0 y G2:

El centro es, por tanto: $H = \{G0, G2\}$

Es decir, los elementos que constituyen el centro son el giro de 0º y el giro de 180º.

PROBLEMA 86 (190113)

Calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx$$

RESOLUCIÓN:

$$\int \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\, dx = \int \frac{d(e^x)}{(e^x)^2+1} = arctg\left(e^x\right) + c$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \lim_{z \to \infty} \int_{-z}^{z} \frac{1}{e^x + e^{-x}}\, dx = \lim_{z \to \infty} arct(e^x)\Big|_{-z}^{z} = \lim_{z \to \infty} arct(e^x)\Big|_{-z}^{0} + \lim_{z \to \infty} arct(e^x)\Big|_{0}^{z} =$$

$$= arctg(1) - \lim arctg(e^{-z}) + \lim arctg(e^{z}) - arctg(1) = arctg(\infty) - arctg(0) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$